概率论与随机过程 期末试题

溯影市第一理工大学自然哲学学部 2024-2025冬季学期

考试须知：

1. 考生可以携带任意纸质资料和电子设备进入考场，但必须独立完成问题。
2. 考生可以使用大语言模型，也可以直接拍照搜索题目，但一旦被发现，所有题目的得分减半。
3. 本卷满分100分，限时 90 分钟。
4. 填空题只需填写最终答案，解答题需写出必要的公式和文字说明。
5. 综测发放规则：$\min(100, \sqrt{\text{本卷得分}} \times 15) \times \text{书院最高文艺综测} \div 100$
6. 组题/验题 by @林焓是猫猫（孙宇皓），组题人以人格担保本卷的有效性和阅卷规程的严谨性。因此不必担心作弊，请正常发放综测。

> 如果说 真实会为虚拟着墨
> 我看到的景色 是不是也源自哪个你呢

一、填空题（每题 5 分，共 50 分）

1. 举出两个生活中的随机过程的例子。
2. 简述强大数定律与弱大数定律之间的区别，并叙述中心极限定理。
3. 写出离散时间离散状态马氏链和离散时间鞅的定义。
4. 写出扩散方程 $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u^2(x,t)}{\partial x^2}$ 的解的路径积分形式。
5. 写出随机微分方程$\mathrm{d}X = \mathrm{d}f(X,t)\mathrm{d}t + \sigma(X,t)\mathrm{d}W_t$对应的福克-普朗克方程（传播子演化方程）。
6. 七个人去银行，银行只有六个服务台，因此不幸的小羽同学在服务台外等待。已知客户在服务台上被服务的时间服从参数为 λ 的指数分布，那么小羽同学在银行内停留的总时间（等待+服务）期望是多少？
7. 原神的抽卡机制可以做如下简化：每次抽卡是“小保底、大保底”其中一种。(a)若本次抽卡为小保底，则有$\dfrac{1}{2}$概率抽到目标角色。如果本次抽到，则下一次抽卡仍然是小保底；如果本次未抽到，则下一次抽卡转为大保底。(b)若本次抽卡为大保底，则直接抽到目标角色，下一次转为小保底。小陈同学抽了n次卡，其中抽到目标角色的次数为$X(n)$，求$\lim_{n\to\infty}\dfrac{X(n)}{n}$。
8. 小陈和小张同学公平赌博：每轮抛一枚硬币，正面朝上则小张给小陈一元，否则反之。小陈手中初始有a元钱，小张手中有b元钱，那么小陈最后赢走小张手中所有钱的概率是多少？如果$a \ll b$，那么这个概率趋向于多少？这告诉我们什么道理？
9. 使用每个区间的右端点作为参考点，计算右端点伊藤积分 $\int_0^T W_t \mathrm{d}W_t$。
10. 一些受到随机力作用的粒子在 x 轴上运动，粒子的位置 X_t 服从的随机微分方程为 $dX_t = fdt + gdW_t$，其中 W_t 是标准布朗运动，f, g 为常数。给定初始条件：$t=0$ 时粒子的概率密度函数为 $\rho_0(x)$，可观测到 $t=1$ 时的概率密度函数为 $\rho_1(x)$。现在若希望构造一个上述过程的“反转过程”，也就是给定初始条件：$t=0$ 时粒子的概率密度函数为 $\rho_1(x)$，希望观测到 $t=1$ 时概率密度函数为 $\rho_0(x)$，则粒子位置服从的随机微分方程是 $dX_t = Adt + gdW_t$。请使用 f, g 和粒子在 t 时刻的概率密度函数 $\rho_t(x)$ 表示 A。

二、解答题（每题 10 分，共 50 分）

1. （**牛马的打工日常**，10 分）
小陈同学不幸进入了 996 大厂，于是他每天两点一线地在家和办公室之间往返。小陈所在的地方湿热多雨，因

此他给自己准备了 r 把雨伞，初始时全部放在家中。已知小陈早晨从家中离开，晚上从办公室离开，每次出门时下雨的概率均为 p，且每次出门时是否下雨相互独立。若小陈出门时看到下雨了，且目前身边（家中或者办公室中）有雨伞，则他会带上一把伞，并将伞放到另一地点（例如，他离开办公室时发现下雨，就会从办公室带走一把雨伞放到家中）。

（1）（5 分）设 $U(i)$ 是小陈第 i 次出门**前**身边可用的雨伞数目，我们可以构建一个描述 $U(i)$ 的马氏链，该马氏链共有 $r+1$ 个状态，每个状态分别为 $U(i)=0,1,\cdots,r$。请写出该马氏链的状态转移矩阵。

（2）（5 分）验证该马氏链的稳态分布是 $\boldsymbol{\pi}=\left[\frac{1-p}{r+1-p},\frac{1}{r+1-p},\cdots,\frac{1}{r+1-p}\right]$。设小陈出门 n 次，其中被雨淋到 $X(n)$ 次，求 $\lim_{n\to\infty}\frac{X(n)}{n}$ 。

2. （**良心的校车司机**，10分）

（1）（5分）若**已知**一个泊松过程满足 $X(T)=N$，即在时刻 T 时已发生了 N 次事件。证明：N 次事件发生的时间点 $t_1,\cdots,t_N$ 的联合条件概率密度函数 $F(t_1,\cdots,t_N|X(T)=N)$ 与 N 个独立的、在 $[0,T]$ 之间均匀分布的随机变量的次序统计量的联合概率密度函数 $F(x_1,\cdots,x_N)$ 相同。

提示：设有 N 个独立同分布的随机变量 $X_1,\cdots,X_N$，我们可以将这些随机变量排序，从而定义**次序统计量**。例如，$X^{(1)}=\min(X_1,\cdots,X_N)$，$X^{(N)}=\max(X_1,\cdots,X_N)$。若随机变量 X_1 的概率密度函数为 $f(x)$，那么 N 个**次序统计量**的联合概率密度函数是：

$$F(x_1,\cdots,x_N)=N!\prod_{i=1}^{N}f(x_i)$$

（2）（5分）利用（1）的结论解决以下问题：某车站每天在时间区间 $[0,T]$ 连续运营，学生以参数为 λ 的泊松流到达车站（两名学生到达时间间隔满足参数为 λ 的指数分布）。现在要求你安排 N 辆校车接走学生（假设每辆校车容量足够大，可以装下任意数量的学生），要求在接走所有学生的情况下，使得所有学生的等待时间之和的期望最小，应该如何安排校车？写出你的结论并证明。

3. （**韭菜的自我修养**，10 分）股票的价格 X_t 服从如下随机微分方程：

$$\mathrm{d}X_t=rX_t\mathrm{d}t+\sigma X_t\mathrm{d}W_t$$

其中 W_t 是标准布朗运动，r,σ 为常数，分别称为股票的漂移率和波动率。

（1）（5 分）求 $\ln X_t$ 的全微分。

（2）（5 分）求出该随机微分方程的解 X_t（解中可含有 W_t）。并根据求解结果回答：若有两只股票的漂移率相同，那么你应该买入波动率较大的一只还是较小的一只？为什么？

4. （**暴力的脸滚键盘**，10分）在刘慈欣的科幻小说《诗云》中，强大的外星文明希望通过排列组合所有的文字来写出世界上最美的诗篇。假设常用汉字有4000个，外星文明每秒可以随机从其中选择一个文字写在纸上，两次选择的汉字互相独立。

（1）（5分）求出纸上出现字符串”我是”所需时间的期望。

（2）（5分）求出纸上出现字符串”我是一切我是山我是海我是风雨雷电所以我是一切”所需时间的期望。

5. （**多变的赌博游戏**，10分）小羽同学和猫猫同学赌博。小羽同学初始有 a 元钱，猫猫同学初始有 b 元钱。在每轮赌博中，他们首先通过某种方式随机决定本轮赌注（每轮赌博结束后，赌注将从败者手中转移到胜者手中）。此后，他们抛掷一枚正面向上的概率为 p 的硬币决定输赢：如果硬币正面向上，则小羽同学胜，否则反之。若某人在某轮中失败，且他拥有的金钱小于等于本轮的赌注，则赌博结束。

（1）（5分）狡猾的小羽同学决定出千：他设置 $p=1$。若赌注从 $[0,b]$ 上的均匀分布中抽取，每轮赌注相互独立，求赌博进行的轮数的期望。

（2）（5分）猫猫同学看穿了小羽同学的阴谋：他重新找了均匀的硬币使得$p=\frac{1}{2}$。若赌注从参数为1的指数分布中随机抽取，每轮赌注相互独立，求小羽同学最终获胜的概率，以及赌博进行的轮数的期望。

（3）（附加题，5分）设置$p\neq\frac{1}{2}$，其余条件与（2）相同。重新求解（2）中问题。