Day 9. < Final Day >.

"当历史包括了所有轨迹，它自然似不再留有意义。难道又一个返视，再从头拾起？"

>> 维纳测度：定义在轨道空间的测度.

考虑 [0,1] 之间的标准布朗运动. 我们给出时间区间 [0,1] 的一个划分 $(t_0, t_1, \cdots, t_N, t_{N+1})$. 其中 $t_0 = 0$, $t_{N+1} = 1$.

对应的随机变量值为 $w_0 \cdots w_{N+1}$. 则 $w_0 \cdots w_{N+1}$ 的联合分布写为:

$$P_{N+1}(w_0, w_1, \cdots, w_{N+1}) = \frac{1}{Z_N} \exp(-I_N(w_1 \cdots w_{N+1})).$$

由于布朗运动过程的增量服从正态分布. 且有独立增量性质，于是我们有:

$$Z_N = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \cdot [(t_1 - t_0)(t_2 - t_1) \cdots (t_N - t_{N-1})(t_{N+1} - t_N)]^{\frac{1}{2}}. \qquad I_N(w_0 \cdots w_{N+1}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N+1} \left( \frac{w_j - w_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \right)^2 (t_j - t_{j-1}).$$

现在令划分的份数 $N \to +\infty$. 上面的概率可以形式化地写成:

$$P_N(w_0, \cdots, w_{N+1})\, dw_1 \cdots dw_{N+1} \to \frac{1}{Z} \cdot \exp(-I[w]) \cdot \delta(w_0) \cdot Dw.$$

其中 $I[w] = \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{w}_t^2 dt$ (注：实际布朗运动的轨迹处处不可导，这里的导数只是形式上的写法.

$Dw$ 是对 $dw_1 \cdots dw_{N+1}$ 的简写.

>> 概率论中的测度变换

我们将来定义一个概率测度对另一个概率测度的导数.(说是导数，实际上是一个随机变量).

Def 1. Radon-Nikodym 导数.

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为一个概率空间. $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ 都是定义在该空间上的概率测度. 且 $P \ll Q$ ( P对Q"绝对连续". 换言之. 对 $\forall A \in \mathcal{F}$ 若 $Q(A)=0 \Rightarrow \mathbb{P}(A)=0$).

称满足以下条件的随机变量 $\frac{dP}{dQ}$ 为 P 对 Q 的 R-N 导数. $\forall A \in \mathcal{F}$. $\mathbb{P}(A) = \int_A \frac{dP}{dQ}(\omega) \cdot Q(d\omega)$. 换言之，现在 $\mathbb{P}(A)$ 可以被称作 $\mathbb{E}_Q[\frac{dP}{dQ}]$

显然，只要指定了两个测度之间的R-N导数. 我们就可以将Q测度变换至 $\mathbb{P}$ 测度.

举一些例子.

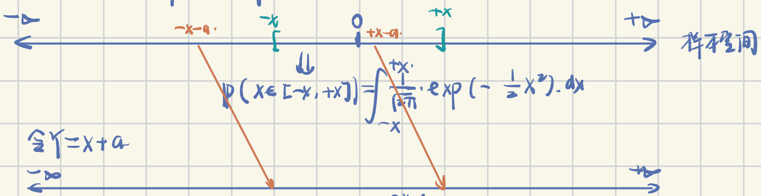
[Example 1]. 离散型随机变量. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. 已知 $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$. $Q(\{\omega_i\}) = q_i$.

可验证. $\frac{dP}{dQ}(\omega_i) = \frac{p_i}{q_i}$ 满足R-N导数定义.

例如，要算 $\mathbb{P}(\{w_1,w_2\}) = \sum_{w\in\{w_1,w_2\}} \frac{dP}{dQ}(w)\cdot Q(w) = \frac{p_1}{q_1}\cdot q_1 + \frac{p_2}{q_2}\cdot q_2 = p_1+p_2$.

[Example 2]. 连续型随机变量

$X$ 服从一维标准正态分布




$\Downarrow$

$\mathbb{P}(X\in[-x,+x]) = \int_{-x}^{+x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot \exp(-\frac{1}{2}x^2)\,dx$

令 $Y=X+a$

$\mathbb{P}(Y\in[-x,+x]) = \int_{-x-a}^{x-a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot \exp(-\frac{1}{2}x^2)\,dx$ $\Rightarrow$ 显然，不再服从标准正态分布.

我们可以做一个变换，使它在新测度 $Q$ 下满足正态分布. $\Rightarrow \frac{dQ}{dP}(x) = \exp(-\frac{a^2}{2} - ax)$.

则 $Q(Y\in[-x,+x]) = \int_{-x-a}^{x-a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot \exp(-\frac{1}{2}x^2)\cdot \exp(-\frac{a^2}{2} - ax)\,dx = \int_{-x-a}^{x-a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot \exp(-\frac{1}{2}(x+a)^2) = \int_{-x}^{+x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot \exp(-\frac{1}{2}x^2)$ $\Rightarrow$ 正态

对于随机过程道理一样. 考虑 $W_t$ 在标准维纳测度 $\mathbb{P}$ 下被"量测"的结果是 $p(w_1,\dots w_N)\,dw_1\cdots dw_N = \frac{1}{z}\exp(-\frac{1}{2}\int_0^1 \dot{w}_t^2 dt)\cdot \delta(w_0)\cdot Dw$.

但带有漂移的 $dX_t = b(X_t,t)\,dt + \sigma(X_t,t)\,dW_t$ 显然不会"测"出这一结果. 我们可否找到一个测度 $Q$，使得 $dX_t$ 在 $Q$ 下被测量成标准布朗运动?

为了简化推导和证明，我们只从 $dX_t = b(X_t,t)\,dt + dW_t$ 的简单情形开始推导.

考虑对SDE 作如下离散: $X_{t_{j+1}} = X_{t_j} + b(X_{t_j},t_j)\cdot(t_{j+1}-t_j) + (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})$. $X_0=0$. $W_0=0$.

这个离散实际给出了 $W_{t_1},\dots W_{t_N}$ 到 $X_{t_1},\dots X_{t_N}$ 之间的变换函数. 我们算一下它的Jacobian.

$X_1 = b_1\Delta t + W_1$. $\quad X_2 = X_1 + b_2\Delta t + (W_2 - W_1)$

$\Rightarrow \frac{\partial X_1}{\partial W_1} = 1$. $\frac{\partial X_1}{\partial W_2} = 0$. $\frac{\partial X_2}{\partial W_1} = -1$. $\frac{\partial X_2}{\partial W_2} = 1$. $\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial(X_1,X_2)}{\partial(W_1,W_2)} = 1$.

类似地，可以算出 $\frac{\partial(X_1,\dots X_N)}{\partial(W_1,\dots W_N)} = 1$.

凑一下R-N导数定义，假设我们有想要的测度 $Q$. 在测度 $Q$ 下，测 $X_t$ 要有: $Q(X_1\dots X_N)\,dX_1\cdots dX_N = \frac{1}{z_1}\exp(-I[X])\cdot DX$.

做变换，有：$(x_j - x_{j-1}) = b_{j-1}(t_j - t_{j-1}) + (w_j - w_{j-1})$. 代入有：

$$2I[x] = \sum_j \frac{(x_j-x_{j-1})^2}{(t_j-t_{j-1})^2} = \sum_j \frac{(w_j-w_{j-1})^2}{(t_j-t_{j-1})^2} + \sum_j b_{j-1}^2 (t_j-t_{j-1}) + 2\sum_j b_{j-1}(w_j-w_{j-1}).$$ 代入

$$Q(x_1\cdots x_N)\,dx_1\cdots dx_N = \frac{1}{z_N}\exp(-I[w])\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_j b_{j-1}^2(t_j-t_{j-1})\right)\cdot\exp\left(-\sum_j b_{j-1}(w_j-w_{j-1})\right).$$

$N\to+\infty$. 由标准维纳测度定义：

$$Q\,dx_1\cdots dx_N = p\cdot dx_1\cdots dx_N\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\int b^2dt\right)\cdot\exp\left(-\int b\,dw\right).$$ 从而我们有

**Theorem 1. Girsanov Transform.**

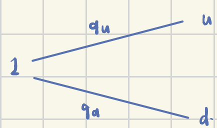
设在标准维纳测度 $\mathbb{P}$ 下有 B.M. $W^{\mathbb{P}}$. 定义新过程 $dW^{\mathbb{Q}} = \phi(w,t) + dW^{\mathbb{P}}$.

则在测度 $\mathbb{Q}$ 下 $dW^{\mathbb{Q}}$ 为标准B.M. $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\int_0^T \phi^2(t,w)\,dt - \int_0^T \phi(t,w)\,dw\right)$.

[Example] 风险中性测度.

两种资产定价方法(有效). <
- 无套利：所有无风险投资组合"殊途同归"
- 风险中性：不管风险多大，都没有额外收益.

离散模型的风险中性测度：




$q_u\cdot u + q_d\cdot d = \exp(rT)$.

连续模型：在某个客观测度 $\mathbb{P}$ 下 $dB_t = r_t B_t\,dt$, $dS_t = \alpha_t S_t\,dt + \sigma_t S_t\,dW^{\mathbb{P}}_t$. $dW^{\mathbb{P}}$ 为 $\mathbb{P}$ 下标准B.M.

若我们要求风险资产的折现过程 $e^{-\int_0^t r_s ds} S_t$ 在测度 $\mathbb{Q}$ 下是鞅，且 $\mathbb{P}\sim\mathbb{Q}$ 则称 $\mathbb{Q}$ 为风险中性测度.

$\Rightarrow E_{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_0^u r_s ds\right) S_u \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) S_t$.

现在计算 $d(e^{-\int_0^t r_s ds} S_t)$. 令 $D_t = \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right)$.

$\Rightarrow d(D_t\cdot S_t)$.  $*g(t, D_t, S_t) = D_t S_t$  使用Ito公式.

$$= \frac{\partial g}{\partial t}dt + \frac{\partial g}{\partial x_1}dD_t + \frac{\partial g}{\partial x_2}dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(dD_t)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(dS_t)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2}(dD_t)(dS_t).$$

$= S_t\, dD_t + D_t\, dS_t + dD_t\, dS_t$.

令 $X_t = \int_0^t r_s\, ds$. $D_t = e^{-X_t}$. $\Rightarrow dD_t = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dX_t)^2 = -\exp(-X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} (e^{-X_t}) (dX_t)^2 = -\exp(-X_t)\, dX_t$.

将 $dD_t$ 代入, 化简可以得到.

$d(\exp(-\int_0^t r_s\, ds)\, S_t) = D_t S_t [(\alpha_t - r_t)\, dt + \sigma_t\, dW_t^{\mathbb{P}}]$

利用Girsanov变换, 我们可构造 $dW_t^{\mathbb{Q}} = \theta_t\, dt + dW_t^{\mathbb{P}}$. 作为Q测度下的B.M.

$\Rightarrow d(\exp(-\int_0^t r_s\, ds)\, S_t) = D_t S_t [(\alpha_t - r_t - \sigma_t \theta_t)\, dt + \sigma_t\, dW_t^{\mathbb{Q}}]$.

两侧从u到v积分

$\Rightarrow \exp(-\int_0^v\ )S_v - \exp(-\int_0^v\ )S_u$

$= \int_v^u D_t S_t [(\alpha_t - r_t - \sigma_t \theta_t)]\, dt + \int_u^v \sigma_t\, dW_t^{\mathbb{Q}}$

$\Rightarrow$ 两侧对u时刻取条件期望 (使用测度Q). 由于 $dW_t^{\mathbb{Q}}$ 是Q测度下B.M. 故为0.

由鞅的条件. 要求 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\int_v^u D_t S_t (\alpha_t - r_t - \sigma_t \theta_t)\, dt] = 0$

$\Rightarrow$ 若风险资产的贴现过程被Q测为鞅, 则, $\theta_t = \frac{\alpha_t - r_t}{\sigma_t}$. $\theta_t$ 称为风险资产的风险溢价.

考虑任一投资组合. 以 $V_t$ 表示价值, $Z_t$ 表示风险资产单位.

$dV_t = Z_t\, dS_t + (V_t - Z_t S_t)\, r_t\, dt$.

则其折现过程. $d(e^{-\int_0^t r_s ds} V_t) = d(D_t V_t) = D_t Z_t S_t [(\alpha_t - r_t)\, dt + \sigma_t\, dW_t^{\mathbb{P}}]$

容易发现其折现过程在测度Q下是鞅. 换言之, 在风险中性测度下. 构建的

**Def.** 市场允许套利 (arbitrage) 机会, 若可构建组合. 使其价值 $V_t$ 满足: $V_0 = 0$. $\exists t$. $\mathbb{P}(\{V_t \geq 0\}) = 1$. $\mathbb{P}(\{V_t > 0\}) > 0$.

**Theorem.** 若存在某一风险中性测度. 则市场无套利机会.

Pf: 由测度 $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ 的等价性知, $\forall t$, 使 $\mathbb{Q}(\{V_t \geq 0\}) = 1$. $\mathbb{Q}(\{V_t > 0\}) > 0$.

又由任一投资组合在风险中性测度下的鞅性可知, $V(0) = \mathbb{E}[\exp(-\int_0^t r_s\, ds)\, V_t \mid \mathcal{F}_0] > 0$.

从而这违反了套利机会的定义. 得证.

风险中性定价：将衍生品与投资组合一样对待，因为贴现过程是 Q-鞅。设 $\Phi_T$ 代表衍生品价格终值。

$\Rightarrow \Phi_t = \mathbb{E}_Q\left[\exp\left(-\int_t^T r_s\,ds\right)\cdot\Phi_T \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$.

>> 路径积分。

最后，我们回顾 Feymann-Kac 公式：在上一节中，我们说 PDE $\frac{\partial u}{\partial t} = b\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V(x)\cdot u$，$u(x,0) = \phi(x)$ 的解：$u(x,t) = \mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^t V(X_\tau)\,d\tau\right)\cdot\phi(X_t) \,\middle|\, X_0 = x\right]$

例如：$\partial_t u = \frac{1}{2}\partial_{xx}u + V(x)\cdot u$.

$$\Rightarrow u(x,t) = \int \exp\left(\int_0^t V(X_\tau)\,d\tau\right)\cdot\frac{1}{Z_N}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \dot{x}_t\,dt\right)\cdot\phi(x_t)\,Dx$$

$$= \frac{1}{Z_N}\int \exp\left(\int_0^t \underline{\left(V(X_\tau) - \frac{1}{2}\dot{x}_t\right)}\,dt\right)\phi(x_t)\,Dx$$

$$= \frac{1}{Z_N}\int \exp\left(-I[x]\right)\phi(x_t)\,Dx$$ $\Rightarrow$ 作用量更大的路径以更大概率被选择。

最后考虑 Schrodinger Equation：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_{xx}\psi + V(x)\psi$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\psi = +\frac{i\hbar}{2m}\partial_{xx}\psi - \frac{i}{\hbar}V(x)\psi$$

不失一般性，令 $\frac{\hbar}{2m} = 1$。形式化地 $\sigma^2 = i \Rightarrow dx_t = \sqrt{i}\,dW_t \Rightarrow dW_t = \frac{1}{\sqrt{i}}dx_t$

$$I[x] = \sum_j \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{i}}x_j - \frac{1}{\sqrt{i}}x_{j-1}\right)^2}{(t_j - t_{j-1})^2} = -\sum_j i\cdot\frac{(x_j - x_{j-1})^2}{(t_j - t_{j-1})^2}$$

$$\Rightarrow \psi(x,t) = \frac{1}{Z_N}\int \exp\left(\int_0^t -\frac{i}{\hbar}\left(V(x) + \frac{1}{2}\dot{x}^2\right)dt\right)\phi(x_t)\,Dx.$$

而这个形式正是 Feymann 路径积分！