Day 8.

考虑一个常见的 SDE： $dX_t = b(X_t,t)\cdot dt + \sigma(X_t,t)\,dW$. 它的解应为随机过程、形式化地，我们将其解写为：$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_t,t)\,dt + \int_0^t \sigma(X_t,t)\,dt$.
在固定了样本点 ω 时 X_t 是 t 的连续函数。于是我们可以借鉴分析学中的定义：$\int_0^t \sigma(X_s(\omega),s) = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_j \sigma(X_{t_j}(\omega),t_j)\cdot(W^{(\omega)}_{t_{j+1}} - W^{(\omega)}_{t_j})$.
但是我们知道，由于 $W_t(\omega)$ 的曲线（直观上看）有分形的特征，（可证明，布朗运动的一次变差是无限的。所以这一定义可不恰当。（为什么？想想 Riemann可积的等价定义）.
考虑分析学中的情形，设 $f(t), g(t)$ 均为连续函数 $\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dg(t) \sim \sum_j f_j\,(g(t_{j+1})-g(t_j))$. 所谓达布大(小)和 $A/B = \sum_j \max/\min f_j\,(g(t_{j+1})-g(t_j))$.
它们之间的差距 $|A-B| \le \max_j |f_j^{max} - f_j^{min}|\cdot \sum_j |g(t_{j+1})-g(t_j)| \to 0$. 而对于上面的定义，我们无法完成 $|A-B|\to 0$ 的证明，这将导致如果直接对随机微积分进行类比定义，将导致
积分的值和 f_j 选取的点 $[t_j, t_{j+1})$ 区间内的哪一点有关。因此，在定义随机积分时，这一点必须被考虑到。（通过改变参考点，我们甚至可定义各种随机积分）.

Def 1. 简单函数的 Ito 积分.

称 $\phi(t,\omega)$ 是一个简单函数，如果存在一个划分 $[t_1, t_2 \cdots t_N]$，使之在每个分段上都是常数，换言之，它可以写成 $\phi(t,\omega) = \sum_j e_j(\omega)\,\mathbb{1}_{[t_j,t_{j+1})}(t)$，其中 $e_j(\omega)$ 是 $\mathcal{F}_{t_j}$ 可测的.
则它的 Ito 积分写成：$\int_0^T \phi(t,\omega)\,dW_t = \sum_j e_j(\omega)\cdot(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})$.

Theorem 1 简单函数的 Ito 积分有以下性质.

1). $\mathbb{E}\left[\int_0^T f(t,\omega)\,dW_t\right] = 0$ 2). $\int_0^T f(t,\omega)\cdot dW_t$ 是 $\mathcal{F}_t$ 鞅.

3). (Ito 等距). $\mathbb{E}\left[\int_0^T f(t,\omega)\,dW_t\right]^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^T f^2(t,\omega)\,dt\right]$

证明：性质1)是显然的.

下证2)，不妨设 S, T 处于不同区间，即 $S\in[t_l, t_{l+1})$，$T\in[t_k, t_{k+1})$.

$$\mathbb{E}[I(T)\,|\,\mathcal{F}_S] = \mathbb{E}\Big[\sum_{j=1}^{l-1} \underbrace{e_j(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})} + e_l(W_{l+1} - W_l) + \sum_{j=l+1}^{k-1} e_j(W_{j+1} - W_j) + e_k(W_T - W_k)\,\Big|\,\mathcal{F}_S\Big]$$

利用可测性，这一段可以从期望中拿出来.

$$= \sum_{j=1}^{l-1}(\quad) + e_l\big(\mathbb{E}[W_{l+1}\,|\,\mathcal{F}_S] - W_l\big) + \cdots$$

利用 W 的鞅性 $= \underbrace{\sum_{j=1}^{l-1}(\quad) + e_l(W_S - W_l)}_{I(S)} + \cdots$

只需证后半部分. $\mathbb{E}\Big[\sum_{j=l+1}^{k-1} e_j(W_{j+1} - W_j) + e_k(W_T - W_k)\,\Big|\,\mathcal{F}_S\Big] = 0$.

$$= \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[\sum_{j=l+1}^{k-1} e_j(W_{j+1} - W_j)\,\Big|\,\mathcal{F}_{t_j}\Big|\,\mathcal{F}_S\Big]\Big] + \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[e_k(W_T - W_k)\,|\,\mathcal{F}_{t_k}\,|\,\mathcal{F}_S]\big]$$

$$= \sum_j e_j\,\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[W_{j+1} - W_j\,|\,\mathcal{F}_{t_j}\,|\,\mathcal{F}_S]\big] + e_k\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[(W_T - W_k)\,|\,\mathcal{F}_{t_k}\,|\,\mathcal{F}_S]\big]$$

利用 W 鞅性 $= \sum_j e_j\,\mathbb{E}[W_j - W_j\,|\,\mathcal{F}_S] + e_k\,\mathbb{E}[W_k - W_k\,|\,\mathcal{F}_S] = 0$.

从而得证.

下证性质3). 记 $D_j = W_{t_{j+1}} - W_{t_j}$. 从而 $I(t) = \sum_j D_j e_j$，$I^2(t) = \left(\sum_i D_i e_i\right)\left(\sum_j D_j e_j\right) = \sum_j (D_j e_j)^2 + \sum_{i \neq j} e_i e_j D_i D_j = \sum_j (D_j e_j)^2 + 2\sum_{i<j} e_i e_j D_i D_j$

$e_i e_j D_i$ 是 $\mathcal{F}_{t_j}$ 可测的. 而 D_j 则与 $[0, t_j]$ 中的信息无关 $\Rightarrow$ D_j 与 $e_i e_j D_i$ 是独立的. 从而 $\mathbb{E}\left[\sum_{i<j} e_i e_j D_i D_j\right] = 0$.

对于 e_j 为 $\mathcal{F}_{t_j}$ 可测. 故 e_j 与 D_j 独立 $\Rightarrow \mathbb{E}[I^2(t)] = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{E}[(e_j D_j)^2] = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{E}[(e_j D_j)^2] = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{E}[e_j^2]\,\mathbb{E}[D_j^2] = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{E}[e_j^2](t_{j+1} - t_j) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f^2(t,\omega)\,dt\right]$. 从而得证.

Def 2. 一般函数的Itô积分.（使用一列简单函数逼近）.

令 $f(t,\omega)$ 是 (t,ω) 一般的函数. 它满足 $f(t,\omega)$ 是 $\mathcal{F}_t$ 适应的. 且 $\left|\mathbb{E}\left[\int_S^T f^2(t,\omega)\,dt\right]\right| < +\infty$ $\forall t, S$. 则令一列简单函数 $\{\phi_n(t,\omega)\}$ 满足 $\lim_{n \to +\infty} \phi_n(t,\omega) = f(t,\omega)$.

一般函数 $f(t,\omega)$ 的Itô积分定义为 $\int_S^T f(t,\omega)\,dW_t = \lim_{n \to +\infty} \int_S^T \phi_n(t,\omega)\,dW$.（实际上这个等号是由控制收敛定理保证的）.

它仍然满足期望不变性，鞅性 和Itô 等距这三个基本性质.

Theorem 2（只直观理解）. Itô 积分的基本性质

1). $\int_S^T f\,dW_t = \int_S^U f\,dW_t + \int_U^T f\,dW_t$ (a.s.).

2). $\int_S^T (f + cg)\,dW_t = \int_S^T f\,dW_t + c\int_S^T g\,dW_t$ (a.s.).

3). $\int_S^T f\,dW_t$ 是 $\mathcal{F}_T$ 适应的.

4). $X_t = \int_S^t f\,dW_t$ 几乎必有连续样本轨道.

[Example]. 计算 $\int_0^t W_s\,dW_s$.（利用定义）.

$$\int_0^t W_s\,dW_s = \sum_j W_{t_j}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) = \sum_j \frac{2W_{t_j}W_{t_{j+1}} - 2W_{t_j}^2}{2} = \sum_j \frac{W_{t_{j+1}}^2 - W_{t_j}^2}{2} - \sum_j \frac{W_{t_{j+1}}^2 - 2W_{t_{j+1}}W_{t_j} + W_{t_j}^2}{2}$$

$$= \frac{W_t^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_j (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2 \xrightarrow{\text{划分无限细}} \frac{W_t^2}{2} - \frac{t}{2}.$$

从而 $\int_0^t W_s\,dW_s = \frac{W_t^2}{2} - \frac{t}{2}$.

下面给出最重要的Itô公式:

Theorem 3. Itô公式. 设 $W(t)$ 为标准布朗运动 $f(t, W(t)) - f(0, W(0)) = \int_0^T f_t(t, W(t))\,dt + \int_0^T f_x(t, W(t))\,dW_t + \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t, W(t))\,dt$.

核心：无穷小变化 $f(t, W(dt)) - f(0, W(0)) = f_t\,dt + f_x\,dW_t + \frac{1}{2} f_{xx}\,dt$.

证明：由Taylor展开. $f(t_{j+1}, x_{j+1}) - f(t_j, x_j) = \underbrace{f_t(t_j, x_j)(t_{j+1} - t_j)}_{\int_0^T f_t(t, W(t))\,dt} + \underbrace{f_x(t_j, x_j)(x_{j+1} - x_j)}_{\int_0^T f_x(t, W(t))\,dW_t} + \underbrace{\frac{1}{2} f_{tt}(t_j, x_j)(t_{j+1} - t_j)^2}_{A} + \underbrace{f_{xt}(t_j, x_j)(t_{j+1} - t_j)(x_{j+1} - x_j)}_{B} + \underbrace{\frac{1}{2} f_{xx}(t_j, x_j)(x_{j+1} - x_j)^2}_{C}$

令 $x_j \leftarrow W_{t_j}$. 则对求和.

从而 $A \leq \frac{1}{2}\max(t_{j+1} - t_j)\sum_j f_{tt}(t_j, W(t_j))(t_{j+1} - t_j) \to \frac{1}{2}\max(t_{j+1} - t_j)\int_0^T f_{tt}(t, W(t))\,dt \to 0$.

$C \leq \max(W(t_{j+1}) - W(t_j))\sum_j f_{xt}(t_j, W(t_j))(t_{j+1} - t_j) \to \max(W(t_{j+1}) - W(t_j))\int_0^T f_{xt}(t, W(t))\,dt \to 0$.

而对于 B. $[W(t_{j+1}) - W(t_j)]^2 \to t_{j+1} - t_j$ * 这个收敛是依概率的. $\mathbb{E}[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2] = dt$. $\mathrm{Var}(\quad) = 2(dt)^2$. 可以由切比雪夫不等式证明依概率收敛.

从而 $B \xrightarrow{P} \frac{1}{2}\sum_j f_{xx}(t_j, w(t_j))(t_{j+1}-t_j) = \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t, w(t))dt$，从而得证.

* 注：推导中使用了依概率收敛，所以可能在某个零测集上不收敛，所以等号其实不是真相等，而是在除了某个零测集之外的地方相等.

下面利用 Ito 微积分求几个常见的SDE.

[Example] Ornstein—Uhlenbeck (OU) 过程 $dX_t = -\gamma \cdot X_t dt + \sigma \cdot dW$.

由Ito公式: $d(e^{\gamma t}X_t) = e^{\gamma t}\cdot dX_t + \gamma e^{\gamma t}\cdot X_t\cdot dt + 0$ ↙注意：没有 X_t 的二阶导.

而原方程等价于 $e^{\gamma t}\cdot dX_t + \gamma e^{\gamma t}\cdot X_t dt = d(e^{\gamma t}X_t) = \sigma\cdot dW_t \Rightarrow e^{\gamma t}X_t - X_0 = \int_0^t \sigma \underset{\smile}{e^{\gamma s}dW_s}$ → 这样做了在随机积分中将不含 X_s. 含有 X_s 不好算.

从而，该方程的解: $X_t = e^{-\gamma t}X_0 + \sigma\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}dW_s$. 我们只需要算一个随机积分.

↳ 确定积分 ⇒ 无数个高斯分布的加权和 → 仍为高斯分布.

后面这一项是零均值的，因此只需算方差. $\mathbb{E}[(\int\quad)^2] = \mathbb{E}[\int_0^t \exp(-2\gamma(t-s))] = \frac{1}{2\gamma}(1-\exp(-2\gamma t))$.

下面，我们更深入地研究PDE与SDE之间的联系.

1). F-P 方程中的守恒流和守恒荷.

对于一个典型的扩散过程 $dX_t = b(X_t,t)dt + \sigma(X_t,t)\cdot dW_t$. 则它对应的F-P方程为: $\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(b\cdot p) - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot(\sigma^2\cdot p)$.

构造守恒流: $j(x,t) = b(x)\cdot p(x,t) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\sigma^2 p)$ ⇒ $\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}$ ⇒ 两个平衡条件: $\frac{\partial j}{\partial x} = 0$ ⇒ global balance. $j = 0$ ⇒ detailed balance.

例如，考虑在外场和随机作用力下运动的布朗粒子. ⇒ $dX_t = -\frac{\partial}{\partial x}V(x)\cdot dt + \sqrt{\sigma T}dW$.

$$j = \frac{\partial}{\partial x}V(x)\cdot p(x,t) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\sigma T\cdot p(x,t)) = 0 \Rightarrow p(x,t) = \exp\left(-\frac{2V(x)}{\sigma T}\right).$$

此外，守恒流与守恒荷的形式可以用于导出与SDE"等效"的ODE.

$$v_{eff} = \frac{j(x,t)}{p(x,t)} = b(x,t) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial x}(\sigma^2 p) = b(x,t) - \frac{1}{2}\frac{1}{p}\cdot\left(\frac{\partial\sigma^2}{\partial x}p + \frac{\partial p}{\partial x}\cdot\sigma^2\right)$$
$$= b(x,t) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma^2}{\partial x} + \frac{\partial\ln p}{\partial x}\cdot\sigma^2\right).$$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = b(x,t) - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial\sigma^2}{\partial x} + \frac{\partial\ln p}{\partial x}\sigma^2\right)$. 考虑 $\sigma^2 = Const$ 的最简单情形 ⇒ $\frac{dx}{dt} = b(x,t) - \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{\partial\ln p}{\partial x}}_{\text{"score function"}}\sigma^2$.

"score function". 扩散的动力就是从高概率区向低概率区的转移.

2). Feynman-Kac 方程 (用SDE求解PDE).

Feynman-Kac 定理有两个版本，分别要给定PDE的初值，终值.

Ver A. 初值问题.

若我们有一个PDE: $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = b(x) \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2(x) \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + u \cdot v(x)$. 并有初条件 $u(x,0) = \phi(x)$.

构造:

$$Y_s = \exp\left(\int_0^{t-s} v(X_\tau)\, d\tau\right) u(X_{t-s}, s). = D \cdot u$$

由 Ito公式: $dY_s = dD \cdot u + D \cdot du$.

而 $dD = -\exp\left(\int_0^{t-s} v(X_\tau) \cdot d\tau\right) \cdot v(X_{t-s}) \cdot ds$.

$$du = \frac{\partial u}{\partial X_{t-s}} \cdot dX_{t-s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial X_{t-s}^2} (dX_{t-s})^2 + \frac{\partial u}{\partial s} \cdot ds.$$

由于 $dX_{t-s} = -b(X_{t-s})\, ds + \sigma(X_{t-s})\, d\tilde{W}_{t-s}$

$(dX_{t-s})^2 = -\sigma^2(X_{t-s}) \cdot ds$

将以上结果全部代入有:

$$dY_s = -\exp\left(\int_0^{t-s} v(X_\tau)\, d\tau\right)\left(-v(X_{t-s}) - \frac{\partial u(s,X_{t-s})}{\partial X_{t-s}} b(X_{t-s}) - \frac{\partial^2 u(s,X_{t-s})}{\partial X_{t-s}^2} \frac{1}{2}\sigma^2(X_{t-s}) + \frac{\partial u(s,X_{t-s})}{\partial s}\right) ds$$

$$+ \exp\left(\int_0^{t-s} v(X_\tau)\, d\tau\right) \cdot \sigma(X_{t-s})\, d\tilde{W}$$

由PDE 可知漂移项为0. 两侧从0~t积分.

$$Y_t - Y_0 = \int_0^t \exp\left(\int_0^{t-s} v(X_\tau)\, d\tau\right) \sigma(X_{t-s}) \cdot d\tilde{W}_{t-s}.$$

$\Rightarrow \mathbb{E}[Y_t \mid X_0 = x] = \mathbb{E}[Y_0 \mid X_0 = x]$

$\Rightarrow u(x,t) = \mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^t v(X_\tau)\, d\tau\right) u(X_t, 0) \,\middle|\, X_0 = x\right].$

$= \mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^t v(X_\tau)\, d\tau\right) \phi(X_t) \,\middle|\, X_0 = x\right]$ $\quad dX_t = b(X_t)\, dt + \sigma(X_t)\, dW_t.$

Ver B. 终值问题.

我们有PDE: $\frac{\partial u}{\partial t} + b(x,t) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v(x,t) u = 0$. 有终条件 $u(x,T) = \phi(x)$.

$\Rightarrow u(x,t) = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_t^T v(X_\tau)\, d\tau\right) \cdot \phi(X_T) \,\middle|\, X_t = x\right].$ $\quad dX_t = b(X_t,t)\, dt + \sigma(X_t,t)\, dW_t$

构造随机变量 $Y_s = \exp(-\int_t^s V(X_\tau)\,d\tau)\, u(X_s,s) = Du$.

⇒ $dY_s = dD\cdot u + du\cdot D$.

其中. $dD = -V(X_s)\cdot \exp(-\int_t^s V(X_\tau)\,d\tau)$.

$du = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot (dx) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial u}{\partial s}\cdot ds$.

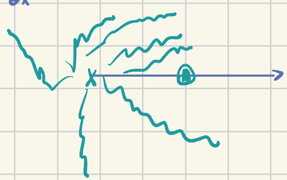
其中. $dx = b(X_t,t)\,dt + \sigma(X_t,t)\,dW_t$, $(dx)^2 = \sigma^2 dt$.

全部代入可得: $dY_s = \exp(-\int_t^s V(X_\tau)\,d\tau)\ \sigma(X_s,s)\cdot\frac{\partial u}{\partial s}\,dW_s$.

⇒ $\mathbb{E}[Y_t \mid X_t = x] = \mathbb{E}[Y_T \mid X_t = x]$, 从而立刻有结论.

[Example] 热方程. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x,0) = \delta(x)$.

⇒ $u(x,t) = \mathbb{E}[\delta(X_T) \mid X_0 = x]$



⇒ 统计"击中"原点的粒子数目