Day 7

我们来说一下为什么选择定理中要限制类似于"期望有界"的条件。不妨来考虑之前提到的"倍增过程"。将停时 τ 设为第一次获胜的时间，换言之 $\tau=\inf\{n\geq 1, \eta_n=1\}$。停时的期望(该策略期望结束的时间)。$\mathbb{E}(\tau)=\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot P(\tau=k)=2$。而且 $\xi_\tau=1$。$\Rightarrow \mathbb{E}[\xi_\tau]=\mathbb{E}\,\mathbb{E}[\xi_\tau \mid \tau=t]]=1\cdot\sum P=1$ 元 *违反选择定理。

注意到：$\mathbb{E}[|\xi_n|\cdot \mathbb{1}_{(\tau>n)}]=\mathbb{E}[(2^n-1)\cdot \mathbb{1}_{(\tau>n)}]=1-\frac{1}{2^n}\not\to 0$。直观上，$\mathbb{1}_{(\tau>n)}$ 指数减少，因此赌博者的负债额指数上升。观察首次获利前负债，显然有 $\xi_\tau=1-2^{n-1}\ (\tau=n)$。

则计算负债期望为 $-\infty$。换言之，只有赌博者有无穷多初始资金时，才可以使用这一策略。这不符合我们对期望有限的要求。

另有一个例子说明停时不可无穷长，即所谓"一维对称随机游走"。

Example 1. 推广的赌徒输光问题。

二人博弈 $\eta_k=1$ 则甲胜，$\eta_k=-1$ 则乙胜。$\mathbb{P}(\eta_k=+1/0/-1)=p/r/q$。$\xi_n=a+\sum_{k=1}^{n}\eta_k$。停时 $\tau=\inf\{n\geq 0, \underset{\text{甲输光}}{\xi_n=0} \text{ 或 } \underset{\text{乙输光}}{\xi_n=a+b}\}$。令 $p_0=\mathbb{P}(\xi_\tau=0)$，$q_{a+b}=\mathbb{P}(\xi_\tau=a+b)$。

(1). 首先证明选择定理条件(2)成立。

考虑 n 个相邻时间段 $\{1,\dots,a+b\}$，$\{a+b+1,\dots,2a+2b\}\dots$ 设事件 $A_k=\{\eta_{(k-1)(a+b)+1}=1,\dots,\eta_{k(a+b)}=1\}$，则 $\mathbb{P}(A_k)=p^{a+b}$。由定义，$\bigcup_{k=1}^{n}A_k\subset\{\tau<\infty\}$。

从而：$\mathbb{P}(\tau<n(a+b))\geq\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=1-\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{n}A_k^c)=1-(1-p^{a+b})^n$，$\mathbb{P}(\tau>n(a+b))=(1-p^{a+b})^n$。$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}[(a+b)\cdot(1-p^{a+b})^n]\to 0$。从而选择定理可用。

*为进行下面的计算，先补充证明一个引理。

(η_n) 相互独立，$\mathbb{E}[\eta_n]<+\infty$。前面已说过，取 $\tilde{\eta}_n=\eta_n-\mathbb{E}[\eta_n]$，则 $\xi_n=\sum_{k=1}^{n}\tilde{\eta}_n$ 是鞅。现在再证：若 $\mathbb{E}[\eta_n^2]<+\infty$，则 $\zeta_n=\xi_n^2-\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[\tilde{\eta}_k^2]$ 是鞅。

证明：
$$\mathbb{E}[\zeta_{n+1}\mid\mathcal{F}_n]=\mathbb{E}\Big[(\xi_n+\tilde{\eta}_{n+1})^2-\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{E}(\tilde{\eta}_k^2)\,\Big|\,\mathcal{F}_n\Big]$$
$$=\mathbb{E}[\xi_n^2\mid\mathcal{F}_n]+2\mathbb{E}[\xi_n\tilde{\eta}_{n+1}\mid\mathcal{F}_n]+\mathbb{E}[\tilde{\eta}_{n+1}^2\mid\mathcal{F}_n]-\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{E}[\tilde{\eta}_k^2]$$
$$=\xi_n^2+2\xi_n\mathbb{E}[\tilde{\eta}_{n+1}]+\mathbb{E}[\tilde{\eta}_{n+1}^2]-\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{E}[\tilde{\eta}_k^2]$$
$$=\xi_n^2-\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[\tilde{\eta}_k^2]=\zeta_n$$

(2). 若 $p=q$，$\mathbb{E}[\eta_1]=0$。由引理知：$(\xi_n,\mathcal{F}_n)$ 是鞅，$(\xi_n^2-2pn,\mathcal{F}_n)$ 是鞅。τ 不是有界停时，不满足条件1，但满足条件2。因此直接利用选择定理。

从而我们有：$\mathbb{E}[\xi_\tau]=a=(a+b)\cdot q_{a+b}$。

$$\mathbb{E}[\xi_\tau^2]-2p\mathbb{E}[\tau]=(a+b)^2\cdot q_{a+b}-2p\cdot\mathbb{E}[\tau]=a^2 \Rightarrow q_{a+b}=\frac{a}{a+b}\quad p_0=\frac{b}{a+b}\quad \mathbb{E}[\tau]=\frac{ab}{2p}$$

(3). 若 $p\neq q$，则现在的问题是如何构造一个鞅，而这需要另一引理。

*引理：若对于某个实数 s，$\mathbb{E}[\exp(s\cdot\eta_n)]<+\infty$，$n\geq 1$。设 $\phi_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{\exp(s\cdot\eta_k)}{\mathbb{E}[\exp(s\cdot\eta_k)]}$ 是 $\mathcal{F}_n$ 鞅。

证明:

$$\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n+1}\frac{\exp(s\cdot\eta_k)}{\mathbb{E}[\exp(s\cdot\eta_k)]}\,\Big|\,\mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{\exp(s\cdot\eta_k)}{\mathbb{E}[\quad]}\cdot\frac{\exp(s\cdot\eta_{n+1})}{\mathbb{E}[\exp(s\cdot\eta_{n+1})]}\,\Big|\,\mathcal{F}_n\right] = \varphi_n$$

接下来构造一个鞅. 记 $\alpha(s)=\mathbb{E}[\exp(s\cdot\eta_1)] = \exp(s)\cdot p + \exp(-s)\cdot q + r$. $\Rightarrow \zeta_n(s)=\alpha(s)^{-n}\exp(-sa)\cdot\exp(s\cdot\xi_n)$.

利用停时定理: $\mathbb{E}[\zeta_\tau(s)] = \exp(-sa)\cdot\mathbb{E}[\underbrace{\alpha(s)^{-\tau}\cdot\exp(s\tau)}_{\text{两个不独立的r.v.的乘积的期望不好求}}] = \alpha(s)^{-1}\cdot\mathbb{E}[\exp(s\cdot\eta_1)] = 1$.

令 $s=\ln(\frac{q}{p}) \Rightarrow \alpha(s)=1$. 相当于我们要把 $\alpha(s)^{-\tau}$ 去掉. 此时 $\zeta_n(\ln\frac{q}{p}) = (\frac{q}{p})^{\xi_n}\cdot(\frac{q}{p})^{-a}$. 从而 $\mathbb{E}[(\frac{q}{p})^{\xi_\tau}] = (\frac{q}{p})^{a}$.

从而: $(\frac{q}{p})^0\cdot p_0 + (\frac{q}{p})^{a+b} = (\frac{q}{p})^a \Rightarrow$ 解出 $p_0 = \frac{(\frac{q}{p})^a-(\frac{q}{p})^{a+b}}{1-(\frac{q}{p})^{a+b}}$ $\quad q_{a+b} = \frac{1-(\frac{q}{p})^a}{1-(\frac{q}{p})^{a+b}}$

易知 $(\xi_n-(p-q)n, \mathcal{F}_n)$ 为鞅 $\Rightarrow \mathbb{E}[\xi_\tau]-(p-q)\cdot\mathbb{E}[\tau]=a$. 从而 $\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{p-q}(\mathbb{E}[\xi_\tau]-a)$.

Example 2. 简单随机游动

利用以上结论我们可以讨论简单随机游动问题. 设粒子从a处出发. 给出三个停时: $\begin{cases}\tau_0=\inf\{n\geq 1, \xi_n=0\}\\ \tau_{a+b}=\inf\{n\geq1, \xi_n=a+b\}\end{cases}$ $\tau_a^b = \min\{\tau_0, \tau_{a+b}\}$.

τ_a^b 关于b单增. 由于 $\tau_a^b=\min\{\tau_0,\tau_{a+b}\} \Rightarrow \lim_{b\to+\infty}\tau_a^b\leq\tau_0$. 另一方面, $\tau_{a+b}\geq b$. $\tau_a^b\geq\min(b,\tau_0)$. $\Rightarrow \lim_{b\to+\infty}\tau_a^b\geq\tau_0$

设 $A:=$ 事件"ξ_n 可以抵达0". 则 $A=\bigcup_{b=1}^{\infty}\{\xi_{\tau_a^b}=0\}$. 并且有 $\{\xi_{\tau_a^b}=0\}\subset\{\xi_{\tau_a^{b+1}}=0\}$.

在先抵达b前到0.

在 $p=q$ 时 $\mathbb{P}(A)=\lim_{b\to+\infty}(\xi_{\tau_a^b}=0)=\lim_{b\to+\infty}\frac{b}{a+b}=1$. $\quad\mathbb{E}(\tau_0)=\lim_{b\to+\infty}\mathbb{E}(\tau_a^b) = \lim_{b\to+\infty} ab = +\infty$

利用类似的手法可得知: 在 $p>q$ 时. $\mathbb{P}(A)=(\frac{q}{p})^a$ $\quad\mathbb{E}[\tau_0]=+\infty$. $\quad$ 在 $p<q$ 时. $\mathbb{P}(A)=1$. $\quad\mathbb{E}(\tau_0)=\frac{a}{q-p}$.

Example 3. Wald 等式

设 η_n 是 i.i.d. 随机变量序列. $\mathbb{E}|\eta_1|<+\infty$. τ 是 $\mathcal{F}_n$ 停时 且 $\mathbb{E}[\tau]<+\infty$. $\xi_n=\sum_{k=1}^n\eta_k$. 则有结论: $\mathbb{E}[\xi_\tau]=\mathbb{E}[\tau]\mathbb{E}[\eta_1]$

可以验证, 进一步地, 若有 $\mathbb{E}[\eta_1]=0$. $\mathbb{E}[\eta_1^2]=\sigma^2<+\infty$. 则有: $\mathbb{E}[\xi_\tau^2]=\sigma^2\mathbb{E}[\tau]$.

虽然在知道 $(\xi_n-n\mathbb{E}[\eta_1])$ 为 $\mathcal{F}_n$ 鞅后, 结论不言自明. 故我们只需验证其条件(2)成立.

1). 验证 $\mathbb{E}[\xi_\tau-\tau\mathbb{E}[\eta_1]]<+\infty$. 由于假定 $\mathbb{E}[\tau]<+\infty$. 因此只需有 $\mathbb{E}[\xi_\tau]<+\infty$.

只是写了E(·)中的R.V.(展开形式).

$\mathbb{E}|\xi_\tau| = \mathbb{E}|\sum_{k=1}^{\tau}\eta_k| \leq \mathbb{E}\sum_{k=1}^{\tau}|\eta_k| = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|)\cdot\mathbb{1}_{(\tau=n)} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}|\eta_k|\cdot\mathbb{1}_{(\tau=n)} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n\geq k}\mathbb{E}|\eta_k|\cdot\mathbb{1}_{(\tau=n)} = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}|\eta_k|\mathbb{1}_{(\tau\geq k)}$. 而我们知道根据停时定义有: $\{\omega:\tau(\omega)=n\}\in\mathcal{F}_n$.

$\{\omega:\tau(\omega)\geq k\}=\{\omega:\tau(\omega)=k\}\cup\{\omega:\tau(\omega)=k+1\}\cup\cdots\cup\{\tau(\omega)=+\infty\} = \Omega/\{\tau(\omega)=0\}\cup\{\tau(\omega)=1\}\cup\cdots\{\tau(\omega)=k-1\}$ 所以 $\mathbb{1}_{(\tau\geq k)}$ 实际上 $\mathcal{F}_{k-1}$ 可测

而 η_k 实际上只需要 $\mathcal{F}_k - \mathcal{F}_{k-1}$ 中的信息确定. $\Rightarrow \eta_k$ 与 $\mathbb{1}_{(\tau\ge k)}$ 独立、从而有 $\mathbb{E}[\xi_\tau] \le \mathbb{E}[\eta_k]\cdot\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\tau>k)$

2). 验证 $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left(|\xi_n - n\mathbb{E}\eta_1|\,\mathbb{1}_{(\tau\ge n)}\right) = 0$. 分成前后两半看. 首先看前一半.

$\mathbb{E}[|\xi_n|\,\mathbb{1}_{(\tau>n)}] = \mathbb{E}[|\sum_{k=1}^n \eta_k|\cdot \mathbb{1}_{(\tau>n)}] \le \mathbb{E}[\sum_{k=1}^n|\eta_k|\cdot\mathbb{1}_{(\tau>n)}] \le \mathbb{E}[\sum_{k=1}^\tau|\eta_k|\cdot\mathbb{1}_{(\tau>n)}]$ (用来交换极限和积分的顺序).

由 $\mathbb{E}[\tau]<+\infty$ 知 $\mathbb{1}_{(\tau>n)}$ 几乎处处收敛到 0. 则 $\sum_{k=1}^\tau|\eta_k|\,\mathbb{1}_{(\tau>n)}$ 也几乎处处收敛到 0. (已证明 $\mathbb{E}\sum_{k=1}^\tau|\eta_k| < +\infty$). 由 Lebesgue 控制收敛定理: $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}[\sum_{k=1}^\tau|\eta_k|\,\mathbb{1}_{(\tau>n)}]=0$.

再看后一半. $\mathbb{E}[\tau] = \sum_{m=1}^\infty m\,\mathbb{P}(\tau=m) < +\infty$. 从而

$n\cdot\mathbb{P}(\tau>n) \le n\cdot\mathbb{P}(\tau\ge n) = n\cdot\sum_{m=n}^\infty \mathbb{P}(\tau=m) \le \sum_{m=n}^\infty m\cdot\mathbb{P}(\tau=m)\to 0$.

Example 4. 更新过程.

设 X_n 是 i.i.d. 随机变量列 $\{X_n\}$ 为 $\{\mathcal{F}_n\}$ 适应 $\wedge$ $\mathbb{P}(X_1>0)=1$. $\mathbb{E}[X_1]<+\infty$. 设 $\mathbb{E}[X_1]=\mu$. 记 N_t 为一个计数. $N_t = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{1}_{(T_n\le t)} = \max\{n: T_n\le t\}$. 从而 $N(t)$ 是 $[0,t]$ 间事件数.

显然我们有 $\{N_t\ge n\} = \{T_n\le t\}$. $T_{N_t}\le t< T_{N_t+1}$. 现在我们要证明更新过程的基本定理. 记 $m(t) = \mathbb{E}[N_t]$. ("更新函数"). 则 $\lim_{t\to+\infty}\frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$.

证明: 我们将使用 Wald 等式证明这一结论. 分两步证. ★可以证明 $\mathbb{E}[N_t]<+\infty$

a). $\liminf_{t\to+\infty}\frac{m(t)}{t}\ge\frac{1}{\mu}$.

$\{N_t=n\}$: $[0,t]$ 时间段已发生 n 次事件. 但 n+1 次未发生 → 由 $\mathcal{F}_{n+1}$ 决定. $\Rightarrow N_t$ 不是停时.

$\{N_t+1=n\}$: $[0,t]$ … n-1 … n … → 由 $\mathcal{F}_n$ 决定 $\Rightarrow N_t+1$ 是停时.

由于 $\{T_n - n\mu\}$ 关于 $\mathcal{F}_n$ 鞅, 则由 Wald 等式立刻有: $\mathbb{E}[T_{N_t+1}] = \mu(m(t)+1)$,

而 $t<\mathbb{E}[T_{N_t+1}] \Rightarrow t<\mu(m(t)+1) \Rightarrow \frac{m(t)}{t} > \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t} \Rightarrow \liminf_{t\to+\infty}\frac{m(t)}{t}\ge\frac{1}{\mu}$

b). $\limsup_{t\to+\infty}\frac{m(t)}{t}\le\frac{1}{\mu}$.

不妨设 X_n 为有界 R.V. 即 $\exists M$. $\mathbb{P}(X_n<M)=1$. 由于 $T_{N_t+1} = T_{N_t}+X_{N_t+1}$. 从而有: $t\ge\mathbb{E}[T_{N_t}] = \mathbb{E}[T_{N_t+1} - X_{N_t+1}] = \mu(m(t)+1) - \mathbb{E}[X_{N_t+1}] \ge \mu(m(t)+1) - M$.

从而有 $t\ge\mu(m(t)+1)-M \Rightarrow \frac{m(t)}{t}\le\frac{1}{\mu} - \frac{1}{t}\frac{M-\mu}{\mu} \Rightarrow \limsup_{t\to+\infty}\frac{m(t)}{t}\le\frac{1}{\mu}$. 对于一般情形亦可证明, 但此处不再详述

下面介绍 Doob 停时定理. 记"最大"的 σ-代数为 $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{t\in T}\mathcal{F}_t\right)$.

Def 1. $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$. 停时 τ 的"事前事件域".

$\mathcal{F}_\tau = \{A\in\mathcal{F}_\infty \mid \forall t\in T,\ A\cap\{\tau\le t\}\in\mathcal{F}_t\}$ 注解: (离散的更直观.)

$= \{A\in\mathcal{F}_\infty\mid\forall t\in T,\ \mathbb{1}_{A\cap\{\tau\le t\}}$ 为 $\mathcal{F}_t$ 可测的 R.V.$\}$.

特殊地, 对于离散情形 $\mathcal{F}_\tau = \{A\in\mathcal{F}_\infty\mid\forall n,\ A\cap\{\tau=n\}\in\mathcal{F}_n\}$.

$A\cap\{\tau=n\}$ 相当于选出了 A 中受 τ=n 限制的那些样本点组成一个新事件, 而它在 $\mathcal{F}_n$ 中. 换言之, A 中的各个样本点可以被停时"筛选"出来, 但它们都必须只与截止到停时那一刻的信息有关. 因此, A 中只包含了截止到 τ 时刻的信息. $\mathcal{F}_\tau$ 也是.

它有一些性质:

a). 若 $T\in\mathbb{Z}^+$, 则 ξ_τ 为 $\mathcal{F}_\tau$ 可测

若 $T\in\mathbb{R}^+$, 且 ξ_t 右连续, 即 $\forall\,\omega\in\Omega$, $\xi_t(\omega)$ 对 t 右连续, 则 ξ_τ 为 $\mathcal{F}_\tau$ 可测,

b). 设 τ,σ 为 $\{\mathcal{F}_t\}$ 停时. 若 $\sigma\le\tau$, 则 $\mathcal{F}_\sigma\subset\mathcal{F}_\tau$.

Theorem 1. Doob 有界停时定理.

ξ_t 为 $\mathcal{F}_t$ 鞅, $\sigma\le\tau<M<+\infty$ 为两个有界停时 则 $\mathbb{E}[\xi_\tau\mid\mathcal{F}_\sigma]=\xi_\sigma$.

证明: 只证明 $T\in\mathbb{Z}^+$ 的简单情形. 先证 $\mathbb{E}|\xi_\tau|<+\infty$, $\mathbb{E}|\xi_\sigma|<+\infty$.

$$\mathbb{E}|\xi_\tau| = \mathbb{E}\Big|\sum_{k=0}^{M}\xi_k \mathbb{1}_{\{\tau=k\}}\Big| \le \sum_{k=0}^{M}\mathbb{E}|\xi_k|<+\infty.$$

我们只需证明: $\forall A\in\mathcal{F}_\sigma$, $\mathbb{E}[\xi_\tau\mathbb{1}_A]=\mathbb{E}[\xi_\sigma\mathbb{1}_A]$ 根据条件期望性质可由此得到待证结论.

$$\mathbb{E}[\xi_\tau\mathbb{1}_A] = \sum_{k=0}^{M}\mathbb{E}[\xi_k\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{\{\tau=k\}}] = \sum_{k=0}^{M}\mathbb{E}[\xi_k\mathbb{1}_{A\cap\{\tau=k\}}]$$

由于 ξ_t 为 $\mathcal{F}_t$ 鞅. 对于任意 $B\in\mathcal{F}_k$. $\mathbb{E}[\xi_M\mathbb{1}_B]=\mathbb{E}[\xi_k\mathbb{1}_B]$. 由 $\sigma\le\tau \Rightarrow \mathcal{F}_\sigma\subseteq\mathcal{F}_\tau$. $\Rightarrow A\subset\mathcal{F}_\tau$. $\Rightarrow$ 对 $\forall k$. $A\cap\{\tau=k\}\in\mathcal{F}_k$.

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{M}\mathbb{E}[\xi_k\underbrace{\mathbb{1}_{A\cap\{\tau=k\}}}_{\in\mathcal{F}_k}] = \sum_{k=0}^{M}[\xi_M\mathbb{1}_{A\cap\{\tau=k\}}] = \sum_{k=0}^{M}\mathbb{E}[\xi_M\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{\{\tau=k\}}] = \mathbb{E}[\xi_M\mathbb{1}_A]$$

同理有 $\mathbb{E}[\xi_\sigma\mathbb{1}_A]=\mathbb{E}[\xi_M\mathbb{1}_A]$. 得证!

理解: 本来, 我们的过程是 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 其中的信息保存在 $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\cdots$

现在, 我们做某种"时间坐标变换", 将过程变为 $\xi_{\tau_1},\xi_{\tau_2},\cdots$ 信息保存在 $\mathcal{F}_{\tau_1},\mathcal{F}_{\tau_2},\cdots$

而该过程的鞅性不在这种"时间坐标变换"下变化!