Day 6

在之前我们知道在研究一个随机过程时，可研究一个带流的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ 和定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的随机过程 X_t。

实际上，(通过未来的研究可以发现)，我们可以缩小一下 σ-代数的范围。为此我们有如下定义：

→ 换言之，X_t 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的，X_t 的值可以由 $\mathcal{F}_t$ 中事件之前发生的信息完全确定。

Def 1. 称随机过程 X_t 对于 $\mathcal{F}_t$ 适应，若对于任意 $t \in T$，X_t 是 $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ 上的随机变量，即：$\forall a \in \mathbb{R}$，$\{\omega : X_t(\omega) \le a\} \in \mathcal{F}_t$。

Def 2. 设 (X_t) 为 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ 上关于 $\mathcal{F}_t$ 适应的 s.p. 若对 $\forall s < t$，都有 $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$，则称 $\{X_t\}$ 为 $\{\mathcal{F}_t\}$ 鞅，或称 $\{X_t, \mathcal{F}_t\}$ 为鞅。

给定了前 s 时刻的信息 $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots \mathcal{F}_s$（逐渐加细），得到的估计恰为由 $\mathcal{F}_s$ 确定的 X_s。直观来看，进行估计"一分钱一分货"，不多也不少！

鞅与赌博密切相关。为了后续举例，我们要看一个赌博模型。设赌徒的初始赌本为 ξ_0，在第 n 次后，有钱 ξ_n。设 $\eta_n = \begin{cases} +1 & \text{在第 n 次中赢} \\ -1 & \cdots\cdots \text{输} \end{cases}$ 在第 n 次下注时根据赌本和之前的结果决定赌注 ⇒

$b_n = b_n(\xi_0; \eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1})$ 则有：$\xi_n = \xi_{n-1} + b_n(\xi_0, \eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{n-1}) \cdot \eta_n$。累加可立刻知：$\xi_n = \xi_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k(\xi_0, \eta_1, \cdots \eta_{k-1}) \eta_k$。

假定现在这个赌博是符合直觉的公平的，则我们来求一下条件期望（回忆：条件期望的定义）。

→ 对于任意随机变量 X，$\mathbb{E}[X]$ 有界，称在给定 sub σ-Algebra 时，X 的条件期望 Z 定义为：

- Z 是 G 可测的（Z 的值可由 G 中信息唯一确定）。
- 对于 ∀ 事件 $A \in G$，$\sum_{\omega \in A} Z(\omega) \cdot \mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega \in A} X(\omega) \mathbb{P}(\omega)$。换言之，G 是一个"大漏斗"，让 X 中无法被 G 确定的信息"漏下去了"。

$$\mathbb{E}[\xi_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\xi_n | \mathcal{F}_n] + b_{n+1}(\xi_0, \eta_1, \cdots \eta_n) \cdot \underline{\mathbb{E}[\eta_{n+1} | \mathcal{F}_n]}$$

唯一由 $\mathcal{F}_n$ 中信息唯一确定

$$= \xi_n + b_{n+1}(\xi_0, \eta_1, \cdots \eta_n) \cdot 0 = \xi_n$$

此时我们会说 ξ_n 满足鞅的条件。因此，鞅过程也被称为"公平赌博"过程。

Def 2 (续). 若 $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \ge (\le) X_s$，则称 $(X_t, \mathcal{F}_t)$ 为下鞅，否则为上鞅。若 X_n 为（上、下）鞅列，则 $(X_{n+1} - X_n)$ 称为（上、下）鞅差列。

Example 1. 我们使用 iid 随机变量得到一个随机过程 $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ 且 η_n 是 $\mathcal{F}_n$ 可测。令 $\tilde{\eta}_n = \eta_n - \mathbb{E}[\eta_n]$，$\xi_n = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\eta}_k$，则 $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$ 是鞅列。（由 iid R.V. 构造的鞅）。

证明：$\mathbb{E}[\xi_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\xi_n | \mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[\eta_{n+1} | \mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[\eta_{n+1}] | \mathcal{F}_n] = \xi_n + \mathbb{E}[\eta_{n+1}] - \mathbb{E}[\eta_{n+1}] = \xi_n$。

在另一个例子之前，我们先给一个新的定义。

Def 3. 有一带流的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$。若 A_n 是 $\mathcal{F}_n$ 可测的随机变量，则称 A_n 为可料随机序列。

Example 2. 设 $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$ 是鞅列。V_n 是 $\mathcal{F}_n$ 可料序列。定义 $\phi_n = V_0 \xi_0 + \sum_{k=1}^{n} V_k(\xi_k - \xi_{k-1})$。则 $(\phi_n, \mathcal{F}_n)$ 也是鞅列。（可料随机序列关于鞅的随机积分）。

递推：$\phi_{n+1} = V_n(\xi_{n+1} - \xi_n)$。$\mathbb{E}[\phi_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[V_n \xi_{n+1} | \mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[V_n \xi_n | \mathcal{F}_n] = (\mathbb{E}[\xi_{n+1} | \mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[\xi_n | \mathcal{F}_n]) V_n = 0$。

Example 3. （从任一随机过程构造鞅列）. 设 ξ_n 关于 $\mathcal{F}_n$ 适应. 令 $X_0=\xi_0$. 对于 $n\geq 1$. $X_n=\xi_n-\sum_{k=0}^{n-1}\left(E(\xi_{k+1}|\mathcal{F}_k)-\xi_k\right)$. 则 $(X_n,\mathcal{F}_n)$ 是鞅.

直观理解: $E(\xi_n|\mathcal{F}_{n-1})-\xi_n$ 是指: 用 n-1 时刻的信息预测 ξ_n 时, 比较"多出"的部分.
我们将预测 $\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n$ 时, 比较多出的部分从 ξ_n 中减去, 则会得到一个鞅.

证明: 写成递推:
$$X_{n+1}=\xi_{n+1}-\sum_{k=0}^{n}\left(E(\xi_{k+1}|\mathcal{F}_k)-\xi_k\right)$$
$$X_n=\xi_n-\sum_{k=0}^{n-1}\left(E(\xi_{k+1}|\mathcal{F}_k)-\xi_k\right)$$
$$X_{n+1}-X_n=\xi_{n+1}-\xi_n-E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n)+\xi_n=\xi_{n+1}-E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n)$$

Example 4. 倍投策略 (martingale betting strategy): 首次获胜立刻停止赌博. 若失败, 则赌注 ×2.
具体来说 $b_1(\xi_0)=1$. $b_2(\xi_0,-1)=2$. $b_2(\xi_0,1)=0$, $\cdots$ 显然由前面论证 ξ_n 是鞅.
可以注意到这一策略是必赢的. 记 $A_n=\{\eta_1=-1,\eta_2=-1,\cdots,\eta_n=1\}$. $P(\cup A_n)=\sum\frac{1}{2^n}=1$. 故赌徒以1的概率赚1元.

Example 5. 随机利率模型. 若银行利率的固定为r. 则第n天的存款与第0天的关系: $X_n=(1+r)^n X_0$, $X_0=(1+r)^{-n}X_n$. 若写成连续形式 $\Rightarrow$ $\frac{dX_t}{dt}=\sigma\cdot X_0$. $X_t=X_0\cdot\exp(\sigma t)$. $\sigma=\ln(1+r)$.
设有的随机利率序列 σ_n 是 $\mathcal{F}_n$ 适应的. 资金序列 ξ_n 也是 $\mathcal{F}_n$ 适应的. 且资金序列的增长满足: $E[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n]=\exp(\sigma_n)\xi_n$. 将n时刻的资金 ξ_n 在0时刻的折现值记为 $X_n=\exp[-(\sigma_0+\sigma_1+\cdots+\sigma_{n-1})]\cdot\xi_n$.
容易注意到 X_n 也是 $\mathcal{F}_n$ 适应的. 可证明 X_n 也是鞅列. （证明是平凡的）.

Example 6. 分支过程. 设有一些细胞, 其中的每个都会随机地分裂. 其中第n代第k个细胞分裂的个数 $\eta_{n,k}$ 对 $\forall n,k$ 独立同分布. 已知分裂个数的期望为 $E(\eta_{n,k})=\mu$.
将每代细胞的个数记为 $\xi_0=1$. $\xi_1=\eta_{0,1}$, $\cdots$ $\xi_n=\eta_{n-1,1}+\eta_{n-1,2}+\cdots+\eta_{n-1,\xi_{n-1}}$ 则 $(\frac{\xi_n}{\mu^n},\mathcal{F}_n)$ 是鞅.
$$E\left(\frac{\xi_{n+1}}{\mu^{n+1}}\Big|\mathcal{F}_n\right)=E\left(\frac{\eta_{n,1}+\eta_{n,2}+\cdots+\eta_{n,\xi_n}}{\mu^{n+1}}\Big|\mathcal{F}_n\right)=\frac{1}{\mu^{n+1}}E\left(\eta_{n,1}+\eta_{n,2}+\cdots+\eta_{n,k}\right)\Big|_{k=\xi_n}=\frac{k\cdot\mu}{\mu^{n+1}}\Big|_{k=\xi_n}=\frac{\xi_n}{\mu^n}.$$

Theorem 1. 一个之前一直使用的小结论.
设 ξ_n 是(上,下)鞅列. 换言之, 对于 $\forall n,m$ 有: $E(\xi_{n+m}|\mathcal{F}_n)=\xi_n$. $\overset{充分必要}{\Longleftrightarrow}$ $E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n)=\xi_n$.
正着推显然. 反着推. $E(\xi_{n+2}|\mathcal{F}_n)=E(E(\xi_{n+2}|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n)=E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n)=\xi_n$.

让我们来考虑不公平的赌博. 仍然沿用之前的模型: $\xi_n=\xi_0+\sum_{k=1}^{n}b_k(\xi_0;\eta_1\cdots\eta_{n-1})\cdot\eta_n$. 但假设赢的概率更大. 以至于 η_n 虽然仍 i.i.d. 但 $E(\eta_n)=\mu>0$.
显然可以发现. $(\xi_n,\mathcal{F}_n)$ 此时为下鞅列. 我们可以将它分解成一个鞅列（"公平赌博"的部分）和一个递增的可料随机序列（"必然赚钱"）的部分. 具体而言.
$$\xi_n=\underbrace{\left[\xi_0+\sum_{k=1}^{n}b_k(\xi_0,\cdots\xi_{k-1})\cdot(\eta_k-E(\eta_k))\right]}_{\mathcal{F}_n\text{适应的鞅列}}+\underbrace{\left[\sum_{k=1}^{n}\underbrace{b_k(\xi_0,\cdots\xi_{k-1})}_{\mathcal{F}_{n-1}\text{可测}}\overset{常数}{E(\eta_k)}\right]}_{\mathcal{F}_n\text{可料随机变量}}$$

我们自然要问: 这样的分解方式是否在任意下鞅列上成立? 答案是肯定的.

✿ Doob下鞅分解定理：设 $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$ 为下鞅列，则存在唯一 $\mathcal{F}_n$ 鞅列 M_n $(M_0=\xi_0)$ 和 $\mathcal{F}_n$ 可料递增随机序列 A_n $(A_0=0)$，使得：$\xi_n = M_n + A_n$.

它的证明可以构造性的证明：令 $\xi_{n+1}-\xi_n = [M_{n+1}-M_n] + [A_{n+1}-A_n]$.

$$M_{n+1}-M_n = \xi_{n+1} - \mathbb{E}[\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]$$

$$A_{n+1}-A_n = \mathbb{E}[\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] - \xi_n$$

(易见有 $\mathbb{E}[M_{n+1}-M_n \mid \mathcal{F}_n]=0$. $\Rightarrow \mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_n$)

由下鞅列的性质这一项 ≥ 0.

上面有用任意某适应过程构造鞅过程的例子. 实际上，任意某适应过程都可以拆成一个鞅过程和一个可料序列. 下面给出一些 Doob分解的例子.

Example 1. η_n 互相独立. $\mathbb{E}[\eta_n]\geq 0$. 记 $X_n=\sum_{k=1}^{n}\eta_k$ 则 $(X_n, \mathcal{F}_n)$ 为下鞅. 其 Doob分解为：

$$X_n = M_n + A_n = \sum_{k=1}^{n}(\eta_k - \mathbb{E}[\eta_k]) + \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(\eta_k).$$

Example 2. 分支过程的 Doob分解. 考虑分支过程. $\xi_0=1$, $\xi_n=\sum_{k=1}^{\xi_{n-1}}\eta_{n,k}$. 设 $\eta_{n,k}$ 独立同分布. 且 $\mathbb{E}(\eta_{n,k})=\mu$, $\mathrm{Var}(\eta_{n,k})=\sigma^2$. 记 $\Delta\xi_n=\xi_{n+1}-\xi_n$.
不妨计算差值 $\Delta\xi_n$ 的条件均值和方差.

$$\mathbb{E}[\Delta\xi_n \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{\xi_n}\eta_{n,k} - \xi_n \,\Big|\, \mathcal{F}_n\Big] = \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{m}\eta_{n,k} - m\Big]\Big|_{m=\xi_n} = \xi_n\cdot\mu - \xi_n = \xi_n(\mu-1).$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[\Delta\xi_n \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\big[(\Delta\xi_n - \mathbb{E}[\Delta\xi_n \mid \mathcal{F}_n])^2 \mid \mathcal{F}_n\big] \\ &= \mathbb{E}\big[(\Delta\xi_n - \xi_n(\mu-1))^2 \mid \mathcal{F}_n\big] \\ &= \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{m}\eta_{n,k} - m - (\mu-1)m\Big)^2\Big]\Big|_{m=\xi_n} = \sigma^2\xi_n^2.\end{aligned}$$

因此，这个模型可以直观理解为：若已知 n 时刻的信息. 则 n+1 时刻与 n 时刻的细胞数量差 $\Delta\xi_n$ 的(条件)均值正比于 ξ_n. 而条件方差正比于 ξ_n^2.

容易验证. 其 Doob 鞅分解可以写成以下形式：$\Delta\xi_n = (\mu-1)\xi_n + \sigma\sqrt{\xi_n}\cdot\dfrac{\Delta\xi_n-(\mu-1)\xi_n}{\sigma\cdot\sqrt{\xi_n}}$

$\Delta\xi_n - (\mu-1)\cdot\xi_n = \xi_{n+1} - \mu\xi_n$. $\quad \mathbb{E}[\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{\xi_n}\eta_{n,k} \,\Big|\, \mathcal{F}_n\Big] = \mu\cdot\xi_n$

或者写成：$\xi_{n+1}-\xi_0 = \sum_{k=1}^{n}\Delta\xi_k = (\mu-1)\cdot\sum_{k=1}^{k}\xi_k + \sigma\cdot\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\xi_k}\,\dfrac{\Delta\xi_k-(\mu-1)\xi_k}{\sigma\sqrt{\xi_k}}$

$\downarrow$

类似于SDE：$X_t - X_0 = \alpha\int_0^t X_s\,ds + \sigma\underline{\int_0^t \sqrt{X_s}\cdot \text{“}d\xi_s\text{”}}$ → 这一项还不清楚. 需要利用随机微积分来定义.

Example 3 Cox-Ross-Rubinstein Model (风险证券价格的二叉树模型).

设第n时刻的资金为 S_n, 则假若我们将之前基本赌博模型中的设置改成: $\xi_n = S_n$, $\eta_n = R>0$ (常数), $b_n(S_0, S_1, \dots, S_{n-1}) = S_{n-1}$.

则它可以描述我们存在银行中的钱随时间的变化. 即: $S_{n+1} = (1+R)\cdot S_n$.

类似, 假设一支风险证券的价格满足: $\xi_n = S_n$, $b_n(S_0, S_1, \dots, S_{n-1}) = S_{n-1}$ 且 $1+\eta_{n+1}$ 满足分布列

a	b
p	1-p

$(0<a<b,\ 0<p<1)$.

定义该证券的收益率为:

$$\frac{1}{S_n}\mathbb{E}[S_{n+1}-S_n \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\eta_{n+1}\mid\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\eta_{n+1}] = ap+b(1-p)\equiv\mu$$

以及这支证券的波动率为:

$$\frac{1}{S_n}Var[S_{n+1}-S_n\mid\mathcal{F}_n] = \sqrt{\mathbb{E}(\eta_{n+1}-\mathbb{E}\eta_{n+1})^2}\equiv\sigma$$

故这支证券价格的Doob分解可以写为: $S_{n+1}-S_n = (\mathbb{E}[\eta_{n+1}])S_n + (\eta_{n+1}-\mathbb{E}[\eta_{n+1}])S_n = \mu S_n + \sigma\cdot\frac{(\eta_{n+1}-\mu)}{\sigma}\cdot S_n$. 实际上这可以看作一个随机积分的离散版本.

什么时候买入风险证券的博弈是公平的? (换言之, 市场上是无套利机会的?) 记证券在第n时刻的"折现价格"为 $\tilde{S}_n = \frac{S_n}{(1+R)^n}$ 显然若 $\tilde{S}_n$ 为鞅, 则公平.

此时: $\tilde{S}_n = \mathbb{E}[\tilde{S}_{n+1}\mid\mathcal{F}_n] = \tilde{S}_n\mathbb{E}\left[\frac{\tilde{S}_{n+1}}{\tilde{S}_n}\mid\mathcal{F}_n\right] = \tilde{S}_n\mathbb{E}\left[\frac{1+\eta_{n+1}}{1+R}\mid\mathcal{F}_n\right] = \tilde{S}_n\mathbb{E}\left[\frac{1+\eta_{n+1}}{1+R}\right] \Rightarrow p = \frac{b-(1+R)}{b-a}$. 此时 $\mu = R$.

在赌博中, 我们通常需要选择何时退出. 这涉及停时的概念.

Def 4. 随机时间: 随机时间 τ 是从 $\Omega \to [0,+\infty)$ 的 R.V. 并且它是 $\mathcal{F}$ 可测的. 换言之, $\forall t\in[0,\infty)$, $\{\omega: \tau(\omega)<t\}\in\mathcal{F}$.

Def 5. 停时: 设 τ 是一个随机时间. 若 $\forall t\in T$, $\{\omega:\tau(\omega)<t\}\in\mathcal{F}_t$ (事件 $\tau<t$ 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的). 则称 τ 是 $\mathcal{F}_t$ 停时. 对离散情形, 我们以 $1_{\{t\}}(\tau)$ 代表 t 时刻是否为停时的指标随机变量, 则 $1_{\{\tau=n\}}(\tau)$ 也应为 $\mathcal{F}_n$ 可测的.

Def 6. 设 ξ_n 是 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 上随机序列. τ 是关于 $\mathcal{F}_t$ 的停时. 设 τ 几乎处处取有限值, 即 $P(\tau<+\infty)=1$. 定义 $(\xi_\tau)(\omega) = \xi_{\tau(\omega)}(\omega)$. 则 ξ_τ 为 Ω 上的 R.V.

给定ω, 会选一个下标, 从而挑出变量列中一个R.V.

给出这个R.V.的值.

称它为随机序列 (ξ_n) 在停时 τ 上的取值.

Theorem 2. 设 $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$ 为鞅. τ 为取有限值的 $(\mathcal{F}_n)$ 停时. 而且满足:

1). τ 是有界停时. 即存在M. $P(\omega: \tau(\omega)\le M) = 1$.

或一般地: 2). ξ_τ 期望有限. 且 $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(|\xi_n|\cdot 1_{(\tau>n)}) = 0$.

则: $\mathbb{E}[\xi_\tau] = \mathbb{E}[\xi_0]$. ⇒ 在一场公平赌博中, 不可以使用何种停时策略来增加你的财富期望.