DAY 5.

》再谈随机过程

之前我们似乎一直没有给"随机过程"下一个明确的定义。现在我们说：一个随机过程是定义在同一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的以 t 为指标集的随机变量族 $\{X_t, t\in T\}$。

对于 $\forall t\in T$，X_t 所取值的范围被称作"状态空间"。显然，随机过程可以看作一个 $T\times\Omega\to S$ 的映射。

在 $t\in T$ 固定时，$X(t,\cdot)$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的随机变量；而当 $\omega\in\Omega$ 固定时，$X(\cdot,\omega)$ 则是 $T\to S$ 的函数。

接下来用一个简单的例子介绍所谓"事件域流"。考虑一个掷3次硬币的过程，它的样本空间显然是 $\Omega=\{0,1\}^3$。对于这一个样本空间，我们可以定义不同的 σ-代数。众所周知，不同的 σ-代数里面装着不同的事件。而在不同的时间点上，我们可以利用当前已知的信息推断不同 σ-代数中的事件是否发生。

简单的例子：抛硬币。假定我们只抛三次硬币。

在未抛时，我们只可推断 $\mathcal{F}_0=\{\Omega,\phi\}$。

在抛一次时，可推断 $\mathcal{F}_1=\{\Omega,\phi,(H,\cdot,\cdot),(T,\cdot,\cdot)\}$

同理有 $\mathcal{F}_2=\{\Omega,\phi,(H,\cdot,\cdot),(T,\cdot,\cdot),(\cdot,H,\cdot),(\cdot,T,\cdot),(H,T,\cdot),(T,H,\cdot),(H,H,\cdot),(T,T,\cdot)\}$

这一系列的 σ-代数有性质：在 $t_1<t_2$ 时，总有 $\mathcal{F}_{t_1}\subset\mathcal{F}_{t_2}$。定义最初的"大" σ-代数为 $\mathcal{F}:=\mathcal{F}_\infty:=$ 包含 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n$ 的最小 σ-代数。

这意味着后面的 σ-域比前面的更"细"，包含的信息也更多。　　　这是包含信息最多的 σ-域。

$\mathcal{F}_t$ 被称为"σ-代数流"、"事件域流"或"滤流"。在研究随机过程时，我们通常研究一个带有滤流的概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\},\mathbb{P})$。

》对布朗运动的进一步研究

下面继续研究布朗运动的性质。首先，取布朗运动的传播子 $K(s,x,t,dy)=\mathbb{P}(X(t)\in[y,y+dy]\mid X(s)=x)$

那么，根据之前对于布朗运动的定义，我们显然有：

$$\lim_{t-s\to 0}\frac{1}{t-s}\int(y-x)\cdot K(s,x,t,dy)=0.\quad (\text{布朗运动没有漂移}).\longrightarrow = b(s,x).\quad (\text{一阶矩的增长速率为}b).$$

$$\lim_{t-s\to 0}\frac{1}{t-s}\int(y-x)^2\cdot K(s,x,t,dy)=\sigma^2\quad (\text{正态分布的方差}).\longrightarrow = \sigma^2(s,x).\quad (\text{二阶矩的增长速率为}\sigma^2).$$

实际上，有一些随机过程被称为"扩散"，它们有比布朗运动更广泛的定义。

以及 $\lim_{t-s\to 0}\frac{1}{t-s}\mathbb{P}(|X(t)-x|>\varepsilon\mid X_s=x)=0,\ \forall\varepsilon>0.$

(在无穷小的时间之内几乎不动)。

现在我们要说明：一个扩散过程可以与一个偏微分方程相联系。我们来导出扩散过程的 Kolmogorov 后向方程。

设我们有一个扩散 X_t，有一函数 $f\in C_b(\mathbb{R})$，作为对 X_t 的一个"观测"函数。对于某固定时刻 t，我们将其期望记为：

$$-\frac{\partial u(s,x)}{\partial s} = b(s,x)\cdot\frac{\partial u(s,x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\cdot\sigma^2(s,x)\cdot\frac{\partial^2 u(s,x)}{\partial x^2}$$

证明：对于 $s < s+\Delta < t$，方程左侧是：

"寻找"了中间时刻节点 $s+\Delta$，遍历所有可能路径。

$$\frac{u(s,x)-u(s+\Delta,x)}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\left\{\int u(s+\Delta,y)\cdot K(s,x,s+\Delta,dy) - u(s+\Delta,x)\right\}$$

$$=\frac{1}{\Delta}\left\{\int [u(s+\Delta,y)-u(s+\Delta,x)]\cdot K(s,x,s+\Delta,dy)\right\}$$

$$=\frac{1}{\Delta}\left\{\underbrace{\int_{|x-y|<\varepsilon}[u(s+\Delta,y)-u(s+\Delta,x)]\,K(s,x,s+\Delta,dy)}_{\downarrow\ \text{对前面这一部分做Taylor展开}} + \int_{|x-y|\geq\varepsilon}[u(s+\Delta,y)-u(s+\Delta,x)]\,K(s,x,s+\Delta,dy)\right\}$$

$$=\frac{\partial u(s+\Delta,x)}{\partial x}(y-x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(s+\Delta,x)}{\partial x^2}(y-x)^2 + \text{高阶项}$$

我们令 $\Delta\to 0$，则右边 $\mathrm{I}\to b(x,s)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$，$\mathrm{II}\to\frac{1}{2}\sigma^2(x,s)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，从而立刻得到结论

进一步，若转移核可以这样写成：$K(s,x,t,dy) = p(s,x,t,y)\,dy$，则代入后向方程，立刻得到：

$$-\frac{\partial}{\partial s}\left[\int f(y)\cdot p(s,x,t,y)\,dy\right] = b(s,x)\frac{\partial}{\partial x}\left[\int f(y)\cdot p(s,x,t,y)\,dy\right]+\frac{1}{2}\sigma^2(s,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\int f(y)\cdot p(s,x,t,y)\,dy\right]$$

$$\Rightarrow -\int f(y)\,dy\,\frac{\partial p}{\partial s} = \int f(y)\,dy\cdot\left[b\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\sigma^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right]$$

从而由 $f(y)$ 的任意性，得到转移核满足的方程：$-\frac{\partial p}{\partial s} = b\,\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}\cdot\sigma^2\,\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$

由于 $p(s,x,t,y)$ 是关于初始 x,s 的函数，故应给出终值条件 $p(t,x,t,y)=\delta(x-y)$。

另一方面，我们将结尾时间 t 定死了，研究某个函数 $f(x)$ 的期望随着开始时间 s 和初始位置 x 的变化。一种自然的想法是，将开始固定而研究结尾，换言之，期望 $\mathbb{E}[f(X_t)\mid X(s)=x]$ 与 t 和 X_t 有何关系？

我们计算：

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}[f(X_t)\mid X_s=x] \approx \frac{1}{\Delta}\left\{\mathbb{E}[f(X_{t+\Delta})-f(X_t)\mid X_s=x]\right\}$$

研究期望对于结尾时刻的导数

即期望的演化。

内层将 X_t 时刻的值限制住，在外层遍历 X_t 时刻所有可能位置。

$$=\frac{1}{\Delta}\left\{\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[f(X_{t+\Delta})-f(X_t)\mid X_t=y]\,\middle|\,X_s=x\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{\Delta}\left\{\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\frac{\partial f(y)}{\partial y}(X_{t+\Delta}-y)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2}(X_{t+\Delta}-y)^2\,\middle|\,X_t=y\right]\middle|\,X_s=x\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{\Delta}\left\{\mathbb{E}\left[\int\frac{\partial f(y)}{\partial y}(X_{t+\Delta}-y)\cdot K(t,y,t+\Delta,dX_{t+\Delta}) + \frac{1}{2}\int\frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2}(X_{t+\Delta}-y)^2\cdot K(t,y,t+\Delta,X_{t+\Delta})\,\middle|\,X_s=x\right]\right\}$$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{\partial f(y)}{\partial y} b(t,y) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} \sigma^2(t,y) \,\middle|\, X_s = x \right]_{(y=X_t)}$$

从而我们得到结论: $\frac{d}{dt} \mathbb{E}[f(X_t) \mid X_s = x] = \mathbb{E}\left[\frac{\partial f(X_t)}{\partial X_t} b(t,X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(X_t)}{\partial X_t^2} \sigma^2(t,X_t) \,\middle|\, X_s = x \right]$.

这个形式比较难用. 我们把它写开: 设传播子 $K(s,x,t,dy) = p(s,x,t,y)dy$.

→ t, y是两个相互独立指标. $\frac{\partial}{\partial t}$、$\frac{\partial}{\partial t}$. $\frac{d}{dy}$ 之间可交换.

$$\Rightarrow \int f(y) \cdot \frac{\partial p(s,x,t,y)}{\partial t} dy = \int p(s,x,t,y) \cdot \left[b(t,y) \cdot \frac{\partial f(y)}{\partial y} + \sigma^2(t,y) \cdot \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} \right].$$

由分部积分消去 $f(y)$ $= \int f(y)\, dy \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma^2(t,y) p(s,x,t,y)) - \frac{\partial}{\partial y} (b(t,y) \cdot p(s,x,t,y)) \right]$

由 $f(y)$ 的任意性得: $\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} b + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma^2 \cdot p^2)$. 这正是所谓fokker-planck方程! 它给出了扩散过程中传播子随时间的演化.