DAY4

下面我们考虑连续时间、可数状态的马氏链。最简单的情形称为泊松过程。

若随机过程 $X(t)$ 满足.

1). $X(0)=0$.

2). 独立增量. $X(t_2)-X(t_1)$. $X(t_3)-X(t_2)$, ... 是独立的.

3). 平稳增量/时齐性. $X(t+s)-X(t)$ 的分布与 t 无关

4). 对于任意 $t\geq 0$, $h>0$ 有:

$$\mathbb{P}(X(t+h)=X(t)+1 \mid X(t)) = \lambda h+o(h).$$

$$\mathbb{P}(X(t+h)=X(t) \mid X(t)) = 1-\lambda h+o(h).$$

$$\mathbb{P}(X(t+h)\geq X(t)+2) = o(h).$$

我们可以具体地计算 $X(t)$ 的分布. 为书写简便, 记 $p_m(t)=\mathbb{P}(X(t)=m)$.

$$p_0(t+h)=\mathbb{P}([0,t+h] \text{ 内无增量})$$

$$(\text{独立增量}) = \mathbb{P}([0,t] \text{ 内无增量})\,\mathbb{P}([t,t+h] \text{ 内无增量}) \overset{(\text{平稳})}{=} p_0(t)\cdot p_0(h)$$

$$= p_0(t)\cdot(1-\lambda h)+o(h)$$

$$\Rightarrow \frac{p_0(t+h)-p_0(t)}{h} = -\lambda p_0(t) \overset{h\to 0}{\Rightarrow} \frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t),\ \text{初始 } p_0(0)=1 \Rightarrow p_0(t)=\exp(-\lambda t).$$

从而可以进行递推. : $p_m(t+h)=p_m(t)(1-\lambda h)+p_{m-1}(t)\cdot\lambda h+o(h) \Rightarrow \dfrac{dp_m(t)}{dt} = -\lambda p_m(t)+\lambda\cdot p_{m-1}(t)$.

下证 $p_m(t)=\dfrac{(\lambda t)^m}{m!}\exp(-\lambda t)$. 满足上面微分方程 (直接代入).

$$\frac{dp_m(t)}{dt} = \frac{m(\lambda t)^{m-1}\cdot\lambda}{m!}\exp(-\lambda t)-\lambda\frac{(\lambda t)^m}{m!}\exp(-\lambda t) = \underbrace{\frac{(\lambda t)^{m-1}}{(m-1)!}\cdot\lambda\exp(-\lambda t)}_{\lambda\cdot p_{m-1}(t)} - \underbrace{\frac{(\lambda t)^m}{m!}\lambda\exp(-\lambda t)}_{-\lambda\cdot p_m(t)}.$$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X(t))$ 的分布服从参数为 λ 的泊松分布!

泊松过程的等待时间: $\mathbb{P}(\mu\geq t+h) = \mathbb{P}(\mu\geq t)\cdot\mathbb{P}([t,t+h] \text{ 内无增量})$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\mu\geq t+h) = \mathbb{P}(\mu\geq t)\cdot(1-\lambda h) \Rightarrow \mathbb{P}(\mu\geq t)=\exp(-\lambda t).$$

现在我们考虑一般情形下的连续时间马氏链。为了简单起见，我们仅考虑有限状态的情形 $\Rightarrow p_{ij}(t)=\mathbb{P}(X(t+s)=j \mid X(s)=i)$。这里，我们已假设了马氏链的平稳性。显然我们有 $p_{ij}(t)\ge 0$，$\sum_j p_{ij}(t)=1$。

而且我们假设，在微小时间从 i 态转向 j 态的概率正比于 λ_{ij} $\Rightarrow$ $p_{ij}(h)=\lambda_{ij}h+o(h)$。自然地，$p_{ii}(h)=1-\lambda_i h+o(h)$，$\lambda_i=\sum_{j,i\neq j}\lambda_{ij}$

下面介绍 C-K 方程。它体现了马氏性质。对于离散马氏链有：

$$\mathbb{P}(S_{n+m}=j, S_n=k \mid S_0=i) = \mathbb{P}(S_{n+m}=j \mid S_n=k, S_0=i)\cdot\mathbb{P}(S_n=k\mid S_0=i) = \mathbb{P}(S_{n+m}=j\mid S_n=k)\cdot\mathbb{P}(S_n=k\mid S_0=i) = P_{kj}^{m}P_{ik}^{n}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(S_{n+m}=j\mid S_0=i) = \sum_k P_{kj}^{m}P_{ik}^{n}.$$

对于连续时间马氏链，自然类似得到：$p_{ij}(t+s)=\sum_k p_{ik}(t)\cdot p_{kj}(s)$
$=\sum_k p_{ik}(s)\cdot p_{kj}(t)$。使用矩阵，它可以被表示为更加紧凑的形式：$p(t+s)=p(t)\cdot p(s)=p(s)\cdot p(t)$，$\Rightarrow [p(t),p(s)]=0$，$\forall t,s$

现在我们来定义连续时间离散状态马氏链的生成元：令 $Q=\lim_{h\to 0^+}\frac{p(h)-I}{h}$，容易注意到 Q 的矩阵元为：$q_{ii}=-\lambda_i$，$q_{ij}=\lambda_{ij}$。我们可以给出 p 满足的微分方程：

由于 $\frac{p(t+h)-p(t)}{h}=\frac{p(h)-I}{h}\cdot p(t)=p(t)\cdot\frac{p(h)-I}{h}$，在 $h\to 0$ 时：$\frac{dp(t)}{dt}=Q\cdot p(t)=p(t)\cdot Q$。从而其解为：$p(t)=\exp(Qt)\cdot p(0)=\exp(Qt)$

我们现在可以讨论马氏链各态上的概率分布随 t 的演化。设分布为 $r(t)$。

$$\Rightarrow r_j(t+dt)=\underbrace{\sum_{i\neq j} r_i(t)\cdot p_{ij}(dt)}_{\text{从i态在dt内转到j态}}+\underbrace{r_j(t)\cdot p_{jj}(dt)}_{\text{在dt内留在j态}}=\sum_{i\neq j} r_i(t)\, q_{ij}\,dt+r_j(t)(1+q_{jj}dt)+o(dt).$$

$$\Rightarrow \frac{r_j(t+dt)-r_j(t)}{dt}=\frac{dr_j(t)}{dt}=\sum_i r_i(t)\cdot q_{ij}(t).$$ 写成更紧凑的形式就是：$r(t)=r(0)\cdot\exp(Qt)$。

我们可以定义系统在状态 j 的停留时间分布。记 $\mu_j(t)=\mathbb{P}(\mu_j\ge t)$。从而我们有：$\mu_j(t+h)=\mathbb{P}(\mu_j\ge t)\cdot\mathbb{P}([t,t+h)$ 内不发生转移$)=\mathbb{P}(\mu_j\ge t)\cdot(1-q_{jj}h)$。从而有关于 $\mu_j(t)$ 的微分方程：$\frac{d\mu_j(t)}{dt}=q_{jj}\,\mu_j(t)$ $\Rightarrow \mu_j(t)=\exp(q_{jj}t)$。

下面研究如下分布：$p(\theta,j\mid 0,i)\,d\theta=\mathbb{P}($给定0时刻状态为 i，在 $[\theta,\theta+d\theta)$ 时刻发生第一次跳转且恰跳至态 $j)$。

$=\mathbb{P}([0,\theta)$ 内处于 i 态未跳转$)\cdot\mathbb{P}([\theta,\theta+d\theta)$ 内跳至 $j)$，$=\mu_i(\theta)\cdot q_{ij}\,d\theta=\exp(q_{ii}\theta)\, q_{ij}\,d\theta$

从而，$p(\theta,j\mid 0,i)=\exp(q_{ii}\theta)\,q_{ij}$。给一个边缘分布：$p(j\mid 0,i)=\int_0^\infty \exp(q_{ii}\theta)\cdot q_{ij}\,d\theta=-\frac{q_{ij}}{q_{ii}}=\frac{q_{ij}}{\sum_{j\neq i} q_{ij}}$

从而你可以将最初的 Q-process 拆成两部分：指数分布的等待时间和一个离散时间链。

显然，由于 $\frac{dr(t)}{dt}=r(t)Q$，$\Rightarrow \pi\cdot Q=0$ 的分布为平稳分布。

下面我们介绍相当重要的一个随机过程：布朗运动。首先我们要说明，布朗运动是一维对称随机游走的极限情形。考虑步长为1的对称随机游走

$$\mathbb{P}(X_N=m)=C_N^{\frac{N+m}{2}}=\frac{N!}{(\frac{N+m}{2})!\,(\frac{N-m}{2})!}\left(\frac{1}{2}\right)^N$$ 利用 $\log n!=(n+\frac{1}{2})\log n-n+\frac{1}{2}\log 2\pi+O(n^{-1})$。（Stirling 近似）

可以推出 $$\log\mathbb{P}(X_N=m)=(N+\tfrac{1}{2})\log N-\cancel{N}-\left(\frac{N+m}{2}+\frac{1}{2}\right)\log\frac{N+m}{2}-\left(\frac{N-m}{2}+\frac{1}{2}\right)\log\frac{N-m}{2}+\cancel{\frac{N+m}{2}}+\cancel{\frac{N-m}{2}}-N\log 2-\frac{1}{2}\log 2\pi$$

$$=(N+\tfrac{1}{2})\log N-\frac{N+m+1}{2}\log\frac{N}{2}\left(1+\frac{m}{N}\right)-\frac{N-m+1}{2}\log\frac{N}{2}\left(1-\frac{m}{N}\right)-\frac{1}{2}\log 2\pi-N\log 2.$$

不精确地，我们只考虑 $m \ll N$ 的情形。利用 $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$（Taylor 展开）。来近似上式得到

$$\log \mathbb{P}(X_N = m) = \left(N+\tfrac{1}{2}\right)\log N - \frac{N}{2}\left(1+\frac{m+1}{N}\right)\cdot\left(\log\frac{N}{2} + \frac{m}{N} - \frac{1}{2}\frac{m^2}{N^2}\right) - \frac{N}{2}\left(1+\frac{1-m}{N}\right)\left(\log\frac{N}{2} - \frac{m}{N} - \frac{1}{2}\frac{m^2}{N^2}\right) - \frac{1}{2}\log 2\pi - N\log 2.$$

$$\approx -\frac{1}{2}\log N + \log 2 - \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{m^2}{2N}.$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X_N = m) \approx \left(\frac{2}{\pi N}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{m^2}{2N}\right).$$

现在令 $N, m \to +\infty$.（为使得上式成立，我们需要令 $m \ll N$ 仍成立。令 $N\tau = t$. $m\ell = x$. t, x 为有限量，则 $\tau \to 0$. $\ell \to 0$.

考虑 $\mathbb{P}(X(t) = x)\cdot \Delta x = \sum\limits_{k\ell \in (x-\frac{\Delta x}{2}, x+\frac{\Delta x}{2})} \mathbb{P}(X_N = k) \approx \mathbb{P}(X_N = m)\cdot\frac{\Delta x}{\ell}\cdot\frac{1}{2}$

对任意 k 只可隔 2 取。
换言之，k 只可奇/偶其一

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X(t) = x)\cdot\Delta x \approx \frac{\Delta x}{\ell}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi\cdot\frac{t}{\tau}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{2\cdot\frac{t}{\tau}\ell^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{t}{\tau}\ell^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\frac{t}{\tau}\cdot\ell^2}\right)\Delta x.$$

不妨记 $D = \frac{1}{2}\frac{\ell^2}{\tau}$. 则 $\mathbb{P}(X(t) = x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$. 容易验证，这个分布满足所谓"一维扩散方程"。$\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \mathbb{P}}{\partial x^2}$. $\mathbb{P}(X(0) = x) = \delta(x)$.

下面我们要给出布朗运动的一些正式定义，其中定义 a) 是我们刚才看到的。称随机过程 $B(t)$ 是布朗运动，若：

a) $B(0) = 0$. 独立增量，且增量服从高斯分布 $B(t) - B(s) \sim N(0, \sigma^2(t-s))$. 有连续样本轨道。

b). $B(0) = 0$. 高斯过程。$\mathbb{E}(B(t)) = 0$. $\mathbb{E}(B(t)\cdot B(s)) = \sigma^2\min(t, s)$. 连续轨道

c). $B(0) = 0$. $\mathbb{E}(B(t)) = 0$. 平稳独立增量 $\mathbb{E}(B(t)\cdot B(s)) = \sigma^2\min(t, s)$. 连续轨道。

下面给出布朗运动的一些重要性质：记 $M(t)$ 为至 t 为止，布朗运动达到的最大值，即 $M(t) = \max\limits_{0\le s\le t} B(s)$. 我们希望给 $M(t)$ 的分布，我们先换一个角度来想想。

定义 T_x 为布朗运动第一次"击中" x 处的时间，即 $T_x = \min\limits_s [B(s) = x]$ 一个等价关系：$M(t) > x \Leftrightarrow T_x < t$. 从而我们有：$\mathbb{P}(M(t) > x) = \mathbb{P}(T_x < t)$.

从而我们将对最大值分布的计算转化成了对击中时间分布的计算。考虑：$\mathbb{P}(B(t) > x) = \mathbb{P}(B(t) > x \mid T_x < t)\mathbb{P}(T_x < t) + \mathbb{P}(B(t) > x \mid T_x > t)\mathbb{P}(T_x > t) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(T_x < t)$.

$\Rightarrow \mathbb{P}(M(t) > x) = \mathbb{P}(T_x < t) = 2\mathbb{P}(B(t) > x)$. 我们一石二鸟地解决了两个问题！

布朗运动的另一个奇特性质是所谓二次变差。考虑一个标准布朗运动 $B(t) \sim N(0, t)$. 则有 $\mathbb{E}(B^2(t)) = t$. 我们将给出 $[0, t]$ 的一个划分 $[0, \frac{t}{n}, \frac{2t}{n}, \cdots, \frac{(n-1)t}{n}, t]$. 从而布朗运动有 n 个增量 $\Delta B_k = B(\frac{k}{n}t) - B(\frac{k-1}{n}t)$. 我们现在希望证明以下收敛性质：$\sum\limits_{i=1}^{n}(\Delta B_i)^2 \to t$. 这个收敛是均方收敛

这里，我们暂且通过直接计算的方式证明。要证明均方收敛，那么我们算个二阶矩：

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta B_i^2 - t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta B_i^2 - \frac{t}{n}\right)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta B_i^2 - \frac{t}{n}\right)\sum_{j=1}^{n}\left(\Delta B_j^2 - \frac{t}{n}\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta B_i^2 - \frac{t}{n}\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{i\neq j}\left(\Delta B_i^2 - \frac{t}{n}\right)\left(\Delta B_j^2 - \frac{t}{n}\right)\right]$$

利用两个括号内的独立性（独立增量），和 $\mathbb{E}(\Delta B_i)^2 = \frac{t}{n}$，易知此项为0.

$$= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\Delta B_i^4\right] - 2\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\Delta B_i^2\left(\frac{t}{n}\right)\right] + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t}{n}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\Delta B_i^4\right] - 2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t}{n}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t}{n}\right)^2$$

（利用一个小结论：若 $X\sim N(0,1)$，则 $\mathbb{E}(X^4) = 3$）。现在，$\Delta B_i \sim N(0,\frac{t}{n})$，则 $\mathbb{E}(\Delta B_i^4) = 3\left(\frac{t}{n}\right)^2$

故上式 $\longrightarrow 2\frac{t^2}{n} \to 0$。这说明一个重要事实：$\Delta B^2 \sim \Delta t$ $\Rightarrow \Delta B \sim \sqrt{\Delta t}$。这会带来什么？

考虑 $g(t, B(t))$，我们要求它对时间的一阶导。

$$\Rightarrow dg = \frac{\partial g}{\partial t}\cdot dt + \frac{\partial g}{\partial B}\cdot dB + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial B^2}\cdot dt = \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial B^2}\right)dt + \frac{\partial g}{\partial B}dB.$$

这一结果最重要的应用是获诺贝尔经济学奖的 Black—Scholes—Merton 方程，这是一个衍生品定价模型。设某股票的价格可用带漂移的指数布朗运动建模：$S(t) = \exp(\mu t + B(t))$。设我有一种金融衍生品（期货，期权等），其价格为 $V = V(t, S(t))$。为了试图消除资产组合中的不确定性，我们采取下述对冲策略：做多一份衍生品，做空 α 份股票。

$$dS = \frac{\partial S}{\partial t}\cdot dt + \frac{\partial S}{\partial B}\cdot dB + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial B^2}\cdot dt = S\cdot\left(\mu dt + dB + \frac{1}{2}dt\right)$$

$$dS^2 = S^2\left[\left(\mu+\tfrac{1}{2}\right)dt + dB\right]^2 = S^2\left[\left(\mu+\tfrac{1}{2}\right)^2(dt)^2 + 2\left(\mu+\tfrac{1}{2}\right)dt\cdot dB + (dB)^2\right] = S^2\,dt.$$

投资组合的价值 $p(t) = V(t, S(t)) - \alpha S(t)$

$$\Rightarrow dp(t) = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dS)^2 - \alpha\, dS = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}S^2\right)dt + \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \alpha\right)dS$$

我们要对冲掉不确定性 $\Rightarrow$ 应做空 $\alpha = \frac{\partial V}{\partial S}$ 份股票。同时由有效市场假说，自由高效的市场不会存在套利机会，设银行存款利率为 r。

$$\Rightarrow dp(t) = r(V - \alpha S)\,dt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

这就是大名鼎鼎的 BSM 模型！