Day 41 - 47

Ch 8. 二级相变与平均场理论

考虑一个晶格，用 i 标记其上格点，在 i 上有自旋变量 σ_i，只可取两个分立值，$H=-J\sum_{\langle ij\rangle}\sigma_i\sigma_j$，$\langle ij\rangle$ 表示对全部近邻对求和。若 $J>0$，则临近的自旋倾向平行，否则反之。

该模型可用于研究铁磁相变的性质 → 要有一个临界温度。 * 可严格证明一维 Ising 模型不可能在任何非零温度形成铁磁相。

或考虑加了外磁场 h 的能量：$H=-J\sum_{\langle ij\rangle}\sigma_i\sigma_j-\sum_i\sigma_i h$。 或者有的模型允许自旋连续取值：$H=-J\sum_{\langle ij\rangle}\vec{s}_i\cdot\vec{s}_j-\sum_i s_i^x h$ $(s.t.\ s_{ix}^2+s_{iy}^2+s_{iz}^2=1)$

这不是近独立子系统，故必须用普遍的系综理论。(近独立子系：粒子间无相互作用 $E=\sum_i a_i\varepsilon_i$)。

$$Z=\sum_{\{\sigma\}}\exp(-\beta H[\sigma_i])$$

常用方法：1). 平均场：将其他自旋对某一特定自旋的影响用一常数代替，从而使各个自旋互相独立。但对于一些低维问题会得到错误结论，只有在 $d\to+\infty$ 时才是严格的。

2). 高温展开。 3). 重整化群 4). Monte Carlo.

先看平均场：$H=-J\sum_{\langle ij\rangle}\sigma_i\sigma_j-\sum_i\sigma_i h$。 对于某个自旋 σ_i，与它有关的项：$-\sigma_i(h+J\sum_{\langle ij\rangle}\sigma_j)$。 → 除外场外，还感受到一个"附加磁场"。 设晶格配位数 q，则有效平均场记为：$h_{eff}=\langle J\sum_{j,\langle ij\rangle}\sigma_j\rangle=qJ\langle\sigma_j\rangle$。

从而将此时的能量写作：$H^{(MF)}=-\sum_i\sigma_i(h+h_{eff})$。 从而此时每个粒子均独立，可以求配分。

$$\Rightarrow Z=\sum_{\{\sigma_i\}}\underbrace{\exp(\beta(h+h_{eff})\textstyle\sum_i\sigma_i)}_{N\text{个粒子},N\text{项}}=\prod_N\exp(\beta(h+h_{eff})\textstyle\sum_i\sigma_i)=\left(2\cosh[\beta(h+h_{eff})]\right)^N$$

从而 $\langle\sigma_i\rangle=\sum_i\sum_{\sigma_i=+1,-1}\sigma_i\frac{1}{Z}\exp(-\beta(h+h_{eff})\sigma_i)=\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial h}\ln Z=\tanh[\beta(h+h_{eff})]$

这还给出一个自洽方程：$h_{eff}=qJ\tanh[\beta(h+h_{eff})]$。

这个模型在什么时候发生铁磁相变？ ⇒ 可以从自洽性条件入手。 ⇒ $h=qJ\tanh(\beta h)$ ⇒ $h=qJ(\beta h-\frac{1}{3}\beta^3h^3)$。 在 $T_c<\frac{qJ}{k_B}$ 时，有铁磁态，而 $T_c>\frac{qJ}{k_B}$ 则没有。

求出解：$m=\langle\sigma_i\rangle=\sqrt{3}(1-T/T_c)^{1/2}\sim(T_c-T)^{1/2}$ ⇒ 临界指数 1/2。

还可以使用类似手段给出其他临界指数：e.g. 磁化率 $\chi_T=\left(\frac{\partial m}{\partial h}\right)_{T,h=0}$。 $m=\tanh[\beta(h+Jqm)]\sim\beta(h+Jqm)$ ⇒ $m=\frac{h}{k_B(T-T_c)}\sim(T-T_c)^{-1}$

e.g. 在临界 T_c 处 m 与外场的依赖。 $m=\tanh(m+\beta h)\approx(m+\beta h)+\frac{1}{3}(m+\beta h)^3$ ⇒ $m\sim h^{1/3}$。

总之思路一样，从自洽方程出发，做一些近似，然后把各个指数解出来。

下面介绍一个与平均场等效的近似理论。(Bragg-Williams 近似)。 设各个格点上自旋 i.i.d.，都可写为 $P_\pm=\frac{1}{2}(1\pm m)$。 ⇒ $m=\mathbb{E}[\sigma_i]=m$。 $\mathbb{E}[\sigma_i\sigma_j]=\mathbb{E}[\sigma_i]\mathbb{E}[\sigma_j]=m^2$。

我们要利用 Helmholtz FE 来讨论 ⇒ $\mathbb{E}[H]=-\frac{1}{2}JNqm^2-Nmh$。 $S=Nk_B\left(\frac{1+m}{2}\ln\cdot+\frac{1-m}{2}\ln\cdot\right)$。 ⇒ $-\frac{\partial(F/N)}{\partial m}=-qJm-h+\frac{k_BT}{2}\cdot\ln\left(\frac{1+m}{1-m}\right)=0$ ⇒ $m=\tanh[\beta(qJm+h)]$

所以可看到它和平均场理论等效。 另外，在 $h\to0$、$m\to0$ 时，它的自由能可以展开成 m (序参量) 的幂级数，并且各系数的正负与前面唯象理论一致。 ⇒ 朗道相变与平均场等价

下面用唯象理论讨论涨落 (系统中序参量不均匀)。 假设以下泛函形式：

$$F[m(\vec{r})]=\int d^3\vec{r}\left[f_0(T)+\frac{a(T)}{2}m^2(\vec{r})+\frac{d(T)}{2}(\nabla m(\vec{r}))^2+\frac{b(T)}{4}m^4(\vec{r})\right]$$

均匀系统，$T<T_c$，$\bar{m}^2=-a(T)/b(T)$。

令涨落表示为：$m(\vec{r})=\bar{m}+\delta m(\vec{r})$。 一个重要物理量是关联函数，也即两点处序参量的协方差。 $C(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=\mathbb{E}[m(\vec{r}_1)-\mathbb{E}[m(\vec{r}_1)]]\,\mathbb{E}[\qquad]$。

接下来，我们只关注一类"宽平稳"(随机过程中的概念)．或具有"平移不变性"的系统．有两个要求：1). $\forall r_1, r_2$ $\mathbb{E}[m(\vec{r}_1)] = \mathbb{E}[m(\vec{r}_2)] = \bar{m}$． 2). $\forall r_1, r_2$． $\mathbb{E}[\quad]\,\mathbb{E}[\quad] = C(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$．

一种处理方式：将 $\delta m(\vec{r}) = m(\vec{r}) - \bar{m}$ 展开成级数：$\delta m(\vec{r}) = m(\vec{r}) - \bar{m} = \frac{1}{V} \sum_k \overset{\text{随机的变量}}{\tilde{m}_k} \cdot \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})$

其逆变换：$\int d^3\vec{r}\, \delta m(\vec{r}) \exp(-i\vec{p}\cdot\vec{r}) = \sum_k \tilde{m}_k \cdot \frac{1}{V}\int \exp(i(\vec{k}-\vec{p})\cdot\vec{r})\, d^3\vec{r} = \tilde{m}_p$ $\Rightarrow \{\tilde{m}_k\}$ 和 $\delta m(\vec{r})$ 是完全等价的．

由于关联函数是实的 $\Rightarrow \mathrm{Im}(\tilde{m}_k \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})) = \mathrm{Im}(\tilde{m}_{-k}\cdot\exp(i\,{-\vec{k}}\cdot\vec{r}))$． $\Rightarrow \tilde{m}_k = \tilde{m}^*_{-k}$． 用展开的 δm 重写关联函数，

$C(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{V^2} \sum_{k_1} \sum_{k_2} \mathbb{E}[\tilde{m}_{k_1}] \exp(i\vec{k}_1\cdot\vec{r})\,\mathbb{E}[\tilde{m}_{k_2}]\cdot\exp(i\vec{k}_2\cdot\vec{r})$ ，令 $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$，并 [认为 $\tilde{m}_{k_1}$，$\tilde{m}_{k_2}$ 在 $k_1 \neq k_2$ 时独立]． → 这实际上是宽平稳随机过程的 K-L 展开．

$= \frac{1}{V^2} \cdot \sum_{k_1 k_2} \mathbb{E}[\tilde{m}_{k_1}\ \tilde{m}_{k_2}]\cdot \exp(i\cdot\vec{k}\cdot\vec{r} + i(\vec{k}_1+\vec{k}_2)\cdot\vec{r}_2)$．

由于宽平稳的，不依赖于起点 $\vec{r}_2$ 的．所以我们将起点积掉．

$C(\vec{r}) = \frac{1}{V}\cdot\int d^3\vec{r}_2\, C(\vec{r}, \vec{r}_2) = \frac{1}{V^2}\int \sum_{k_1, k_2} \frac{1}{V}\cdot \mathbb{E}[\tilde{m}_{k_1}\ \tilde{m}_{k_2}]\cdot\exp(i\cdot k_1\cdot\vec{r})\cdot\exp(i(k_1+k_2)\vec{r}_2)\cdot\exp(0)\cdot d^3\vec{r}_2 = \frac{1}{V^2}\cdot\sum_{k_1 k_2} \mathbb{E}[\quad]\cdot\exp(i\cdot\vec{k}_1\cdot\vec{r})\cdot\delta_{\vec{k}_1+\vec{k}_2, 0}$

$\Rightarrow C(\vec{r}) = \frac{1}{V^2}\sum_k \mathbb{E}[|\tilde{m}_k|^2]\cdot\exp(i\cdot\vec{k}\cdot\vec{r})$ $\Rightarrow$ 我们将 $|\tilde{m}_k|^2$ 的平均值 (涨落强度) 与系统中的统计关联 $C(\vec{r})$、联系在一起．

考虑正则系综，则系统的自由能发生 ΔF 涨落的概率为：$W \propto \exp(-\frac{\Delta F}{k_B T})$．

而 $\Delta F = F - \bar{F} = \int d^3\vec{r}\cdot\Delta f$ $\quad \Delta f = \frac{a(T)}{2}[\delta m(\vec{r})]^2 + \frac{d(T)}{2}[\nabla m(\vec{r})]^2$ 利用 Fourier 展开得到．$\delta m(\vec{r}) = \frac{1}{V}\sum_k \tilde{m}_k\cdot\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})$．

$\Rightarrow \Delta F = \frac{1}{V^2}\cdot[\frac{a(T)}{2}(\sum_k \tilde{m}_k \exp(ikr))^2 + \frac{a(T)}{2}\cdot b^2\cdot(\sum_k \tilde{m}_k\cdot\exp(ikr))^2]$

而 $\int (\sum_k \tilde{m}_k \exp(ikr))^2\, dr = \int (\sum_{k_1}\tilde{m}_{k_1}\exp(ik_1 r))\cdot(\sum_{k_2}\tilde{m}_{k_2}\exp(ik_2 r))\cdot d^3r = V\cdot\sum_{k_1}\sum_{k_2}\tilde{m}_{k_1}\tilde{m}_{k_2}\delta_{k_1+k_2,0}$ 由于 $\tilde{m}_k = \tilde{m}^*_{-k}$ 则它可写成 $V\cdot\sum_k |\tilde{m}_k|^2$．

$\Rightarrow \Delta F = \frac{1}{2V}\sum_k [a(T) + d(T)k^2]\,|\tilde{m}_k|^2$ $\Rightarrow$ 涨落 $W \propto \prod \exp(-\frac{(a(T)+d(T)k^2)}{2Vk_BT}|\tilde{m}_k|^2)$ 从而解得 m_k 都独立 $\Rightarrow C(r) = \frac{k_BT}{4\pi d(T)}\frac{1}{V}\cdot\sum_k \frac{4\pi}{a(T)/d(T)+k^2}\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})$．

＊若 $V \to +\infty$．用积分代替求和有：$C(\vec{r}) = \frac{k_BT}{4\pi d(T)}\cdot\frac{\exp(-r/\xi)}{r}$ 这里引入的 $C(\vec{r})$ 随 r 衰减的特征长度 $\xi = \sqrt{\frac{d(T)}{a(T)}}$ 是所谓关联长度 $\Rightarrow T \to T_c$ 时．系统存在无穷长关联

下面讨论 Ising 模型平均场．考虑 N 个粒子 周期边界．则有 $H = -J\cdot\sum_{i=1}^N \sigma_i\sigma_{i+1} - \frac{h}{2}\sum_{i=1}^N(\sigma_i + \sigma_{i+1})$． $\Rightarrow$ 第 $i+1$ 个粒子处于 σ_{i+1} 态概率：

$\mathbb{P}(\sigma_{i+1}) = \frac{1}{Z}\exp(-J\cdot\sigma_i\cdot\sigma_{i+1} - \frac{h}{2}(\sigma_i + \sigma_{i+1}))$． $\Rightarrow$ 配分 $Z = \sum_{\{\sigma_i\}}\prod_i \mathbb{P}(\sigma_{i+1})$．

为了方便地计算配分，我们引入所谓转移矩阵．$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} \mathbb{P}(1,1) & \mathbb{P}(1,-1) \\ \mathbb{P}(-1,1) & \mathbb{P}(-1,-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(\beta(J+h)) & \exp(-\beta J) \\ \exp(-\beta J) & \exp(\beta(J-h)) \end{bmatrix}$

从而将配分函数写为：$Z_N = \sum_{\{\sigma_N\}} \mathbb{T}_{\sigma_1\sigma_2}\cdot\mathbb{T}_{\sigma_2\sigma_3}\cdots\mathbb{T}_{\sigma_N} = \mathrm{Tr}(\mathbb{T}^N)$． $\Rightarrow Z_N = (\lambda_1)^N + (\lambda_2)^N \sim \lambda_1^N$

$\frac{\partial \ln Z_N}{\partial h} = \frac{[\prod_{i=1}^N \exp(\cdot)][\sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i+\sigma_{i+1}}{2}]}{Z_N} = \frac{[\prod\quad][\sum_{i=1}^N \sigma_i]}{Z_N}$ $\Rightarrow m = -\frac{\partial F}{\partial h} = \frac{\sinh(\beta h)}{\sqrt{\sinh^2(\beta h) + \exp(-4\beta J)}}$ $\Rightarrow$ 在 $h=0$ 时．$m=0$．故不会有铁磁相变点．

＊ 由于这里采取了周期性边条．故相当于系统是一个无限延伸的链．这样的系统有平移对称性．我们只是从中抽了一节长度为 N 的链研究．

下面求自旋关联函数，为简便起见，只考虑无外场时的。

$C(j) = \mathbb{E}[\sigma_1\sigma_j]$　将 H 写为 $H = -\sum_{i=1}^{N} J_i\sigma_i\sigma_{i+1}$，$J_1 = \cdots = J_N = J$。$\Rightarrow C(j) = \frac{1}{Z_N}\sum_{\{\sigma_i\}}(\sigma_1\sigma_j)\cdot\exp\left(\sum_{i=1}^{N}\beta J_i\sigma_i\sigma_{i+1}\right) = \mathrm{Tr}\left(\prod_{i=1}^{N}\mathbb{T}^{(i)}(J_i)\right)$.

$\mathbb{T}^{(i)}(J_i) = \begin{pmatrix} \exp(\beta J_i) & \exp(-\beta J_i) \\ \exp(-\beta J_i) & \exp(\beta J_i) \end{pmatrix} = \exp(\beta J_i)\cdot\mathbb{1} + \exp(-\beta J_i)\cdot\tau_1$，$\tau_1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$。为了方便，令投影算符 $P_\pm = \frac{\mathbb{1}\pm\tau_1}{2}$ $\Rightarrow \mathbb{T}^{(i)}(J_i) = 2[\cosh(\beta J_i)P_+ + \sinh(\beta J_i)P_-]$

从而我们可以计算上面的连乘式 $\prod_{i=1}^{N}\mathbb{T}^{(i)}(J_i) = 2^N[P_+\prod\cosh(\beta J_i) + P_-\prod\sinh(\beta J_i)]$。利用关系：$\sigma_1\sigma_j = (\sigma_1\sigma_2)(\sigma_2\sigma_3)\cdots(\sigma_{j-1}\sigma_j)$。

此时可发现：每个括号中的因子可通过对相应 J_i 求导得到。$\Rightarrow C(j) = \frac{1}{\beta^{j-1}Z_N}\left.\frac{\partial^{j-1}Z_N(J_1\cdots J_N)}{\partial J_1\cdots\partial J_{j-1}}\right|_{J_i=J} = \frac{\tanh^{j-1}(\beta J) + \tanh^{N-j+1}(\tanh(\beta J))}{1+\tan^N(\beta J)}$

由于 $\tanh(\beta J) < 1$，$(N-j+1) \gg 1$ $\Rightarrow$ N 阶项被略去 $\Rightarrow C(j) \propto \exp(-j/\xi)$，$\xi = -1/\ln(\tanh(\beta J))$。

下面讨论二维 Ising 模型，简便起见，只考虑无外场情形。$\Rightarrow H = -J\sum_{\langle ij\rangle}\sigma_i\sigma_j$，$Z = \sum_{\{\sigma_i\}}\sum_{\langle ij\rangle}\exp(\beta J\cdot(\sigma_i\sigma_j))$。由于 $\cosh(\cdot)$ 偶，$\sinh(\cdot)$ 奇，所以我们可以

$\exp(\beta\sigma_i\sigma_j) = \cosh(\beta J) + \sigma_i\sigma_j\sinh(\beta J)$，$\rightarrow Z = [\cosh(\beta J)]^{2N}\sum_{\{\sigma_i\}}\prod_{\langle ij\rangle}[1+\sigma_i\sigma_j\tanh(\beta J\sigma_i\sigma_j)]$，

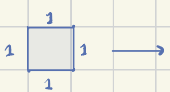
在高温时，$\tan(\beta J\sigma_i\sigma_j) \ll 1$，故主要贡献最大一项→全为 1 连乘。之后，应尽可能多取 1，少取 $\tan(\cdot)$。另外，在一个展开中，由于 $\sigma_i = \pm1$，故一个 σ_i 因子必须出现偶次才有贡献，

在这个情形下，可以用图形化解决：将相互作用的 $\sigma_i\sigma_j$ 看作一根"键"，每个顶点出现偶次 $\Rightarrow$ 这些"键"成为闭合回路。

$\Rightarrow Z = [\cos(\beta J)]^{2N}\sum_{\Gamma}[\tanh(\beta J)]^{L(\Gamma)}$.　（由于 $\sigma_i^2 = 1$，故自旋变量的求和被忽略）。

还有一个写法：在每个键 ℓ 上定义一个值 $n_\ell = 0/1$。从而将配分函数重写为：$Z = [\cosh(\beta J)]^{2N}\sum_{\{n_\ell\},\partial\{n_\ell\}=0}[\tanh(\beta J)]^{\sum n_\ell}$.

对偶晶格：在原晶格上定义一组新对偶变量，若两格之间有键 $\Rightarrow$ 格点值取异号，否则反之。



此时有：$\sum n_\ell = \sum_{\langle ab\rangle}(1-\tau_a\tau_b)/2$。我们定义一个所谓"对偶温度"，$\exp(-2\tilde{\beta}J) = \tanh(\beta J)$

可以利用这一套等价形式，重写配分函数，$Z = [\cosh(\beta J)]^{2N}\sum_{\{n_\ell\},\partial\{n_\ell\}=0}[\tanh(\beta J)]^{\sum n_\ell} = [\cosh(\beta J)]^{2N}\sum_{\{\tau_a\}}[\exp(-2\tilde{\beta}J)]^{\sum_{\langle a,b\rangle}\frac{1-\tau_a\tau_b}{2}}$

$= [\cosh(\beta J)]^{2N}\sum_{\{\tau_a\}}\exp\left(-\tilde{\beta}J\cdot\sum_{\langle a,b\rangle}(1-\tau_a\tau_b)\right) = [\cosh(\beta J)]^{2N}\exp(-N\tilde{\beta}J)\sum_{\{\tau_a\}}\exp\left(\sum_{\langle ab\rangle}\tilde{\beta}J\tau_a\tau_b\right)$.

$\Rightarrow Z(\beta) = [\cosh(\beta J)]^{2N} \exp(-N\beta J)\, Z(\tilde{\beta})$、从而，低温时不能用的微扰展开可以使用高温时的结果。

下面考虑自旋方向可以连续变化的情形：海森堡模型。$H = -J\sum_{\langle ij\rangle} \vec{S}_i\cdot\vec{S}_j - \sum_i \vec{S}_i\cdot\vec{h} = -\sum_i \vec{S}_i \cdot \left(\sum_{j\in N(i)} J\vec{S}_j + \vec{h}\right)$.

*这里，我们认为在加了外场后，一个粒子周围的粒子对它的平均影响在z方向，因此我们加一个z方向平均场。

$\Rightarrow H^{(MF)} = -\sum_i S_{i,z}(h_{eff}+h)$. 从而 $\mathbb{P}(S_{i,z}) = \frac{1}{Z}\exp[\mp\beta(S_{i,z}(h_{eff}+h))]$. 此时 N 个粒子iid $\Rightarrow \mathbb{P}(S_{i,z}) = \frac{1}{Z}\cdot[\exp(S_{i,z}(h_{eff}+h))]^N$

由于我们只关心 $S_{i,z} \Rightarrow Z = \int_{-1}^{+1} [\exp(\beta S_{i,z}(h+h_{eff}))]^N dS_{i,z} = \left(\int_{-1}^{+1}\exp(\beta S_{i,z}(h+h_{eff}))dS_{i,z}\right)^N \propto [\sinh(\beta S_{i,z}(h+h_{eff}))]^N$.

从而可以由自洽条件得临界温度。

下面考虑其涨落。之前的 Ising Model 有所谓 Z_2 对称性，令 $\sigma_i \to -\sigma_i$，其能量不变。换言之，将序参量反号，$m(r)\to -m(r)$，则自由能不变。

之前我们将朗道自由能中只保留二阶项、四阶项等，实际上体现了这一对称性，而我们仍然有 $O(3)$ 对称性。对不同位置上的序参量作任意正交变换 $m^\alpha \to m'^\alpha = R_{\alpha\beta}\, m^\beta$

自由能不变，则：自由能可写成 $F[m(\vec{r})] = \int d^3\vec{r}\, \left[\frac{a}{2}(m^\alpha(\vec{r})\, m^\alpha(\vec{r})) + \frac{d}{2}(\nabla m^\alpha(\vec{r}))\cdot(\nabla m^\alpha(\vec{r})) + \frac{b}{4}(m^\alpha(\vec{r})\cdot m^\alpha(\vec{r}))^2\right]$.

下面我们考虑所谓破缺相中的计算。取使自由能极小的均匀解 $\vec{m} = \bar{m}\vec{n}$. 其中 $\bar{m}^2 = \begin{cases} -a(T)/b(T), & T<T_c \\ 0 & T>T_c \end{cases}$

注意：$\vec{n}$ 的方向取向是任意的，其方向不影响自由能。展开，$\vec{m}(\vec{r}) = \bar{m}\vec{n} + \vec{\varphi}(\vec{r})$. $\Rightarrow \begin{cases} \nabla m^\alpha(\vec{r})\cdot\nabla m^\alpha(\vec{r}) = \nabla\varphi^\alpha(\vec{r})\cdot\nabla\varphi^\alpha(\vec{r}) \\ m^\alpha(\vec{r})\cdot m^\alpha(\vec{r}) = \bar{m}^2 + 2\bar{m}\,\vec{n}\cdot\vec{\varphi} + \vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi} \end{cases}$

代入后可以得到体系自由能：（只保留到二阶项）

$$F^{(2)}[\varphi] = \int d^3\vec{r}\, \left[\frac{d}{2}\nabla\varphi^\alpha\nabla\varphi^\alpha + |a|(\vec{n}\cdot\vec{\varphi})^2\right]$$

将 $\vec{\varphi}(\vec{r})$ 进一步分解成与 $\vec{n}$ 平行、垂直 $\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \vec{n}\cdot\sigma(\vec{r}) + \vec{\varphi}_T(\vec{r})$. $\vec{\varphi}_T(\vec{r})\cdot\vec{n} = 0$　　$\sigma(\vec{r})$、$\varphi_T(\vec{r})$，称为纵、横分量。

$\Rightarrow \nabla\varphi^\alpha\cdot\nabla\varphi^\alpha = \nabla\sigma\cdot\nabla\sigma + \nabla\varphi_T^\alpha\cdot\nabla\varphi_T^\alpha$

$\Rightarrow F^{(2)}[\sigma,\varphi_T] = \int d^3\vec{r}\, \left[\underbrace{\frac{d}{2}\nabla\varphi_T^\alpha\cdot\nabla\varphi_T^\alpha}_{\varphi_T\text{场}} + \underbrace{\frac{d}{2}(\nabla\sigma)^2 + |a|\sigma^2}_{\sigma\text{场}}\right]$. 这与前面情形类似，将 σ 与 φ_T 做 Fourier 分解可给出具体结果：

(1). 平行于自发磁化的 σ 场涨落——与之前 Ising 类似。

$C(r) = \frac{k_B T}{4\pi d(T)}\frac{\exp(-r/\xi)}{r}$　$\xi = \sqrt{\frac{d(T)}{2|a(T)|}}$　称 ξ 为关联长度，临界处发散。或 $C(r) \propto \frac{\exp(-Mr)}{r}$　M—能隙，仅在临界处 $M\to 0$.

(2). 垂直于自发磁化 → 类比 $a(T)=0$ 的 Ising Model. $\Rightarrow$ 处处长程关联。→ 而这种关联已足以破坏有序的形成。

* 对称性自发破缺：指的是序参量，e.g. Ising 的 $m = \mathbb{E}[\sum_i \sigma_i]$. 有顺磁相有 Z_2 对称性，而铁磁相则无。

无标度性：关联长度发散，用不同的"尺子"测量系统，其结果都相似。