→ 中心势场中 schrodinger 方程.

在之前讨论中我们知道，对于所有中心对称的系统，可以将其能量本征波函数分离变量. $\langle x'|n,l,m\rangle = R_{nl}(r)\, Y_l^m(\theta,\varphi)$. 而球谐函数部分对于所有中心对称系统相同，所以我们研究径向.

若系统 Hamiltonian 有形式：$H = \frac{1}{2m}p^2 + V(r)$. where $r^2 = x^2$. 在经典力学中这样的系统角动量守恒，我们可以验证：$[L, p^2] = 0$, $[L, x^2] = 0$, 从而 $[L, H] = [L, H'] = 0$.

使用 $|E, l, m\rangle$ 代表不同本征态. 先看其径向波函数满足的定态 schrodinger 方程.

$$\frac{1}{2m}\langle x'|p^2|\alpha\rangle + \langle x'|V(r)|\alpha\rangle = \frac{1}{2m}\langle x'|p^2|\alpha\rangle + V(r(x))\langle x'|\alpha\rangle$$

$$= V(r(x)) - \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\langle x'|\alpha\rangle + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\langle x'|\alpha\rangle - \frac{1}{\hbar^2 r^2}\langle x'|L^2|\alpha\rangle\right)$$

$$= V(r(x)) - \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\langle x'|\alpha\rangle + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\langle x'|\alpha\rangle - \frac{1}{\hbar^2 r^2}\hbar^2 l(l+1)\langle x'|\alpha\rangle\right)$$

利用 $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) = \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + \frac{d^2}{dr^2}$ 可知.

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + V(r)\right)R_{El}(r) = E R_{El}(r)$$

这是所谓定态径向方程. 一个 trick 是换元. 令 $R_{El}(r) = \frac{1}{r}u_{El}(r)$.

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2 u_{El}}{dr^2} + \left(\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + V(r)\right)u_{El}(r) = E u_{El}(r)$$

注意. 将 $\{x, y, z\} \to \{r, \theta, \varphi\}$. 之后. 径向波函数的归一化条件为 $1 = \int r^2 dr\, R^*_{El}(r) R_{El} = \int dr\, u^*_{El}(r) u_{El}(r)$.

对比一维粒子 1D schr 方程. 我们会发现实际上引入了有效势 $V_{eff}(r) = V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}$. 下面考虑一些近似情形. 考虑对于库仑势等，有 $\lim_{r\to 0} r^2 V(r) \to 0$.

从而 $r\to 0$ 的方程改写为 $\frac{d^2 u_{El}}{dr^2} = \frac{l(l+1)}{r^2}u_{El}(r)$. 其通解 $u(r) = Ar^{l+1} + Br^{-l}$. 为避免奇点应取 $B = 0$. 考虑 $j = \left(\frac{\hbar}{m}\right)\mathrm{Im}(\psi^*\nabla\psi)$. 径向概率流 $j_r = \hat{r}\cdot\vec{j} = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\left(\psi^*\frac{\partial}{\partial r}\psi\right) = \frac{\hbar}{m}R_{El}\frac{d}{dr}R_{El}(r)$

由于在 $r\to 0$ 有 $R_{El}(r) \to r^l$. 从而 $j_r \propto l r^{2l-1}$. 可以看到概率从原点处"流出". 包括原点的小圆面上"流出"的概率密度为 $4\pi r^2 j_r \propto l r^{2l+1}$.

*若选择 $R_{El}(r) \to r^{-(l+1)}$. 则会有 $4\pi r^2 j_r \to +\infty$ ($r\to 0$). 对于 r 相当大的地方 $V(r)\to 0$. 从而有 $\frac{d^2 u_E}{dr^2} = k^2 u$. $k^2 = -2mE/\hbar^2$ $\Rightarrow u_E(r) \propto \exp(-kr)$.

短距 $u_E(\rho) \propto \rho^{l+1}$. 长距 $u_E(\rho) \propto \exp(-\rho)$. 对径向量可写成 $u_{El}(\rho) = \rho^{l+1}\exp(-\rho)\, w(\rho)$. 从而下面只需 $w(\rho)$ 满足方程 $\frac{d^2 w}{d\rho^2} + 2\left(\frac{l+1}{\rho} - 1\right)\frac{dw}{d\rho} + \left(\frac{V}{E} - \frac{2(l+1)}{\rho}\right)w = 0$

下面看几个具体情形.

① 无限深球形势阱. 定义 k 为波数. 则 $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. 做换元 $\rho = kr$. 换元后 $\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left[1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]R = 0$.

这个方程的解为球 Bessel 函数
$$\begin{cases} j_l(\rho) = (-\rho)^l\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right]^l\left(\frac{\sin\rho}{\rho}\right) \\ n_l(\rho) = -(-\rho)^l\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right]^l\left(\frac{\cos\rho}{\rho}\right) \end{cases}$$
在 $\rho\to 0$ 时有 $j_l(\rho) \to \rho^l$, $n_l(\rho) \to \rho^{-l-1}$. 根据之前讨论. $j_l(\rho)$ 为我们需要的解. 若是无限深势阱. 对于 $r < a$ 有 $V(r) = 0 \Rightarrow j_l(ka) = 0$ 即可.

② 球对称谐振子

③ 库仑势 $V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$. 注意到库仑势满足 $\lim_{r\to 0} r^2 V(r) \to 0$, $\lim_{r\to +\infty} V(r) \to 0$. 所以可直接求解之前的 $w(\rho)$ 满足的方程.

定义 $\rho_0 = \left(\frac{2m}{-E}\right)^{1/2}\frac{Ze^2}{\hbar}$. 方程 $\rho\frac{d^2 w}{d\rho^2} + 2(l+1-\rho)\frac{dw}{d\rho} + [\rho_0 - 2(l+1)]w(\rho) = 0$.

$$x\frac{d^2 F}{dx^2} + (c - x)\frac{dF}{dx} - aF = 0 \quad (x = 2\rho.\ c = 2(l+1).\ 2a = 2(l+1) - \rho_0)$$
它的级数解 $F(a; c; x) = 1 + \frac{a}{c}\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{1}{2!}x^2 + \cdots$

$$w(\rho) = \sum_{\text{large } N}\frac{a(a+1)\cdots}{c(c+1)\cdots}\frac{(2\rho)^N}{N!} \sim \sum_{\text{large } N}\frac{(N/2)^N}{N^N}\frac{(2\rho)^N}{N!} \sim \sum_{\text{large } N}\frac{\rho^N}{N!} \sim \exp(\rho).$$

注意到若这个级数不截止的话，就会爆掉。所以必需 $\exists N$，使 $a+N=0$。 从而 $\rho_0 = 2(N+l+1)$。这里定义主量子数 $n=N+l+1$。

从而得出 $E=-\frac{1}{2}mc^2\frac{Z^2\alpha^2}{n^2}$。 可以注意到 $|n,l,m\rangle$ 的能量只与 n 有关，$n=N+l+1$。 所以对于给定 n，允许的值从 $l=0\to n-1$。

从而简并度 $\sum_{l=0}^{n-1}(2l+1)=n^2$。

→ 角动量叠加。

我们有两个角动量：轨道/自旋。考虑一个 1/2 spin sys. 它的态 $|x',\pm\rangle = |x'\rangle\otimes|\pm\rangle$。 现在的旋转生成元为 $J=L+S$。 $(J=L\otimes 1+1\otimes S)$。

所以旋转算符 $D(R)=D^{orb}(R)\cdot D^{spin}(R) = \left(\exp(-\frac{i}{\hbar}L\cdot\hat{n}\phi)\otimes 1\right)\cdot\left(1\otimes\exp(-\frac{i}{\hbar}S\cdot\hat{n}\phi)\right) = \exp(-\frac{i}{\hbar}L\cdot\hat{n}\phi)\otimes\exp(-\frac{i}{\hbar}S\cdot\hat{n}\phi)$

在写一个态的波函数的时候，写成旋量形式。 $\langle x',\pm|\alpha\rangle = \psi_\pm(x') = \begin{pmatrix}\psi_+(x')\\ \psi_-(x')\end{pmatrix}$。

我们可以用两组对易算符的基矢展开一个态 $\{L^2,L_z,S^2,S_z\}$ 或 $\{J^2,J_z,L^2,S^2\}$。

作为一个小例子，我们可考虑两个 1/2 spin 粒子角动量叠加。 它们的总自旋角动量 $S=S_1\otimes 1+1\otimes S_2 := S_1+S_2$。

分属两个粒子的算符对易，例如，$[S_{1x},S_{2y}] = [S_{1x}\otimes 1,\ 1\otimes S_{2y}] = (S_{1x}\otimes 1)(1\otimes S_{2y}) - (1\otimes S_{2y})(S_{1x}\otimes 1)=0$。

那么，对于"相加"的自旋有，$[S_x,S_y] = [S_{1x}\otimes S_{2x},\ S_{1y}\otimes S_{2y}] = i\hbar S_{1z}\otimes S_{2z} = i\hbar S_z$。

各算符本征值：$S_{1z}\otimes 1(|1\rangle\otimes|2\rangle) = S_{1z}|1\rangle\otimes|2\rangle = m_1\hbar$　　　$S_z|s,m\rangle = m\hbar$

$1\otimes S_{2z}(|1\rangle\otimes|2\rangle) = m_2\hbar$　　　$S^2|s,m\rangle = s(s+1)\hbar^2$

所以态仍可以用两组基底分别打开。 e.g. 可验证 $|s=1,m=0\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(|+-\rangle+|-+\rangle)$。

之前的升降算符也可以推广过来。定义降算符 $S_-=S_{1-}+S_{2-}$ 把它作用在 $|s=1,m=1\rangle=|++\rangle$ 的两侧，有：

$\sqrt{2}|s=1,m=0\rangle = \sqrt{1}|-+\rangle + \sqrt{1}|+-\rangle$。 这给出了两组基底间的变换系数，这正是我们要考虑的 Clebsch-Gordan (C-G) 系数。

更一般地，看两个角动量 J_1，J_2，它们是被作用在不同空间态矢上的，以至于 $[J_{1k},J_{2l}]=0$。 由它们作生成元，作用于直积态矢上的旋转算符为：

$\left(1-\frac{iJ_1\cdot\hat{n}\delta\phi}{\hbar}\right)\otimes\left(1-\frac{iJ_2\cdot\hat{n}\delta\phi}{\hbar}\right) = 1-\frac{i(J_1\otimes 1+1\otimes J_2)\cdot\hat{n}\delta\phi}{\hbar}$ 所以定义总角动量 $J=J_1\otimes 1+1\otimes J_2$，或写成 $J=J_1+J_2$。与前才一样，容易验证 $[J_i,J_j]=i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$。

那么我们有两种基矢来表达这个系统。 我们之前说过，后来作用在不同空间的态矢上的算符，在"对易"后会互相对易。所以可用 J_1^2，J_{1z}，J_2^2，J_{2z} 来标记一个态，将其写为 $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$

也就是两个系统各出两个"参数"。还有一个选择是 J_1^2，J_2^2，J^2，J_z。 这里首先注意到 $J^2=J_1^2+J_2^2+2J_{1z}J_{2z}+J_{1+}J_{2-}+J_{1-}J_{2+}$ 所以 $[J^2,J_1^2]=0$

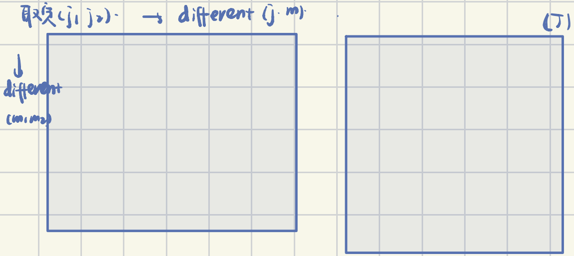
从而态写为 $|j_1 j_2 jm\rangle$。 (相当于两个系统各出一个态，而总体再出两个) 注意：$[J^2,J_z]=0$，但 $[J^2,J_{1z}]$，$[J^2,J_{2z}]\neq 0$。 所以不能将 J^2 放进第一组里。

既然两种基底可表示同一系统，一个自然问题是如何在这两组基底间切换。 $|j_1 j_2 jm\rangle = \sum_{m_1}\sum_{m_2}|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle\underbrace{\langle j_1 j_2 m_1 m_2|j_1 j_2 jm\rangle}_{\text{CG coeff. 下面来讲}}$

$J_1^2\ J_2^2\ J_{1z}\ J_{2z}\ J_1^2\ J_2^2\ J^2\ J_z$

它有很多好的性质。 $\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle$

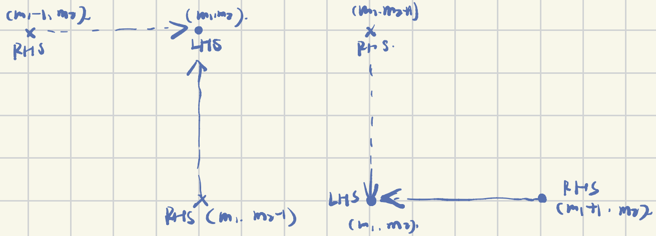
- 在 $m \neq m_1+m_2$ 时，对应CG系数为0。证明只要注意到：$J_z = J_{1z}\otimes I + I\otimes J_{2z}$ 从而
$(J_z - J_{1z} - J_{2z})|j_1 j_2; j m\rangle = 0$。左乘 $\langle j_1 j_2; m_1 m_2|$，我们有：
$\langle j_1 j_2; m_1 m_2|(J_z - J_{1z} - J_{2z})|j_1 j_2; j m\rangle$
$= \langle j_1 j_2; m_1 m_2|J_z|j_1 j_2; j m\rangle - \langle j_1 j_2; m_1 m_2|J_{1z}+J_{2z}|j_1 j_2; j m\rangle$
$= \langle j_1 j_2; m_1 m_2|j_1 j_2; j m\rangle\big(m-(m_1+m_2)\big) = 0$。从而完成证明。
- 除非 $|j_1-j_2| \le j \le j_1+j_2$，否则CG也为0。这其实是一个很直觉的东西，若将角动量视作 J_1 与 J_2 的叠加，则可产生的最大/小角动量模长为 j_1+j_2，$|j_1-j_2|$。
这很直观，若你有 $J_{1z}|m_1\rangle = m_1|m_1\rangle$，$J_{2z}|m_2\rangle = m_2|m_2\rangle$。则 $J_z(|j_1 m_1\rangle\otimes|j_2 m_2\rangle) = m_1|j_1 m_1\rangle\otimes|j_2 m_2\rangle + |j_1 m_1\rangle\otimes m_2|j_2 m_2\rangle = (m_1+m_2)|j_1 m_1\rangle\otimes|j_2 m_2\rangle$，
我们证一个重新的东西：若这个结论成立，则 $\{|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle\}$ 与 $\{|j_1 j_2 j m\rangle\}$ 张成了维度相同的线性空间。固定 (j_1, j_2)，而改变 (m_1, m_2) 的话，有 $N=(2j_1+1)(2j_2+1)$ 种选法。
对于每一个 j，m 有 $(2j+1)$ 个选法，而 j 自己可以从 j_1-j_2 跑到 j_1+j_2，所以可取的总方案为 $N=\sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2}(2j+1) = (2j_1+1)(2j_2+1)$ 种。
作为一种坐标变换系数，C-G系数组成的矩阵必幺正。习惯上，我们将矩阵元全设为实数。从而 $\langle j_1 j_2; j m|j_1 j_2; m_1 m_2\rangle = \langle j_1 j_2; m_1 m_2|j_1 j_2; j m\rangle$。



(m_1, m_2) 标示了矩阵的一行或转置后的一列。
从而 $\sum_{j,m}\langle j_1 j_2; m_1 m_2|j_1 j_2 j m\rangle\langle j_1 j_2; j m|j_1 j_2; m_1' m_2'\rangle$
$= \sum_{j,m}\langle j_1 j_2; m_1 m_2|j_1 j_2; j m\rangle\langle j_1 j_2; m_1' m_2'|j_1 j_2; j m\rangle = \delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'}$。
把矩阵转置一下有：$\sum_{m_1, m_2}\langle j_1 j_2; m_1 m_2|j_1 j_2; j m\rangle\langle j_1 j_2; m_1 m_2|j_1 j_2 j' m'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'}$。
作为特别情形，设 $j'=j$，$m'=m_1+m_2$。$\sum_{m_1}\sum_{m_2}\|\langle j_1 j_2; m_1 m_2|j_1 j_2; j m\rangle\|^2 = 1$。

下面开始递归地推导C-G系数。首先：
$|j_1 j_2; j m\rangle = \sum_{m_1}\sum_{m_2}|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle\langle j_1 j_2; m_1 m_2|j_1 j_2; j m\rangle$
利用 $J_\pm = J_{1\pm}\otimes I + I\otimes J_{2\pm}$，作用到两边，有：
$\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,|j_1 j_2; j, m\pm1\rangle = \sum_{m_1'}\sum_{m_2'}\Big(\sqrt{(j_1\mp m_1')(j_1\pm m_1'+1)}\,|j_1 j_2; m_1'\pm1, m_2'\rangle + \sqrt{(j_2\mp m_2')(j_2\pm m_2'+1)}\,|j_1 j_2; m_1', m_2'\pm1\rangle\Big)\langle j_1 j_2 m_1' m_2'|j_1 j_2 j m\rangle$
$m_1'\pm1 = m_1$ 时保留　　$m_2'\pm1 = m_2$ 时保留
两侧内积 $\langle j_1 j_2; m_1 m_2|$。
$\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,\langle j_1 j_2; m_1 m_2|j_1 j_2; j\, m\pm1\rangle = \sqrt{(j_1\mp m_1+1)(j_1\pm m_1)}\,\langle j_1 j_2; m_1\mp1, m_2|j_1 j_2; j m\rangle + \sqrt{(j_2\mp m_2+1)(j_2\pm m_2)}\,\langle j_1 j_2; m_1, m_2\mp1|j_1 j_2; j m\rangle$
使用 $m_1+m_2 \ne m\pm1$ 时，CG系数要消失。

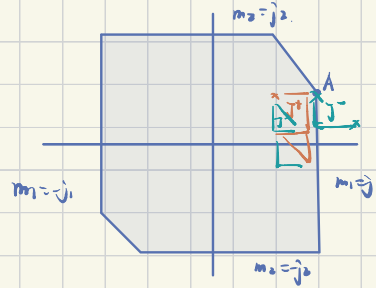
所以，在 (m_1, m_2) 平面上看这递推关系，需要由两个点推一个点。



这样的递推"几乎"唯一确定了 CG coeff. 下面我们假定 j_1, j_2, j.

此时有 $|m_1| \le j_1$, $|m_2| \le j_2$. 对于 $-j \le m \le j$，利用 $J_z = J_{z1} + J_{z2}$ 的事实，有 $\underline{m = m_1 + m_2}$

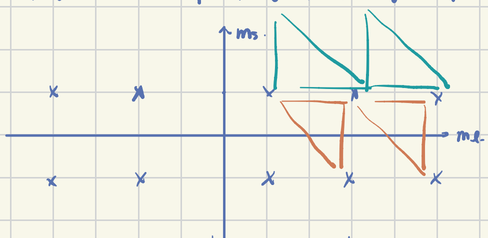
$\Rightarrow -j \le m_1 + m_2 \le j$. 这是在 (m_1, m_2) 上允许的区域.



通过使用这样的"三角填补"区域，最后每个点都可求.

有一个例子是 1/2 spin 耦合. 记 $\begin{cases} j_1 = l & m_1 = m_l \\ j_2 = s = \frac{1}{2} & m_2 = m_s = \pm\frac{1}{2} \end{cases}$

利用 $J = J_1 + J_2$ 的事实，j 的可能值为 $j = l \pm \frac{1}{2}$. 现在，上面的"允许区域"只有两行.



我们可以从上面这一行开始递推. 1/2 spin 的系统不含有 $m_s = +\frac{3}{2}$，所以有 $m_s = +\frac{3}{2}$ 的系数为 0. 立刻有递推：($j_1 = l$, $j_2 = \frac{1}{2}$)

$$\langle m-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} | l+\tfrac{1}{2}, m\rangle = \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{l+m+\frac{3}{2}}}\ \langle m+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} | l+\tfrac{1}{2}, m+1\rangle$$

而这一过程可以不断进行，直至 $m = l$，即：

$$\langle m-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} | l+\tfrac{1}{2}, m\rangle = \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}}\ \langle l, \tfrac{1}{2} | l+\tfrac{1}{2}, l+\tfrac{1}{2}\rangle$$

* 上面的递推式在原有 m_1, m_2 增加的过程中，$\underline{m\text{ 也在上升}}$. 但这没关系，因为只有 $m = m_1 + m_2$ 时，$|j_1 j_2, m_1 m_2\rangle$ 和 $|j_1 j_2; j m\rangle$ 才指向同一个系统. 所以可以选择一个合适的递推起点，将所有有效的位置全部填完.

现在还差归一化. 考虑 m_l, m_s 都在最大值，即 $m_l = l$, $m_s = +\frac{1}{2}$ 时，存在一个基底表示下，它对应 $j = l + \frac{1}{2}$, $m = l + \frac{1}{2}$ 态. 从而 $\langle l, \frac{1}{2} | l+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}\rangle = 1$. 从而所有系数可以求出，上面一行求完再求下面一行.

→ Schwinger's oscillator Model

角动量有升降符. 谐振子也有. 所以一个自然的想法是用它类比. 由于角动量这里我们用 $|j, m\rangle$，由对 J^2 与 J_z 的共同特征态代表. 而一个谐振子体系只有一个 $|N\rangle$. 所以用一个振子是不够的，至少需要两个谐振子. 现在设两个振子为"+"型和"−"型. 每一组里面满足升降符，但是组之间对易

$[a_+, a_+^\dagger] = 1$, $[N_+, a_+] = -a_+$, $[N_+, a_+^\dagger] = a_+^\dagger$, $[a_+, a_-^\dagger] = [a_-, a_+^\dagger] = 0$. 由于组间对易，所以我们可以有 $N_\pm$ 的共同本征态.

这个系统的基态对应于 $+, -$ 都是基态，为 $|0, 0\rangle$. $\Rightarrow |n_+, n_-\rangle = \frac{(a_+^\dagger)^{n_+} (a_-^\dagger)^{n_-}}{\sqrt{n_+!}\ \sqrt{n_-!}} |0, 0\rangle$. 定义 $J_+ = \hbar a_+^\dagger a_-$, $J_- = \hbar a_-^\dagger a_+$. $J_z = \left(\frac{\hbar}{2}\right)(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-) = \left(\frac{\hbar}{2}\right)(N_+ - N_-)$.

它们满足和前面 $\{J_z, J_+, J_-\}$ 之间的对易关系：$[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm$，$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$.

作为例子：$\hbar^2 [a_+^\dagger a_-, a_-^\dagger a_+] = \hbar^2 (a_+^\dagger a_- a_-^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_+ a_+^\dagger a_-)$

$$= a_+^\dagger (a_-^\dagger a_- + 1) a_+ - a_-^\dagger (a_+^\dagger a_+ + 1) a_-$$

$$= a_+^\dagger a_+ a_-^\dagger a_- + a_+^\dagger a_+ - a_+^\dagger a_+ a_-^\dagger a_- - a_-^\dagger a_- = a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_- = 2\hbar J_z.$$

同时定义总粒子 $N = N_+ + N_- = a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-$. $J^2 = (J_x^2 + J_y^2 + J_z^2) = J_z^2 + (\frac{1}{2})(J_+ J_- + J_- J_+) = (\frac{\hbar^2}{2}) N (\frac{N}{2} + 1)$.

在上面这一套定义生，我们将+型粒子认为是自旋向上+的1/2粒子。所以 J_+ 的效果是湮灭一个负自旋，产生或正的，反之亦然。n_+, n_- 为正负自旋粒子数，而 N 衡量总自旋.

不难验证 $J_+ |n_+, n_-\rangle = \sqrt{n_-(n_+ + 1)}\,\hbar\, |n_+ + 1, n_- - 1\rangle$. $J_- |n_+, n_-\rangle = \sqrt{n_+(n_- + 1)}\,\hbar\, |n_+ - 1, n_- + 1\rangle$ $J_z = (\frac{1}{2})(n_+ - n_-)\hbar |n_+, n_-\rangle$

为了把以上这些变成熟悉的样子，定义 $j = \frac{1}{2}(n_+ + n_-)$. $m = \frac{1}{2}(n_+ - n_-)$. 所以这里我们从中看出：总角动量 j 与总数有关，而z方向角动 m 与z方向自旋 $n_+ - n_-$ 有关。

(总粒子数决定了 j，向上、向下分别的数目决定了 m，这也是为什么 m 只可取 $j, -j+1, \cdots, j-1, j$ 的原因)。

这样的表示还提供了一种导出旋转矩阵的方法。我们只关心 $D(R) = D(\alpha, \beta, \gamma)|_{\alpha,\gamma=0} = \exp(-\frac{i}{\hbar} J_y \beta)$，从而有

$$D(R)|j, m\rangle = \frac{[D(R) a_+^\dagger D^{-1}(R)]^{j+m} [D(R) a_-^\dagger D^{-1}(R)]^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}} D(R)|0\rangle$$

由于 $a_+|0,0\rangle = |0,0\rangle$. $a_-|0,0\rangle = |0,0\rangle$. 所以 $D(R)|0\rangle = |0\rangle$

考虑中间的每一项 $D(R) a_\pm^\dagger D^{-1}(R) = \exp(-\frac{i}{\hbar} J_y \beta) a_\pm^\dagger \exp(\frac{i J_y \beta}{\hbar})$. 使用 B-H公式有：$J_+ = J_x + iJ_y$ $J_- = J_x - iJ_y \Rightarrow J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) = \frac{\hbar}{2i}(a_+^\dagger a_- - a_-^\dagger a_+)$

从而 $-\frac{i}{\hbar}[J_y, a_+^\dagger] = -\frac{i}{\hbar} \cdot \frac{\hbar}{2i} ([a_+^\dagger a_-, a_+^\dagger] - [a_-^\dagger a_+, a_+^\dagger]) = \frac{1}{2i}[a_-^\dagger a_+, a_+^\dagger] = (\frac{1}{2i}) a_-^\dagger$，同理推 $[-\frac{J_y \beta}{\hbar}, [-\frac{J_y \beta}{\hbar}, a_+^\dagger]] = (\frac{\beta}{2}) a_+^\dagger$.

收集所有项，我们有：

$$\begin{cases} D(R) a_+^\dagger D(R)^{-1} = a_+^\dagger \cos(\frac{\beta}{2}) + a_-^\dagger \cos(\frac{\beta}{2}) \\ D(R) a_-^\dagger D(R)^{-1} = a_-^\dagger \cos(\frac{\beta}{2}) - a_+^\dagger \cdot \sin(\frac{\beta}{2}) \end{cases}$$

把它塞回去，并用二项式定理展开，与 $D(0, \beta, 0)|j, m\rangle = \sum_{m'} |j, m'\rangle d^{(j)}_{m'm}(\beta)$ 对比系数即可。

→ Bell's Inequality

首先我们研究一些处于"spin-singlet"的系统，这意味着这个系统的总自旋为0. $|s.s.\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+, z-\rangle - |z-, z+\rangle)$

测这个系统的时候，它总是有1/2处于 $|z+, z-\rangle$ 态，又有1/2处于 $|z-, z+\rangle$ 态，而且这些不一直保持，在两粒子分开后仍保持。

有如下的想象实验：Alice测粒子1的 S_z. Bob测2的 S_z. 则若Alice测了，Bob的测量结果就已确定。若Alice没测，则Bob可能是50/50

但是，对于更复杂的情形：若我们测 S_x. 直接计算可以看出 $|spin\ singlet\rangle = (\frac{1}{\sqrt{2}})(|\hat{x}-; \hat{x}+\rangle - |\hat{x}+; \hat{x}-\rangle)$.

这里的效果是：

• 若A测量了S_z，则B的S_z确定。但此时 $|S_x\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\hat{z}+\rangle \pm |\hat{z}-\rangle)$，所以B测量x的时候仍然不确定。

• 若A、B同测S_x、S_z，则一方测完后另一方直接确定。

所以量子力学的测量是一个"选择"或"过滤"过程，一但测量就确定了一个态。而且有时(如上例)，对于部分的测量是以确定不依赖何处。从而"对部分测量"等价于"对整体测量"。

Einstein对此事做出的评价："我们有一个不可动摇的假设：The Real Factual Situation of the System S_2 is independent of what is done with the system S_1 which is spatially seperated from the former.

所以，要么量子力学允许超距作用，要么 $|z_1, z_2\rangle$ 这个态并不能描述系统的"真实状态"——换言之，QM有隐变量。

事实上，一些物理学家认为QM不确定诠释的出现是由于隐变量。于是创造了许多替代品。不幸的是，这些替代理论无法在实验上给出新预测。Bell 分析：Einstein的局部性原理实际上预测了一个不等式。设想我们考虑有一类粒子，在测S_z的时候一直测到+，而S_x……—。注意：这里我们并不同时测S_z、S_x，我们同时加两个方向的确定自旋，但只能测一个方向！

这样的系统是否与QM中描述的并非同一个系统。考虑同一大堆这样的粒子构成处于 spin singlet $= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\hat{z}+, \hat{z}-\rangle - |\hat{z}-, \hat{z}+\rangle)$ 态的系统，要求以下四类粒子对份额各占1/4。

particle 1		particle 2
$(\hat{z}+, \hat{x}-)$	$\leftrightarrow$	$(\hat{z}-, \hat{x}+)$
$(\hat{z}+, \hat{x}+)$	$\leftrightarrow$	$(\hat{z}-, \hat{x}-)$
$(\hat{z}-, \hat{x}+)$	$\leftrightarrow$	$(\hat{z}+, \hat{x}-)$
$(\hat{z}-, \hat{x}-)$	$\leftrightarrow$	$(\hat{z}+, \hat{x}+)$

下面考虑更复杂的情形。设有三个方向上自旋 $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$。总结，设有两两配对的粒子有8类。

population	Particle 1	Particle 2
N_1	$(\hat{a}+, \hat{b}+, \hat{c}+)$	$(\hat{a}-, \hat{b}-, \hat{c}-)$
N_2	$(\hat{a}+, \hat{b}+, \hat{c}-)$	$(\hat{a}-, \hat{b}-, \hat{c}+)$
……		

设Alice和Bob从这一大团粒子中挑一对，分别测 $a+$; $b+$ 的概率记为 $P(\hat{a}+; \hat{b}+)$。

$\Rightarrow P(a+; b+) = \frac{N_3+N_4}{\sum_i N_i}$ $\quad P(a+; c+) = \frac{N_2+N_4}{\sum_i N_i}$ $\quad P(c+; b+) = \frac{N_3+N_7}{\sum_i N_i}$

从而有：$P(\hat{a}+; \hat{b}+) \le P(\hat{a}+; \hat{c}+) + P(\hat{c}+; \hat{b}+)$ —— Bell's Inequality 是局部"假"量子力学中的推论。

总结一下，这样的系统其实可以被认为是"有隐变量"的——每一个粒子的自旋是"预设好的"，而非像量子力学一样概率诠释。

设有我们考虑真实的体系，算一下 $P(a+; b+)$。若Alice发现$S_1\cdot\hat{a}$为正，则(作为0角动量系统) Bob必发现 $S_2\cdot\hat{a}$ 为负。换言之系统2的态矢正指向$S_2\cdot\hat{a}$的反方向。

利用旋转矩阵求 $S_2\cdot\hat{b}$ 的本征值，$P(\hat{a}+; \hat{b}+) = \left(\frac{1}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\theta_{ab}}{2}\right)$。从而Bell 不等式：$\sin^2\left(\frac{\theta_{ab}}{2}\right) \le \sin^2\left(\frac{\theta_{ac}}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta_{cb}}{2}\right)$。不妨选取 a, b, c 共面，$\theta_{ac} = \theta_{cb} = \theta$; $\theta_{ab} = 2\theta$。

则不等式对于 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 被违反。换言之"假"量子力学构造的不等式与真量子力学不相容。而真QM被实验验证过了。从而我们说明了"量子力学不含隐变量"。

尽管如此，A、B无法利用这一特性来通信，因为尽管A、B测得相反自旋，但B测到的是随机的"+"、"−"。