Day 3-1. 经典场论补充

在我们正式地介绍了第一个场(标量场)之前，我们不妨补充一些经典场论知识。场是有无穷自由度的，每个空间点都是一个自由度。记作场量 $\phi_a(x,t)$。

类比经典力学，我们认为场的拉格朗日量是场量(坐标)和其时空导数 $\partial_\mu\phi_a$ 的函数，即：$S=\int d^4x\,\mathcal{L}(\phi_a,\partial_\mu\phi_a)$。$\mathcal{L}(\cdot,\cdot)$ 称为拉格朗日密度。

我们要通过变分法推导出场的运动方程：我们假定只对场量变分，而时空坐标变分 $\delta x^\mu=0$。此时与经典力学一样，变分和偏导可以对易：$\delta(\partial_\mu\phi_a)=\partial_\mu(\delta\phi_a)$。

考虑 $\delta\phi_a$ 与 $\partial_\mu(\delta\phi_a)=\delta(\partial_\mu\phi_a)$ 导致的作用量变化：

$$\delta S=\int d^4x\,\delta\mathcal{L}=\int d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a}\delta\phi_a+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta(\partial_\mu\phi_a)\right]$$

将所有变化量变化积分.

) 分离出 $\delta\phi_a$，后面利用分部积分将 $\delta\phi_a$ 提出来.

$$=\int d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a}\delta\phi_a+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\partial_\mu\delta\phi_a\right]$$

$$=\int d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a}\delta\phi_a+\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta\phi_a\right)-\delta\phi_a\,\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\right)\right]$$

认为 ϕ_a 在无穷远边界上变分为0.

$$=\int d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\right)\right]\delta\phi_a=0.$$

从而立刻得出场的 Euler – Lagrange 方程：$\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a}-\partial_\mu\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\right)=0.$

引入共轭动量密度 $\pi_a(x,t)=\dfrac{\partial\mathcal{L}(\phi_a,\partial_\mu\phi_a)}{\partial\dot\phi_a}=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi_a}(\phi_a,\dot\phi_a,\nabla\phi_a)$. 原则上，$\dot\phi_a$ 可以反解，从而写成 $\dot\phi_a=\dot\phi_a(\pi_a,\phi_a,\nabla\phi_a)$.

※ 除了特别使用Einstein求和记号且未显式写出求和，这里表示对所有指标分量的求和.

从而像经典力学，我们可以进行 Legendre 变换。$H=\int d^4x\,\sum_a\pi_a\dot\phi_a-\mathcal{L}$，从而 H 的密度 $\mathcal{H}=\mathcal{H}(\phi_a,\nabla\phi_a,\pi_a)=\sum_a\pi_a\dot\phi_a-\mathcal{L}$.

所以H的密度依赖于三个东西。分别考虑 $\delta\phi_a$，$\delta(\nabla\phi_a)$，$\delta(\pi_a)$ 三个东西的影响，变分有：

$$\delta S=\int d^4x\,\delta(\mathcal{L})=\int d^4x\,\delta\left(\sum_a\dot\phi_a\pi_a-\mathcal{H}\right)$$

$$=\int d^4x\left(\dot\phi_a\delta\pi_a+\pi_a\delta\dot\phi_a-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi_a}\delta\phi_a-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi_a}\delta\pi_a-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\phi_a)}\delta(\nabla\phi_a)\right)$$

然后还是希望把 $\delta\phi_a$、$\delta\pi_a$ 两个独立的东西抽出来.

$$\pi_a\cdot\delta\dot\phi_a=\pi_a\,\delta\frac{d}{dt}(\phi_a)\overset{\text{交换求导次序}}{=}\pi_a\frac{d}{dt}(\delta\phi_a)\overset{\text{分部积分}}{=}\frac{d}{dt}(\pi_a\,\delta\phi_a)-\delta\phi_a\frac{d}{dt}\pi_a.$$

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\phi_a)}\delta(\nabla\phi_a)=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\phi_a)}\cdot\nabla(\delta\phi_a)=\nabla\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\phi_a)}\delta\phi_a\right)-\delta\phi_a\,\nabla\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\phi_a)}\right).$$

认为边界项消失，我们有：$\delta S=\int d^4x\left[\left(\dot\phi_a-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi_a}\right)\delta\pi_a-\left(\dot\pi_a+\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi_a}-\nabla\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\phi_a)}\right)\right)\delta\phi_a\right]=0.$

从而立刻得出场的 Hamilton 方程：$\dot\phi_a=\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi_a}$，$\dot\pi_a=-\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi_a}+\nabla\left(\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\phi_a)}\right).$

下面我们将经典力学中的 Noether 's Theorem 推广到经典场论中：场论每有一个连续对称性，即可找到一条守恒定律.

从 Lagrange 形式的作用量出发，考虑对称性做连续变换，但现在将允许的场量和坐标一起变换（刚才我们用变分法推 E-L 方程的时候只有场量变了，但坐标没变，所以是 $\phi_a(x)\to\phi_a'(x)$）。

现在我们让着坐标一起变，即令 $\phi_a(x)\to\phi_a'(x')$，其中包含坐标变换 $x^\mu\to x'^\mu$。为了便于研究，我们可以只看无穷小变换：$\phi_a'(x')=\phi_a(x)+\delta\phi_a(x)$，$x'^\mu=x^\mu+\delta x^\mu$。

我们考虑一个满足运动方程的系统，它本应在场量的变换 $\phi_a(x)\to\phi_a'(x)$ 下保持对任意区域 R 有 $\int_R \delta\mathcal{L}=0$。若在做了 $x^\mu\to x^\mu+\delta x^\mu$ 后仍然有 $\int_R\delta\mathcal{L}=0$，则我们称系统对坐标变换具有对称性。

坐标变换会导致 R^4 中体积微元的变化：$d^4x'=|J|d^4x$，$J=\det\left(\left[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right]\right)=\det\left(\left[\delta^\mu_\nu+\frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\nu}\right]\right)$。利用矩阵性质 $\det(1+A)\approx 1+\mathrm{tr}(A)$，从而对于无穷小变换有：

$d^4x'=(1+\partial_\mu\delta x^\mu)\,d^4x$。从而计算作用在无穷小变换下的变分。

$$\delta S=\int_R d^4x'\,\mathcal{L}'(x')-\int_R d^4x\,\mathcal{L}(x)=\int_R d^4x\,(1+\partial_\mu\delta x^\mu)\,\mathcal{L}'(x)-\int d^4x\,\mathcal{L}(x)$$
$$=\int_R d^4x\,\left(\delta\mathcal{L}+\mathcal{L}(x)(\partial_\mu\delta x^\mu)\right).$$

是什么东西引起了 $\delta\mathcal{L}$ 呢？显然是 $\delta\phi_a$。但应注意 $\delta\phi_a$ 中包含了两个效应：场量的变化以及坐标的变换。现在的表示是 $\phi_a'(x')-\phi_a(x)=\delta\phi_a(x)$。

特别地 [illegible] $\bar{\delta}\phi_a$，则二者的关系为：

$$\delta\phi_a=\phi_a'(x')-\phi_a(x)=\phi_a'(x')-\phi_a'(x)+\phi_a'(x)-\phi_a(x)$$
$$=\phi_a(x')-\phi_a(x)+\bar{\delta}\phi_a(x)$$
$$=\bar{\delta}\phi_a(x)+(\partial_\mu\phi_a(x))\delta x^\mu\approx\delta\phi_a+(\partial_\mu\phi_a(x))\delta x^\mu$$

将 $\delta()$ 后函数换一换，可得到类似关系。$\delta(\partial_\mu\phi_a(x))=\bar{\delta}(\partial_\mu\phi_a(x))+\partial_\nu(\partial_\mu\phi_a(x))\delta x^\nu$

将以上结果全部代入，计算作用的变化：

$$\delta S=\int d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a}\bar{\delta}\phi_a+(\partial_\mu\phi_a)\delta x^\mu\right]+\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\right]\left[\overset{\text{换序}}{\partial_\mu(\bar{\delta}\phi_a)}+\partial_\nu(\partial_\mu\phi_a)\delta x^\nu\right]+\mathcal{L}\partial_\mu(\delta x^\mu)$$

在这里用分部积分。

在使用分部积分技巧并删除曲面项后，可以获得：

→凑微分。

$$\delta S=\int d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\right]\bar{\delta}\phi_a+\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\bar{\delta}\phi_a+\mathcal{L}\delta x^\mu\right]=0$$

由于 E-L 方程，第一项已为 0，而第二项为 0 则为对称变换的条件：$\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\bar{\delta}\phi_a+\mathcal{L}\delta x^\mu\right]=0$

这可称为流守恒方程。从而可以定义 Noether 4-守恒流 $j^\mu=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\bar{\delta}\phi_a+\mathcal{L}\delta x^\mu$。若系统有某种对称性，我们有 4-流守恒方程 $\partial_\mu j^\mu=0$。

将此式对空间区域积分，有：

$$0=\int_R d^3x\,\partial_\mu j^\mu=\int_R d^3x\,\partial_0 j^0+\int_R d^3x\,\partial_i j^i=\frac{d}{dt}\int_R d^3x\,j^0+\int_R d^3x\,\nabla\cdot\vec{j}=\underbrace{\frac{d}{dt}\int_R d^3x\,j^0}_{Q\text{ — 守恒荷}}+\int_S\vec{j}\cdot d\vec{\sigma}$$

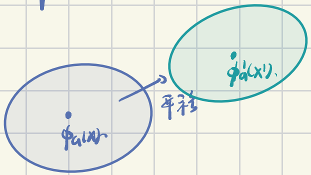
（$d\vec{\sigma}$ 为面元）。

$$\Rightarrow\frac{dQ}{dt}=-\int_S\vec{j}\cdot d\vec{\sigma}$$

由于在无穷远处 $\vec{j}$ 消失，因此全空间的守恒荷不随时间变化。

考虑一些简单例子. 第一个自然是时空平移 $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$. 我们称保闭间隔不变的变换称为poincare变换, 其组成之群记为 $ISO(1,3)$. 所得可写为Lorentz变换与平移的组合: $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$

我们该场满足空间平移对称性. 此时 $\phi'_a(x') = \phi_a(x)$. 因此, 自然知道拉氏密度满足 $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$. $\Rightarrow \int_R d^4x' \mathcal{L}'(x') = \int_R d^4x\, \mathcal{L}(x)$ $\forall R$.



作无穷小变换 $\delta x^\mu = \varepsilon^\mu$. 有 $\delta\phi^a = \phi'_a(x') - \phi_a(x) = 0$. $\Rightarrow \bar{\delta}\phi^a = \delta\phi^a - (\partial_\mu\phi^a)\delta x^\mu = -\varepsilon^\rho\partial_\rho\phi_a$.

代入守恒流. $j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\varepsilon^\rho\partial_\rho\phi_a + \mathcal{L}\varepsilon^\mu = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\partial_\rho\phi_a - \mathcal{L}\delta^\mu{}_\rho\right]\varepsilon^\rho$ 由于 ε^ρ 任意, 从而 $\partial_\mu[\quad] = 0$.

两侧乘以 $g^{\rho\nu}$. 可以得到一个(2,0)张量: $T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\partial^\nu\phi_a - g^{\mu\nu}\mathcal{L}$. $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. 对 $T^{0\nu}$ 积分, 有4个守恒荷.

$T^{00} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\dot{\phi}_a)}\dot{\phi}_a - \mathcal{L} = \pi_a\dot{\phi}_a - \mathcal{L} = \mathcal{H}$. 它对空间积分得到场的能量.

$T^{0i} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\dot{\phi}_a)}\partial^i\phi_a = \pi_a\partial^i\phi_a$ 它是场的动量密度. 从而时间平移 $\Leftrightarrow$ H守恒, 空间平移 $\Leftrightarrow$ $\vec{P}$守恒.

(主动视角: 场和研究点一起移动).
(被动视角: 作坐标变换).

下面考虑Lorentz对称性. 进行无穷小Lorentz变换: $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$. 推 $\omega^\mu{}_\nu$ 满足的条件: 在这样的线性坐标变换下, 度规不变化有:

$$g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta = g_{\mu\nu}(\delta^\mu{}_\alpha + \omega^\mu{}_\alpha)(\delta^\nu{}_\beta + \omega^\nu{}_\beta)$$

$$= g_{\mu\nu}\delta^\mu{}_\alpha\delta^\nu{}_\beta + g_{\mu\nu}\delta^\mu{}_\alpha\omega^\nu{}_\beta + g_{\mu\nu}\omega^\mu{}_\alpha\delta^\nu{}_\beta + O(\ ) = g_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha} \Rightarrow \omega_{(\ )}$$ 所以ω必须是反称的.

并且在相对论性经典场论中, 我们要求 $\mathcal{L}$ 必须是相对论协变的. 所以在线性变换 $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ 作用下, 必有 $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}'(x')$. 又由于 Lorentz Transform 的 Jacobian 为 $|\Lambda| = 1$ $\Rightarrow d^4x = d^4x'$.

从而相对论性经典场论必有洛变下对称性. 这里: ω 有6个独立分量, 对应三个方向 boost 和绕三轴的旋转.

举一下具体例子. 对于绕z轴的旋转. 容易看出 $\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & -\theta & \\ & \theta & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

对于沿x轴的Boost. $\beta = v/c$. 定义快度 (rapidity) $\xi = \tanh^{-1}\beta$ $\Rightarrow \beta = \tanh\xi$. $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \left(\frac{\cosh^2\xi - \sinh^2\xi}{\cosh^2\xi}\right)^{-1/2} = \cosh\xi$. $\beta\gamma = \tanh\xi\cosh\xi = \sinh\xi$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh\xi & -\sinh\xi & & \\ -\sinh\xi & \cosh\xi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\xi & & \\ \xi & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

为了保证 $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$ 的协变性, 我们不加证明地指出 $\phi'_a(x')$ 应有下面的形式:

$$\phi'_a(x') = \phi_a(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(J^{\mu\nu})_{ab}\phi_b(x) = \left[\delta_{ab} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(J^{\mu\nu})_{ab}\right]\phi_b(x).$$

从而其对应的全变化的变分 $\bar{\delta}\phi_a = -\frac{i}{2}\omega_{\nu\rho}(J^{\nu\rho})_{ab}\phi_b - (\partial_\nu\phi_a)\omega^\nu{}_\rho x^\rho$ 从而给出Noether守恒流:

从而代入Noether定理, 给出四维守恒流/荷.

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\bar{\delta}\phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu = -\frac{i}{2}\omega_{\nu\rho}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}(J^{\nu\rho})_{ab}\phi_b - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}(\partial_\nu\phi_a)\omega^\nu{}_\rho x^\rho + \mathcal{L}\omega^\mu{}_\rho x^\rho$$

$$= -\frac{1}{2}\omega_{\nu\rho}\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}(\mathcal{J}^{\nu\rho})_{ab}\phi_b - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\partial_\nu\phi_a + \delta^\mu{}_\nu\mathcal{L}\right)\omega^\nu{}_\rho x^\rho$$

$$= -\frac{1}{2}\omega_{\nu\rho}\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}(\mathcal{J}^{\nu\rho})_{ab}\phi_b - T^\mu{}_\nu\,\omega^\nu{}_\rho x^\rho$$

前面，在推时空平移的时候，我们给出的能动张量为 $T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\partial^\nu\phi_a - g^{\mu\nu}\mathcal{L}$. 它和我们在这里推出的是一样，所以放在守恒流多了一项。

利用 $\omega_{\mu\nu}$ 的对称性，可进一步推出：

$$T^\mu{}_\nu\,\omega^\nu{}_\rho x^\rho = T^{\mu\nu}\omega_{\nu\rho}x^\rho = \frac{1}{2}\left(T^{\mu\nu}\omega_{\nu\rho}x^\rho - T^{\mu\nu}\omega_{\rho\nu}x^\rho\right) = \frac{1}{2}\left(T^{\mu\nu}\omega_{\nu\rho}x^\rho - T^{\mu\rho}\omega_{\nu\rho}x^\nu\right) = \frac{1}{2}\omega_{\nu\rho}\left(T^{\mu\nu}x^\rho - T^{\mu\rho}x^\nu\right)$$

从而我们有 Nothen 守恒流，$j^\mu = \frac{1}{2}J^{\mu\nu\rho}\omega_{\nu\rho}$，$J^{\mu\nu\rho} = T^{\mu\rho}x^\nu - T^{\mu\nu}x^\rho - i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}(\mathcal{J}^{\nu\rho})_{ab}\phi_b$. 在空间旋转和Lorentz变换中 $\omega_{\mu\nu}$ 是任意的，从而 $\partial_\mu j^\mu = 0 \Rightarrow \partial_\mu J^{\mu\nu\rho} = 0$

我们有6个守恒荷，$J^{\nu\rho} = \int d^3x\, J^{0\nu\rho} = \int d^3x\left[T^{0\rho}x^\nu - T^{0\nu}x^\rho - i\pi_a(\mathcal{J}^{\nu\rho})_{ab}\phi_b\right]$. 为了看出其物理意义，我们将其拆成两项：$J^{\nu\rho} = L^{\nu\rho} + S^{\nu\rho}$.

$L^{\nu\rho}$ 是只与能动张量有关的部分：$L^{\nu\rho} = \int d^3x\left(T^{0\rho}x^\nu - T^{0\nu}x^\rho\right)$. 显然，它对于指标是反对称的，从而它可以看作某个 2-形式，用度规升指标后的结果，因而可以对偶成 1-形式。

(要注意这里我们现在没有区分上下指标了)

$$\mathcal{L}^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\int d^3x\left(T^{0k}x^j - T^{0j}x^k\right) = \frac{1}{2}\int d^3x\left(\epsilon^{ijk}T^{0k}x^j \overset{+\epsilon^{ikj}}{-\epsilon^{ijk}} T^{0j}x^k\right) = \int d^3x\,\epsilon^{ijk}x^j T^{0k} = \int d^3x\,\epsilon^{ijk}x^j\pi_a\partial^k\phi_a = -\int d^3x\,\vec{x}\times\left(\pi_a\nabla\phi_a\right)$$

←动量密度，有这些出错了。

这对应于场的轨道角动量。而另外一部分，$S^i = -\frac{i}{2}\epsilon^{ijk}\int d^3x\,\pi_a(\mathcal{J}^{jk})_{ab}\phi_b$. 从而我们看到，空间旋转对称性对应于角动量守恒，这在场论中同样是成立的。

下面考虑另一种对称性。有一个复标量场 $\mathcal{L} = (\partial^\mu\phi^*)\partial_\mu\phi - m^2\phi^*\phi$. 作一个相位变换，$\phi'(x) = \exp(iq\theta)\phi(x)$，这被称作 $U(1)$ 整体变换，"整体"意味着参数 θ 不依赖时空。

显然，$\{U(\theta) \mid \theta\in[0, 2\pi/q]\}$ 构成 $U(1)$ 群，并且不难发现，它描述了 2D 平面上的旋转，从而它与 $SO(2)$ 同构。不难给出 $[\phi^*(x)]' = \exp(-iq\theta)\phi^*(x)$.

从而 $\mathcal{L}(x)$ 在这种变换下不变。由 $\delta x^\mu = 0$，从而给出场的无穷小变换，$\delta\phi = \bar{\delta}\phi = iq\theta\phi$. $\delta\phi^* = \bar{\delta}\phi^* = -iq\theta\phi$. 立刻给出 Noether 守恒流。

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\bar{\delta}\phi + \bar{\delta}\phi^*\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)} = \partial^\mu\phi^*(iq\theta\phi) + (-iq\theta\phi^*)\partial^\mu\phi$$

引入一个符号 $\phi^*\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi = \phi^*\partial^\mu\phi - (\partial^\mu\phi^*)\phi$. 从而 $j^\mu = -iq\theta(\phi^*\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi) \Rightarrow J^\mu = -iq(\phi^*\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi)$.

守恒荷 $Q = iq\int d^3x\,\phi^*\overleftrightarrow{\partial_0}\phi$. 时空 $U(1)$ 整体变换不依赖于时空点，因而它反映了场的内禀性质。它通常是场描述的粒子携带的荷（电荷，重子数，etc…）