对称与守恒（上）：时空对称性

经典力学中的对称性和守恒律

考虑一个 n 维系统，研究这个系统的动力学变量的某个单参连续变换族，每个实数 λ 指定了一个变换：

$$\lambda : q^a(t) \to q^a(t;\lambda)$$

特别地规定 $q^a(t,0) = q^a(t)$。作为一个简单的例子，我们考虑如下多粒子系统：

$$L = \frac{1}{2}\sum_r m_r \dot{x}^r \cdot \dot{x}^r + \sum_{r>s} V^{(r,s)}(\|x^r - x^s\|)$$

我们考察一个无穷小变换：

$$q^a \to q^a + (Dq^a)\mathrm{d}\lambda \quad Dq^a = \frac{\partial q^a}{\partial \lambda}|_\lambda = 0$$

立刻得到拉氏量的变换：

$$DL = \frac{\partial L}{\partial q^a} Dq^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} D\dot{q}^a = \frac{\partial L}{\partial q^a} Dq^a + p_a \frac{\mathrm{d}Dq^a}{\mathrm{d}t}$$

Definition

我们定义一个变换是对称性当且仅当 $DL = \dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$，其中 $F = F(q^a, \dot{q}^a, t)$。因为这样的变换不改变运动方程。

只要我们有了对称性，我们就可以构造：

$$Q = p_a Dq^a - F$$

求其对时间的导数：

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \dot{p}_a Dq^a + p_a \frac{\mathrm{d}Dq^a}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = 0$$

因此 Q 是守恒量。于是我们得到诺特定理：一个无穷小对称性变换必然对应一个守恒量。以下举三个例子说明：

第一个例子是前面给出的拉氏量，我们做无穷小平移：

$$x^r \to x^r + \lambda e \Rightarrow Dx^r = e$$

从而有:

$$DL = 0 \Rightarrow F = 0$$

构造守恒量:

$$Q = e \cdot m_r \dot{x}^r$$

这是动量守恒。

第二个例子是一般的不显含时间的拉氏量 $L(q^a, \dot{q}^a)$，考察其时间平移:

$$q^a \to q^a(t+\lambda) \Rightarrow Dq^a = \frac{\partial q^a}{\partial \lambda}|_{\lambda=0} = \dot{q}^a$$

$$DL = \frac{\partial L}{\partial q^a}\dot{q}^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\ddot{q}^a = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} \Rightarrow F = L$$

从而:

$$Q = p_a Dq^a - F = p_a \dot{q}^a - L = H$$

这是能量守恒。

第三个例子回到前面给出的拉氏量:

$$x^r \to R(\lambda, e)x^r \Rightarrow Dx^r = e \times x^r$$

同样有 $DL = 0 \Rightarrow F = 0$，构造守恒量:

$$Q = \sum_r p_r \cdot (e \times x^r) = e \cdot \sum_r (x^r \times p_r) = e \cdot J$$

这是角动量守恒。

推广到量子力学中

量子力学中守恒量可以用于生成无穷小对称性，只需将 q^a 与 Q 做一个对易括号（实际上这个性质来源于哈氏力学中的经典对易子），对于 Q 中不显含 $\dot{q}^a$ 的情形:

$$[q^a, Q] = [q^a, p_b Dq^b - F] = [q^a, p_b]Dq^b = iDq^a$$

这样就把无穷小对称变换生成出来了。在 Q 中含有 $\dot{q}^a$ 的情形这个也是对的，但是我们不再证明了。典型的例子包括使用哈密顿算符生成时间演化，演化后能量守恒；使用动量算符生成坐标平移，平移后动量守恒。或者你可以这样理解利用守恒量生成无穷小对称性：设守恒量为 Q，海森堡绘景下，它生成的变换作用到哈密顿算符上为：

$$U^\dagger(\lambda)HU(\lambda)=H \quad U(\lambda)=\exp(-i\lambda Q)$$

取 $\lambda\to 0$，得到：

$$U^\dagger HU=H+i\lambda[Q,H]$$

由 Q 为守恒量得到 $[Q,H]=0$，从而在 Q 生成的无穷小变换下哈密顿量是不变的，从而 Q 确实生成了无穷小对称性。

推广到经典场论中

实际上我们要推广的核心公式是：

$$Q=p_aDq^a-F$$

只不过我们现在并不是离散指标求和，而是对空间积分。这样我们会获得额外的信息：我们会发现全空间的 Q 是一定的，但是我们可以局域化 Q 以得到 Q 的密度，我们也可以看到 Q 从空间中第一部分流向另一部分。比如在电动力学中我们有如下结论：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot j=0$$

现在我们考虑处理一组场，对这组场做一个单参数变换：

$$\phi^a(x)\to\phi^a(x,\lambda)$$

同样定义无穷小变换率：

$$D\phi^a=\frac{\partial\phi^a}{\partial\lambda}|_{\lambda=0}$$

我们仍然将不改变运动方程的变换定义为无穷小对称性，现在，对场量做的变换将引起拉氏密度的变化，我们将

$$D\mathscr{L}=\partial_\mu F^\mu$$

定义为无穷小对称性。考虑此时拉氏量的变化：

$$
\begin{aligned}
DL &= \int \mathrm{d}^3 D\mathscr{L} \\
&= \int \mathrm{d}^3 x \partial_\mu F^\mu \\
&= \int \mathrm{d}^3 x \partial_i F^i + \int \mathrm{d}^3 x \partial_0 F^0 \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \mathrm{d}^3 x F^0
\end{aligned}
$$

作用量的变化显然是：

$$
\delta S = \int DL\mathrm{dt} = \int \mathrm{d}^3 x (F^0(x, t_2) - F^0(x, t_1))
$$

作用量的变化只与两个边界上场的构型有关，显然也是不影响运动方程的。直接计算 $D\mathscr{L}$ 显然有

$$
D\mathscr{L} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^a} D\phi^a + \pi^\mu_a \partial_\mu (D\phi^a) \quad \pi^\mu_a = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)}
$$

定义如下量：

$$
J^\mu = \pi^\mu_a D\phi^a - F^\mu
$$

计算：

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu J^\mu &= (\partial_\mu \pi^\mu_a) D\phi^a + \pi^\mu_a \partial_\mu D\phi^a - \partial_\mu F^\mu \\
&= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^a} D\phi^a + \pi^\mu_a \partial_\mu D\phi^a - \partial_\mu F^\mu \\
&= 0
\end{aligned}
$$

所以这是诺特定理在场论中的形式，我们获得了守恒流。我们也有在全空间中守恒的守恒荷：

$$
Q = \int \mathrm{d}^3 x J^0 = \int \mathrm{d}^3 x \pi^0_a D\phi^a - \int \mathrm{d}^3 x F^0 = \int \mathrm{d}^3 x \pi^0_a D\phi^a - F
$$

显然，守恒流有一定的规范自由性，我们可以为 F 加一个反对称张量的导数：

$$
F^\mu \to F^\mu + \partial_\nu A^{\mu\nu}
$$

这样的做法不会影响 $\partial_\mu F^\mu$，所以 $D\mathscr{L} = \partial_\mu F^\mu$ 可以确定多个不同的 F^μ。但是这个做法将导致守恒流变化：

$$
J^\mu \to J^\mu - \partial_\nu A^{\mu\nu}
$$

但是幸运的是：

$$Q=\int \mathrm{d}^3x(J^0-\partial_i A^{0i})$$

多出来的这一个东西可以使用分部积分干掉，所以全空间的守恒荷并没发生变化。

几个场景的具体计算

时空平移

我们先考虑最简单的一种变换：

$$\phi^a(x)\to\phi^a(x+\lambda e)$$

不难求出场量在这种无穷小变换下的变化率：

$$D\phi^a=\frac{\mathrm{d}\phi^a}{\mathrm{d}\lambda}|_{\lambda=0}\Rightarrow D\phi^a=e_\rho\partial^\rho\phi^a(x)$$

看看上面的守恒流的形式：

$$J^\mu=\pi^\mu_a D\phi^a-F^\mu$$

第一项是线性依赖于 e^ρ 的；在无穷小变换情形下，$D\mathscr{L}$ 也是线性依赖于 e^ρ 的，这将导致 F^μ 线性依赖于 e^ρ，所以我们最终期望得到线性依赖于 e^ρ 的守恒流。这样的守恒流应该怎么表示呢？那就是对 e^ρ 做个线性变换：

$$J^\mu=e_\rho T^{\rho\mu}$$

那么我们会得到四条守恒定律：

$$\partial_\mu T^{\rho\mu}=0$$

这里的 $T^{\rho\mu}$ 被称为正则能量动量张量。既然能写出这样的方程，这意味着 $T^{\rho\mu}$ 中取 $\rho=0,1,2,3$ 都可以分别当作 4-守恒流处理。当然，正则能动张量并非唯一，我们可以添加一个反称部分的导数：

$$\theta^{\rho\mu}=T^{\rho\mu}+\partial_\lambda(A^{\rho\mu\lambda})\Rightarrow\partial_\mu\theta^{\rho\mu}=0$$

显然，能量动量张量定义了 4 个守恒荷：

$$P^\rho=\int \mathrm{d}^3xT^{\rho0}$$

下面我们给出能动张量的具体形式，计算：

$$D\mathscr{L} = e_\rho\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^a}\partial^\rho\phi^a + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial^\nu\phi^a)}\partial^\rho(\partial^\nu\phi^a)\right) = e_\rho\partial^\rho\mathscr{L}$$

注意到：

$$e_\rho\partial^\rho\mathscr{L} = \partial_\mu(g^{\mu\rho}e_\rho\mathscr{L})$$

立刻得知：

$$F^\mu = g^{\mu\rho}e_\rho\mathscr{L}$$

所以有我们的守恒流：

$$J^\mu = \pi_a^\mu e_\rho\partial^\rho\phi^a - g^{\mu\rho}e_\rho\mathscr{L}$$

从中可以拉出能动张量：

$$T^{\rho\mu} = \pi_a^\mu\partial^\rho\phi^a - g^{\mu\rho}\mathscr{L}$$

在我们前面讨论的自由标量场情形，$T^{\rho\mu}$ 显然是对称的。那么我们现在检查一下这个能动张量对不对，我们可以检查它导出的四个守恒荷。首先是 $\rho = 0$ 的部分：

$$T^{00} = \pi_a^0\partial^0\phi^a - g^{00}\mathscr{L} = \pi_a\dot{\phi}^a - \mathscr{L}$$

这正是我们的哈密顿量密度，所以 T^{00} 是能量。考虑：

$$T^{i0} = \pi^0\partial^i\phi - g^{0i}\mathscr{L} = (\partial^0\phi)(\partial^i\phi)$$

考虑：

$$P = -\int \mathrm{d}^3x(\partial^0\phi)(\nabla\phi)$$

代入之前的标量场，需要计算如下积分：

$$-\int d^3\mathbf{x}\,(\partial_0\phi)(\nabla\phi) = -\iiint \frac{d^3\mathbf{x}\,d^3\mathbf{p}\,d^3\mathbf{p}'}{2(2\pi)^3\sqrt{\omega_\mathbf{p}\omega_{\mathbf{p}'}}}\left(-i\omega_\mathbf{p}a_\mathbf{p}e^{-i\omega_\mathbf{p}t+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + i\omega_\mathbf{p}a_\mathbf{p}^\dagger e^{i\omega_\mathbf{p}t-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right)\times \left(i\mathbf{p}'a_{\mathbf{p}'}e^{-i\omega_{\mathbf{p}'}t+i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}} - i\mathbf{p}'a_{\mathbf{p}'}^\dagger e^{i\omega_{\mathbf{p}'}t-i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}}\right) \quad (5.54)$$

利用之前的技巧，关于 x 的积分均产出 $\delta^{(3)}(p-p')$，最终可得到结果：

$$P = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3p(a_pa_p^\dagger + a_p^\dagger a_p)p$$

如果做正规排序就可以得到合理的总动量 $P = \int \mathrm{d}^3p(a_p^\dagger a_p)p$。

洛伦兹变换

我们先来找找无穷小洛伦兹变换。先考虑一个一般的无穷小线性变换：

$$\Lambda : x^\mu \to x^\mu + \epsilon^{\mu\nu} x_\nu \mathrm{d}\lambda$$

同样地，我们考虑对偶矢量的变换：

$$y_\mu \to y_\mu + \epsilon_{\mu\nu} y^\nu \mathrm{d}\lambda$$

在洛伦兹变换下我们要求两个矢量的内积不变，也就是说：

$$\epsilon^{\mu\nu} x_\nu y_\mu + \epsilon_{\mu\nu} y^\nu x^\mu = (\epsilon_{\mu\nu} + \epsilon_{\nu\mu}) x^\mu y^\nu = 0 \Rightarrow \epsilon_{\mu\nu} + \epsilon_{\nu\mu} = 0$$

问无穷小洛伦兹变换是什么其实也是在问洛伦兹群的 Lie 代数是什么。我们知道洛伦兹群同构于一个矩阵群 $\Lambda\eta\Lambda = \eta$，它的 Lie 代数同样同构于一个矩阵群 $A^T = -\eta A \eta$。这个矩阵群里面的每个 A 可以视为一个 $(1,1)$ 型张量，$\epsilon_{\mu\nu}$ 即为其用度规降指标的结果。不难验证以上求出的 $\epsilon_{\mu\nu}$ 确实生成洛伦兹变换，例如取 $\epsilon^{12} = 1 = \epsilon^{21}$，则诱导的变换是：

$$x^1 \to x^1 \cos\lambda - x^2 \sin\lambda \quad x^2 \to x^2 \cos\lambda + x^2 \sin\lambda$$

这是旋转变换，这样的旋转变换有三种。若取 $\epsilon^{10} = -\epsilon^{01} = 1$，诱导的变换是：

$$x^0 \to x^0 \cosh\lambda + x^1 \sinh\lambda \quad x^1 \to x^1 \cosh\lambda + x^0 \sinh\lambda$$

这是 Boost。
现在看洛伦兹变换下的守恒流会出现什么情况。再回到守恒流的表达式：

$$J^\mu = \pi^\mu_a D\phi^a - F^\mu$$

现在的 $D\phi^a$ 必然线性依赖于每一个坐标的微小变化，而第 μ 个坐标的微小变化又必然依赖于 $\epsilon_{\mu\nu}$，所以我们可以说 J^μ 是线性依赖于 ϵ 中的每个元素的。既然这样，最简单的写法是：

$$J^\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\lambda\rho} M^{\lambda\rho\mu}$$

由于 ϵ 对两个下标反对称，不妨假设 M 对 λ, ρ 两个指标是反对称的。所以这里的 $\frac{1}{2}$ 是为了防止重复计数。我们现在将得到六组守恒律：

$$\partial_\mu M^{\lambda\rho\mu} = 0$$

也就是说指定一组 λ, ρ，$M^{\lambda\rho\mu}$ 就可以被视作一个守恒流。我们稍微混用一下 J 这个符号，制造六个守恒荷：

$$J^{\lambda\rho} = \int \mathrm{d}^3 x M^{\lambda\rho 0}$$

由于洛伦兹变换中包含三个空间旋转，所以我们可以猜到其中有三个是角动量。下面我们仍只考察标量场，做如下变换：

$$\Lambda : \phi^a(x) \to \phi^a(\Lambda^{-1}x)$$

从而：

$$(\Lambda^{-1}x)^\rho = x^\rho - \epsilon^{\rho\sigma} x_\sigma \mathrm{d}\lambda = x^\rho + \epsilon^{\sigma\rho} x_\sigma \mathrm{d}\lambda$$

注意：这里再次强调洛伦兹协变这个问题，如果将老坐标 x 做个洛伦兹变换变成新坐标 $x' = \Lambda x$，那么为了保证 $\phi'(x') = \phi(x)$ 就有 $\phi'(x') = \phi(\Lambda^{-1}x')$。略去 $'$ 不写就得到了上文中变化后的场量 $\phi(\Lambda^{-1}x)$，其中 x 为新坐标。从而场量的变化：

$$D\phi^a = \epsilon^{\sigma\rho} x_\sigma \partial_\rho \phi^a = \epsilon_{\sigma\rho} x^\sigma \partial^\rho \phi^a$$

此时拉氏密度的变化：

$$D\mathscr{L} = \epsilon_{\sigma\rho} x^\sigma \partial^\rho \mathscr{L} = \partial^\rho(\epsilon_{\sigma\rho} x^\sigma \mathscr{L}) = \partial_\mu(g^{\mu\rho}\epsilon_{\sigma\rho} x^\sigma \mathscr{L})$$

求出守恒流：

$$J^\mu = \epsilon_{\sigma\rho} x^\sigma (\pi_a^\mu \partial^\rho \phi^a - g^{\mu\rho}\mathscr{L})$$

所以我们立刻看出其中包含了一个能动张量：

$$J^\mu = \epsilon_{\sigma\rho} x^\sigma T^{\rho\mu}$$

为了构建之前提到的 M，我们需要先来一个反称化：

$$J^\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\sigma\rho}(x^\sigma T^{\rho\mu} - x^\rho T^{\sigma\mu}) = \frac{1}{2}\epsilon_{\sigma\rho} M^{\sigma\rho\mu}$$

你容易看出前面有些守恒荷就是角动量：

$$J^{12} = \int \mathrm{d}^3 x (x^1 T^{20} - x^2 T^{10})$$

但是我们可以关新的守恒量，比如：

$$J^{10} = \int \mathrm{d}^3x(x^1T^{00} - x^0T^{10}) = \int \mathrm{d}^3x(x^1T^{00}) - tP^1$$

这是质心运动定律的相对论类比。