缺失的一环：从经典场论到量子场论

从经典力学到经典量子理论需要通过正则量子化，那么我们能不能通过相似的步骤从经典场论过渡到量子场论？或者，从经典力学到经典场论需要取连续极限，我们能不能通过类似的方法从经典量子理论过渡到经典场论？为此，我们先进行复习。

经典力学

我们知道在经典力学中有：

$$S = \int \mathrm{d}t L(q, \dot{q}, t)$$

使用变分法容易得到：

$$\delta S = \int \mathrm{d}t \left(\left(\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{\mathrm{d}p_a}{\mathrm{d}t} \right) \delta q^a \right) + p_a \delta q^a \Big|_{t_1}^{t_2}$$

利用边界条件即可得到拉氏方程。对拉氏量做勒让德变换 $H = p_a \dot{q}^a - L$，立刻得到：

$$\begin{aligned} \delta H &= \frac{\partial H}{\partial p_a} \delta p_a + \frac{\partial H}{\partial q_a} \delta q^a \\ &= \dot{q}^a \delta p_a + p_a \delta \dot{q}^a - \frac{\partial L}{\partial q^a} \delta q^a - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \delta \dot{q}^a \end{aligned}$$

对比立刻得到哈氏方程：

$$\frac{\partial H}{\partial p_a} = \dot{q}^a \quad \frac{\partial H}{\partial q^a} = -\dot{p}_a$$

当然，在推导哈氏方程的过程中，我们有两个要求：完备性和独立性

- 完备性要求 $\dot{q}_a$ 完全可以由 q_a, p_a 显式写出，换言之方程组 $p_a = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}$ 是完全可以解出的。
- 独立性要求每一个 p_a, q^a 可以有任意的独立变化，从而可以利用 $\delta p_a, \delta q^a$ 的任意性导出 Hamilton 方程。
  实际上，不完备性就会导致约束的出现，从而导致独立性被破坏。我们举出下面的例子：考虑一个在球面上运动的粒子，我们仍然可以使用三个欧几里得坐标作为广义坐标，但是通过一个拉格朗日乘子作为约束：

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\lambda(x^2-1)$$

如果你将 λ 放在正则坐标的位置上，那么你无法通过这个拉氏方程过渡到哈氏方程，因为 $p_\lambda=0$，这导致你无法对 p_λ 进行独立变分，此时需要 Dirac 的约束理论进行处理。在之后的讨论中，我们只讨论完备性和独立性满足的情形。

正则量子化

正则量子化是一种将哈氏系统转换为量子力学系统的方法。由于经典动力学变量满足对易关系：

$$\{q^a,q^b\}=\{p^a,p^b\}=0\quad\{q^a,p_b\}=\delta^a_b$$

由于在量子场论中我们只讨论海森堡绘景，因此我们这里只关心海森堡绘景怎么做。这种对易关系可以直接被推广到海森堡绘景中随时间演化的算符上：

$$[q^a(t),q^b(t)]=[p_a(t),p_b(t)]=0\quad[q^a(t),p_b(t)]=i\delta^a_b$$

量子系统的哈氏量与经典系统相同，这意味着做正则量子化的时候我们只需将经典习题中的 p,q 全部替换成算符。但是注意这个说法没有规定各个算符的排列顺序，因而这是一个模糊的说法。为了避免这种模糊性的影响，我们通常在笛卡尔系中写出哈氏量而后做正则量子化。
量子力学中时间演化由哈密顿算符生成，从而：

$$\frac{\mathrm{d}A_H}{\mathrm{d}t}=i[H,A_H]+\frac{\partial A_S}{\partial t}$$

特别地，有两个特殊的对易关系：

$$[q_i,F(p)]=i\hbar\frac{\partial F}{\partial p_i}\quad[p_i,G(q)]=-i\hbar\frac{\partial G}{\partial q_i}$$

这可以通过将 $F(p),G(q)$ 展开成级数完成证明。利用这两个结论容易得到量子力学版的哈氏正则方程：

$$\frac{\mathrm{d}q^a}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p_a}\quad\frac{\mathrm{d}p_a}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial q^a}$$

经典场论

在经典场论中，构型空间是无穷维的，一组场量 $\phi^a(x,t)$ 取代了有限个 $q^a(t)$。对应关系是 $t\to t,a\to a,x$。拉氏量可以写作某个拉氏密度对空间的积分：

$$L=\int \mathscr{L}\mathrm{d}^3x$$

我们只考虑局域系统，从而 $\mathscr{L}=\mathscr{L}(\phi^a,\partial_\mu\phi^a)$。作用量：

$$S=\int \mathrm{d}tL=\int \mathrm{d}^4x\mathscr{L}(\phi^a(x),\partial_\mu\phi^a(x),x)$$

由于 d^4x 是不变体元，因此如果 $\mathscr{L}$ 是洛伦兹变换下的不变量，则运动方程就是洛伦兹协变的。使用变分法可以立刻得到运动方程：

$$\begin{aligned}\delta S&=\int \mathrm{d}^4x\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^a}\delta\phi^a+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\delta(\partial_\mu\phi^a)\right)\\&=\int \mathrm{d}^4x\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^a}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}\right)\right)\delta\phi^a\end{aligned}$$

从而得到运动方程。为了写出运动方程方便起见，我们定义：

$$\pi_a^\mu=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^a)}$$

则运动方程为：

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^a}-\partial_\mu\pi_a^\mu=0$$

下面举一个具体的例子：设有一个实的、洛伦兹协变的标量场的拉氏量是：

$$\mathscr{L}=\pm\frac{1}{2}(a\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi+b\phi^2)$$

注意：我们说一个标量场协变是 $\phi'(x')=\phi(x)$，而不是 $\phi(x)=\phi(x')$。ϕ 为不依赖坐标定义的标量场 ψ 与将一点映射到坐标系的函数符合而形成的函数，在坐标变换之下是会变的。立刻换元 $\phi\to\phi\sqrt{a}$，再令 $b/a=c$，我们有：

$$\mathscr{L}=\pm\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi+c\phi^2)$$

将 $\mathscr{L}$ 设置为 $\phi,\partial_\mu\phi$ 的函数，则有：

$$\pi^\mu=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}=\pm\partial^\mu\phi\quad\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}=\pm c\phi$$

所以得到的运动方程是：

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi=c\phi$$

这正式 KG 方程。现在我们推导其哈氏形式。注意在有限维系统中正则动量的定义方式：

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}$$

自然地，可以类比到无穷维：

$$\pi_a = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (\dot{\phi}^a)}$$

哈氏量：

$$H = \int \mathrm{d}^3 x \mathscr{H} = \int \mathrm{d}^3 x (\pi_a \dot{\phi}^a - \mathscr{L})$$

不难验证在我们的例子中：

$$\mathscr{H} = \pm \left(\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\|\nabla\phi\|^2 - \frac{1}{2}c\phi^2 \right)$$

为了使得这个能量密度有下界，我们只能选择 $+$，并且应选择 $c = -\mu^2$，此时我们的运动方程确实就是 KG 方程。

原书中未谈到如何推出哈氏理论中场的运动方程，这里做一个补充。考虑哈氏量的微小变化：

$$\begin{aligned}
\delta H &= \int \mathrm{d}^3 x \pi_a (\delta\dot{\phi}^a) + \dot{\phi}^a \delta\pi_a - \delta\mathscr{L} \\
&= \int \mathrm{d}^3 x \pi_a (\delta\dot{\phi}^a) + \dot{\phi}^a \delta\pi_a - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^a}\delta\phi^a - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_i \phi^a)}\partial_i(\delta\phi^a) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\phi}^a}\delta(\dot{\phi}^a) \\
&= \int \mathrm{d}^3 x \dot{\phi}^a \delta\pi_a - \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^a} - \partial_i \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_i \phi^a)} \right) \right)\delta\phi^a \\
&= \int \mathrm{d}^3 x \dot{\phi}^a \delta\pi_a - \dot{\pi}_a \delta\phi^a
\end{aligned}$$

另一方面，我们有：

$$\delta H = \int \mathrm{d}^3 x \frac{\delta H}{\delta \pi_a}\delta\pi^a + \frac{\delta H}{\delta \phi^a}\delta\phi^a$$

两式对比立刻得到哈氏运动方程。可见求出哈氏运动方程的关键是找出 H 的变分。

进入量子场论

在经典场论中，有和经典力学一样的对易子。经典力学中的对易子写为：

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}$$

但是，现在我们考虑的"力学量"不再是 (q, p) 的函数，而是 (q^a, π_a) 的泛函，因此对易子应改写为：

$$\{f[q^a, \pi_a], g[q^a, \pi_a]\} = \sum_a \int \mathrm{d}^3 x \left(\frac{\delta f}{\delta q^a}\frac{\delta g}{\delta \pi_a} - \frac{\delta g}{\delta \pi_a}\frac{\delta f}{\delta q^a}\right)$$

那么在经典场论中有如下对易子，并且可以推广到量子力学中：

$$\{\phi^a, \phi^b\} = \{\pi_a, \pi_b\} = 0 \quad \{\phi^a, \pi_b\} = i\delta^a_b \delta^{(3)}(x - y)$$

量子力学中哈氏量依然为 $H = \int \mathrm{d}^3 x \mathscr{H}$，且海森堡方程仍然满足。下面我们以 KG 场做个例子。考虑用算符写出哈氏量：

$$H = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3 x(\pi^2(x, t) + \|\nabla\phi\|^2 + \mu^2\phi^2(x, t))$$

求其运动方程：

$$\begin{aligned}
\dot\phi(x, t) &= i[H, \phi(x, t)] \\
&= i\int \mathrm{d}^3 y \frac{1}{2}[\pi^2(y, t), \phi(x, t)] \\
&= i\int \mathrm{d}^3 y \pi(y, t)(-i\delta^3(y - x)) \\
&= \pi(x, t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot\pi(x, t) &= i[H, \pi(x, t)] \\
&= i\int \mathrm{d}^3 \mathrm{y} \frac{1}{2}([\|\nabla\phi(y, t)\|^2, \pi(x, t)] + \mu^2[\phi^2(y, t), \pi(x, t)])
\end{aligned}$$

这里重点计算第一个对易子：注意到：

$$\begin{aligned}
[\nabla_y \phi(y, t), \pi(x, t)] &= \nabla_y[\phi(y, t), \pi(x, t)] \\
&= i\nabla_y \delta^3(y - x)
\end{aligned}$$

回代后得到：

$$\begin{aligned}
i[H, \pi(x, t)] &= i\int \mathrm{d}^3 y(\nabla\phi(y, t)\cdot i\nabla\delta^3(y - x) + \mu^2\phi(y, t)(i\delta^3(y - x))) \\
&= \nabla^2\phi(x, t) - \mu^2\phi(x, t)
\end{aligned}$$

其中使用了一次分部积分。这就是 KG 方程。因此我们通过正则量子化程序导出了场的运动方程——这只需我们将经典场论中的场量换成场算符，而后使用海森堡运动方程即可。注意：我们在前三节中可以以一种极其富有物理意义的方式推进，这是因为我们已经知道我们的场需要描述无限空间中自由粒子，然而这样的方法无法被推广至我们尚不清楚物理意义的系统，比如所谓 ϕ^4 相互作用系统。

正规排序

现在让我们对系统做更进一步的自洽性检验。之前我们已知量子化标量场可以写成升降算符的组合，把它代入哈氏量，得到：

$$\frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}\,\pi(\mathbf{x},t)^2 = \frac{1}{2}\iiint \frac{d^3\mathbf{x}\,d^3\mathbf{p}\,d^3\mathbf{p}'}{2(2\pi)^3\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{p}'}}}\left(-i\omega_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + i\omega_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^{\dagger}e^{i\omega_{\mathbf{p}}t-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right)\times \left(-i\omega_{\mathbf{p}'}a_{\mathbf{p}'}e^{-i\omega_{\mathbf{p}'}t+i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}} + i\omega_{\mathbf{p}'}a_{\mathbf{p}'}^{\dagger}e^{i\omega_{\mathbf{p}'}t-i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}}\right) \quad (4.57)$$

展开之后获得四项，我们要计算其中的这个三重积分。对空间的部分全都是 $\exp(\pm ix\cdot(p\pm p'))$，积分后得到的都是 $\delta(p-p')$。最终，哈密顿量有以下形式：

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3p\frac{1}{2\omega_p}&((a_pa_{-p}\exp(-2i\omega_pt) + a_p^\dagger a_{-p}^\dagger\exp(2i\omega_pt))\times(-\omega_p^2+\|p\|^2+\mu^2) \\ &+ (a_pa_p^\dagger + a_p^\dagger a_p)\times(\omega_p^2+\|p\|^2+\mu^2)) \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3p(a_pa_p^\dagger + a_p^\dagger a_p)\omega_p \end{aligned}$$

然而，在之前，我们做第二量子化的时候利用计数算符写出了能量：

$$H = \int \mathrm{d}^3p(a_p^\dagger a_p)\omega_p$$

我们凑一凑：

$$\begin{aligned} H &= \int \mathrm{d}^3p\left(a_p^\dagger a_p + \frac{1}{2}[a_p,a_p^\dagger]\right)\omega_p \\ &= \int \mathrm{d}^3p\left(a_p^\dagger a_p + \frac{1}{2}\delta^{(3)}(0)\right)\omega_p \end{aligned}$$

所以其实有一个无穷大的常数。在我们现在的研究中，这个常数显然是无关紧要的（不过在广义相对论中这很重要，并且 Einstein 通过引入宇宙学常数的方式来调整了宇宙的能量）。一种理解这个常数的方式是因为这里有无限个谐振子，而我们将其零点能叠加起来。

我们发现这个奇怪的无穷大零点能只是排序的问题，而在正则量子化中，算符的排序本来就是模糊的，所以我们定义一组自由标量场的正规排序积：

$$:\phi^{a_1}(x_1)\phi^{a_2}(x_2)\cdots\phi^{a_n}(x_n):$$

为将所有湮灭算符置于右侧，产生算符则置于左侧的结果。应用到刚才的哈密顿量上，假定我们定义：

$$H=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x(:\pi^2+\|\nabla\phi\|^2+\mu^2\phi^2:)$$

我们即可处理零点能发散的问题。