标量场量子化

#Quantum_Field_Theory

量子场论需要保持相对论因果性

在相对论性量子力学里面，我们要特别注意因果关系不能被违反。例如，两个相隔很远的人不被允许在极短的时间间隔内对一个系统的非对易的两个物理量进行观测，否则信息将超光速传播。具体而言，考虑时空的两个区域 R_1, R_2，对于任意 $x_1 \in R_1, x_2 \in R_2$ 之间都有一条类空测地线相连。设两个区域的观者可以测量的物理量为 $\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2$，则必有 $[\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2] = 0$。一个典型的经典的例子是电磁场，显然，你无法测量与你没有因果联系的区域的电磁场。因此，在构建相对论性量子力学的时候，一个自然的想法是我们应该引入与时空点绑定的可观测量，也就是量子场算符 $\phi(x)$。注意：我们构建的场算符将不仅依赖于空间，还要依赖于时间。也就是说，在整个量子场论课程中，我们将使用海森堡绘景。

标量量子场应满足的条件

我们将从 N 个对易的场算符 $\phi^a(x)$ 开始，下面列出我们希望场算符满足的条件：

- 若 x, y 之间没有因果联系，则 $[\phi^a(x), \phi^b(y)] = 0$
- 场量是厄米算符
- 能在平移算符作用下被正确平移：$\exp(-iP \cdot y)\phi^a(x)\exp(iP \cdot y) = \phi^a(x-y)$
  注意这里的 P 是 4-动量算符，它生成时空中的平移。回忆一下：

  $$|p\rangle = \sqrt{(2\pi)^3}\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}|\boldsymbol{p}\rangle$$

  从而：

  $$P = \int p|p\rangle\langle p|\mathrm{d}p$$

- 具有洛伦兹协变性：$U(\Lambda)^\dagger\phi^a(x)U(\Lambda) = \phi^a(\Lambda^{-1}x)$
- 是创生算符和湮灭算符的线性组合：$\phi^a(x) = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}[F_{\boldsymbol{p}}(x)a_{\boldsymbol{p}} + G_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}}^\dagger]$
  注意：虽然我们使用了 3-动量对应的创生算符和湮灭算符，但是 4-动量算符和 3-动量算符之间只有一个系数的差别。

我们先解释第三点。考虑一个简单的情形作为例子考虑我们有一些电子气体，我们可以将电子气体的密度视作一个可观测量 $\rho(\boldsymbol{x})$，对于态 $|\psi\rangle$ 可以求出其期望：

$$f(\boldsymbol{x})=\langle\psi|\rho(\boldsymbol{x})|\psi\rangle$$

现在，我们将这个态做空间平移，将整盒电子气体都向右平移 a，那么我们得到：

$$|\psi'\rangle=\exp(-i\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{a})|\psi\rangle\quad\langle\psi'|\rho(\boldsymbol{x})|\psi'\rangle=f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$$

或者我们可以说 $\exp(-i\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{a})\rho(\boldsymbol{x})\exp(-i\boldsymbol{P}\cdot a)$ 这个算符测量的就是 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}$ 处的电子密度，从而我们将其写为 $\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$。我们将这一段描述推广到闵氏时空中，就得到了第三个条件。第四点的解释也是类似的，可以先考虑一个一般的场的旋转变换：

$$\phi^a(\boldsymbol{x})\to R^a_b\phi'^a(R^{-1}\boldsymbol{x})$$

特别地，当 ϕ^a 是标量场的时候，$R^a_b=\delta^a_b$。将这些讨论推广到洛伦兹变换，就得到条件 4。对于条件 5，这是一个非常简化的条件，如果这个条件不够，我们再使用这些算符的更高次幂。

标量量子场的显式形式

接下来我们要利用之前谈论二次量子化过程中给出的用于生成 3-动量为 $\boldsymbol{p}$ 的粒子的算符 $a^\dagger_{\boldsymbol{p}}$ 及其湮灭算符 $a_{\boldsymbol{p}}$，以及用于生成、湮灭 4-动量为 p 的粒子的算符：

$$\alpha^\dagger(p)=(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}a^\dagger_{\boldsymbol{p}}\quad\alpha(p)=(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}a_{\boldsymbol{p}}$$

注意生成、湮灭算符之间的对易关系：

$$[a_{\boldsymbol{p}},a^\dagger_{\boldsymbol{p}'}]=\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\quad[a_{\boldsymbol{p}},a_{\boldsymbol{p}'}]=[a^\dagger_{\boldsymbol{p}},a^\dagger_{\boldsymbol{p}'}]=0$$

此外，它们在平移变换、洛伦兹变换下有如下性质：

$$\exp(iP\cdot x)\alpha^\dagger(p)\exp(-iP\cdot x)=\exp(ip\cdot x)\alpha^\dagger(p)\quad\exp(iP\cdot x)\alpha(p)\exp(-iP\cdot x)=\exp(-ip\cdot$$

$$U(\Lambda)\alpha^\dagger(p)U^\dagger(\lambda)=\alpha^\dagger(\Lambda p)\quad U(\Lambda)\alpha(p)U^\dagger(\lambda)=\alpha(\Lambda p)$$

下面我们开始构建我们的量子场。我们可以先构建 $\phi(0)$，因为我们构建好之后可以使用平移算符把它移动到其他地方。所以我们考虑 $\phi(0)$ 的一个一般形式，我们要产生不同的 p 的粒子，因此我们要对所有 p 做个积分。根据质能关系，p^0 可以由剩下三个分量导出，从而我们只需要将积分微元设置为 $\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}$，于是最一般的情况看起来是这样：

$$\phi(0)=\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\boldsymbol{p}})}[f_p\alpha(p)+g_p\alpha^\dagger(p)]$$

这里 f_p, g_p 的解显然有无限多个，因此我们需要用前面提出的条件对标量场进行约束。考虑洛伦兹协变性的一个特例：$U(\Lambda)\phi(0)U(\Lambda)=\phi(0)$，进行计算得到：

$$
\begin{aligned}
U(\Lambda)\phi(0)U^\dagger(\Lambda) &= \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\boldsymbol{p}})}[U(\Lambda)f_p\alpha(p)U^\dagger(\Lambda)+U(\Lambda)g_p\alpha^\dagger(p)U^\dagger(\Lambda)] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\boldsymbol{p}})}[f_p\alpha(\Lambda p)+g_p\alpha^\dagger(\Lambda p)]
\end{aligned}
$$

现在我们不妨做个换元 $p'=\Lambda p$ ，而后积分将对 Λp 进行，由于我们事先放置了洛伦兹变换下的不变测度，所以无非是：

$$
U(\Lambda)\phi(0)U^\dagger(\Lambda) = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\boldsymbol{p}})}[f_{\Lambda p}\alpha(p)+g_{\Lambda p}\alpha^\dagger(p)]
$$

这意味着 $f_{\Lambda p}=f_p, g_{\Lambda p}=p$，换言之，$f, g$ 应当为常数！
下面我们可以计算出 $\phi(x)$：

$$
\phi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3(2\omega_p)}[f\exp(-ip\cdot x)\alpha(p)+g\exp(ip\cdot x)\alpha^\dagger(p)]
$$

下面，我们将换回 3-动量的生成算符和湮灭算符。总结一下，现在我们知道要把场表示为部分的和，即：

$$
\phi(x) = f\phi^{(+)}(x)+g\phi^{(-)}(x)
$$

其中：

$$
\phi^{(+)}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}}a_{\boldsymbol{p}}\exp(-ip\cdot x) \quad \phi^{(-)}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}}a_{\boldsymbol{p}}^\dagger\exp(ip\cdot x)
$$

关于场的厄米性的问题，容易注意到满足以下条件的组合均是厄米的：

$$
\phi(x) = \exp(i\theta)\phi^{(+)}(x)+\exp(-i\theta)\phi^{(-)}(x)
$$

现在我们考虑最后一个条件：条件 1。下面我们可能出现三个可能性：

- 可能性 A：我们确实能从 $\phi^{(+)}(x)$ 和 $\phi^{(-)}(x)$ 凑出两个线性组合（可观测量），使得它们满足类空对易性
- 可能性 B：我们找不到这样的两个可观测量，只能退而求其次构造一个。此时我们有 $\phi(x)=\exp(i\theta)\phi^{(+)}(x)+\exp(-i\theta)\phi^{(-)}(x)$。为了简化起见，我们令 $a_{\boldsymbol{p}}\to\exp(i\theta)a_{\boldsymbol{p}}, a_{\boldsymbol{p}}^\dagger\to\exp(i\theta)a_{\boldsymbol{p}}^\dagger$，从而可以简单地写成 $\phi(x)=\phi^{(+)}(x)+\phi^{(-)}(x)$
- 可能性 C：以上假设 5 就是错误的。

我们首先开始验证可能性 A，令：

$$\phi^1(x)=\phi^{(+)}(x)+\phi^{(-)}(x)\quad \phi^2(x)=i(\phi^{(+)}(x)-\phi^{(-)}(x))$$

计算它们的对易子：

$$\begin{aligned}[\phi^1(x),\phi^2(x)]&=i[\phi^{(+)}(x)+\phi^{(-)}(x),\phi^{(+)}(y)-\phi^{(-)}(y)]\\&=\end{aligned}$$

其中有两种类型的对易子，于是计算：

$$\begin{aligned}[\phi^{(+)}(x),\phi^{(-)}(y)]&=\left[\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}}a_{\boldsymbol{p}}\exp(-ip\cdot x),\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}'}}}a^\dagger_{\boldsymbol{p}'}\exp(-ip'\cdot x)\right]\\&=\int\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}}\exp(-ip\cdot x)\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}'}}}\exp(-ip'\cdot x)[a_{\boldsymbol{p}},a^\dagger_{\boldsymbol{p}'}]\\&=\int\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}}\exp(-ip\cdot x)\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}'}}}\exp(-ip'\cdot x)\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\boldsymbol{p}})}\exp(-ip\cdot(x-y))\\&=\Delta_+(x-y,\mu^2)\end{aligned}$$

注意 $\Delta_+(x-y)$ 是一个在洛伦兹变换下的标量，因为积分号里面的第一部分是一个在洛伦兹变换下的不变测度，而 $p\cdot(x-y)$ 作为两个四维矢量的内积一定是在洛伦兹变换下不变的。另外一个有用的性质是 $[\phi^{(-)}(x),\phi^{(+)}(x)]=-\Delta_+(y-x)$ 。注意到若 $\Delta_+(x)$ 对 x^0 求一阶导数，将得到：

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\Delta_+(x)=-\frac{i}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\exp(-ip\cdot x)$$

回忆一下，在第一章中为了检查我们构造出的相对论粒子是否会超过光速传播，我们计算了如下积分，取 $\langle x|\psi\rangle=\delta^3(x)$：

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{x}|\exp(-iHt)|\psi\rangle&=\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\exp(i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})\exp(-i\omega_{\boldsymbol{p}}t)\\&\le\exp((r-t)\mu)\left(\frac{1}{(r-t)^2}+\frac{\mu}{(r-t)}\right)\end{aligned}$$

但是这个积分并不为 0，所以 $\Delta_+(x-y)$ 绝对不可能为 0。因此可能性 A 是无效的。所以我们现在开始检查可能性 B：

$$
\begin{aligned}
[\phi(x),\phi(y)] &= \Delta_+(x-y)-\Delta_+(y-x)\\
&= i\Delta(x-y)
\end{aligned}
$$

利用洛伦兹变换的一个性质，一个类空矢量在洛伦兹变换下可以变成它的负值，再利用 Δ_+ 的洛伦兹不变性，我们必然有：

$$
\Delta_+(x-y)=\Delta_+(y-x)\quad \text{if } (x-y)^2\le 0
$$

从而若 x, y 无因果联系，必然有 $[\phi(x),\phi(y)]=0$。从而可能性 B 成立了，我们给出了标量量子场的显式形式是：

$$
\begin{aligned}
\phi(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}}\left(a_{\boldsymbol{p}}\exp(-ip\cdot x)+a^\dagger_{\boldsymbol{p}}\exp(ip\cdot x)\right)\\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\boldsymbol{p}})}\left(\alpha(p)\exp(-ip\cdot x)+\alpha^\dagger(p)\exp(-ip\cdot x)\right)
\end{aligned}
$$

标量场作为基本对象

下面我们将已经构建出的标量场的显式形式推出标量场的一些性质，并且说明关于标量场的这些理论是可以从这些性质上重建起来的。
第一个性质是所谓 KG 方程：

$$
\Box^2\phi(x)+\mu^2\phi(x)=0
$$

要验证它，直接计算得到：

$$
\Box^2\phi(x)+\mu^2\phi(x)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^3}\delta(p^2-\mu^2)\theta(p^0)(-p^2+\mu^2)(\alpha(p)\exp(-ip\cdot x)+\alpha^\dagger(p)\exp(ip\cdot x
$$

由 $\delta(\cdot)$ 的筛选性质立刻看出上式为 0。此外我们有另一个性质：

$$
[\phi(x),\phi(y)]=i\Delta(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\boldsymbol{p}})}[\exp(-ip\cdot(x-y))-\exp(ip\cdot(x-y))]
$$

我们将上面的 KG 方程和对易子，连同标量场在洛伦兹变换、平移下的行为作为公设，重新推出整个理论。首先我们写下 KG 方程的一组通解：

$$
\phi(x)=\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}}\left(a_{\boldsymbol{p}}\exp(-ip\cdot x)+b_{\boldsymbol{p}}\exp(ip\cdot x)\right)
$$

首先利用对易的条件很容易得到 $b_{\boldsymbol{p}}=a^\dagger_{\boldsymbol{p}}$，然后我们需要将这个式子放到对易子的条件里面导出 $a_{\boldsymbol{p}}, a^\dagger_{\boldsymbol{p}}$ 的对易子，我们这里就不再做计算，因为通过前面的推导我们已经知

道了 $[a_{\boldsymbol{p}}, a^\dagger_{\boldsymbol{p}'}] = \delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')$ 是一个合理的结果，所以我们这里就直接使用了。至于这两个算符到底是什么东西，我们可以利用一下平移性质：

$$
-\frac{\partial \phi(x-a)}{\partial a^0}|_{a=0} = \frac{\partial \phi(x)}{\partial t} = i[H, \phi(x)]
$$

将上面的表述代入，立刻得到：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\int \cdots\right) &= \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}}(-i\omega_{\boldsymbol{p}} a_{\boldsymbol{p}} \exp(-ip\cdot x) + i\omega_p a^\dagger_{\boldsymbol{p}} \exp(ip\cdot x)) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}}(i[H, a_{\boldsymbol{p}}] \exp(-ip\cdot x) + i[H, a^\dagger_{\boldsymbol{p}}] \exp(ip\cdot x))
\end{aligned}
$$

根据它们与哈密顿量的对易关系，我们就可以猜出它们是产生、湮灭算符。

现在我们要进一步推进，将对对易子的限制继续弱化。显然，对易子 $[\phi(x), \phi(y)]$ 也满足 KG 方程：

$$
(\Box_x^2 + \mu^2)[\phi(x), \phi(y)] = 0
$$

因而如果我们知道 $[\phi(\boldsymbol{x}, t), \phi(\boldsymbol{y}, t)]$ 以及 $[\dot{\phi}(\boldsymbol{x}, t), \phi(\boldsymbol{y}, t)]$，我们可以通过求解上面这个 PDE 来给出全部时间、空间点上的对易子（还有一个理解：类空矢量可以通过洛伦兹变换使得其时间分量变成 0）。于是我们将计算下面两个量来替代之前对于对易子的限制：

$$
[\phi(\boldsymbol{x}, t), \phi(\boldsymbol{y}, t)] = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\boldsymbol{p}})}(\exp(-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})) - \exp(i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))) = 0
$$

这可以直接看出，因为被积函数是奇函数。另一部分：

$$
\begin{aligned}
[\dot{\phi}(\boldsymbol{x}, t), \phi(\boldsymbol{y}, t)] &= \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\boldsymbol{p}})}(-i\omega_{\boldsymbol{p}} \exp(-ip\cdot(x-y)) - i\omega_{\boldsymbol{p}} \exp(i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))) \\
&= -i\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{2\cdot(2\pi)^3}(\exp(-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})) + \exp(i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))) \\
&= -i\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\exp(-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})) \\
&= -i\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})
\end{aligned}
$$

第三个等号利用了被积函数是偶函数，第四个等号利用了 $\delta(\cdot)$ 的傅里叶变换。

一些奇怪的类比

我们在研究粒子的非相对论量子场论中有如下对易关系：

$$[q^a(t), q^b(t)] = 0 \quad [q^a(t), p^b(t)] = i\delta^{ab} \quad [p^a(t), p^b(t)] = 0$$

我们刚才算出来的对于对易子的两个约束恰好与前两个式子特别类似，甚至可以通过计算验证 $[\dot{\phi}(\boldsymbol{x}, t), \dot{\phi}(\boldsymbol{y}, t)] = 0$（这是因为被积函数仍然是奇函数），这与第三个对易关系很类似。所以我们的推导出的这个系统似乎与某种正则量子化系统建立了联系。下面我们将探寻这种联系。