Day 2

The simplest many-particle theory / 第二 Second 量子化 Quantization

根据上一节末提出的问题，在本节中我们将考虑任意个无自旋、自由相对论粒子。但本节的大部分中我们先使用非相记号。我们将二粒子态记为 $|p_1, p_2\rangle$。

它的归一化表示 $\langle p_1, p_2 | p_1', p_2'\rangle = \delta^{(3)}(p_1-p_1')\,\delta^{(3)}(p_2-p_2')$ 两粒子态也为 H、P 的本征态： $H|p_1,p_2\rangle = (\omega_{p_1}+\omega_{p_2})|p_1,p_2\rangle$　$P|p_1,p_2\rangle = (\vec{p}_1+\vec{p}_2)|p_1,p_2\rangle$.

一定有0粒子的情形，所以我们需要真空态 $|0\rangle$。 $H|0\rangle = 0$, $P|0\rangle=0$, $U(\Lambda)|0\rangle = |0\rangle$, $\langle 0|0\rangle = 1$，这在 Fock 空间上一个态可以如下展开

$$|\psi\rangle = \underbrace{\psi_0|0\rangle}_{\text{有0粒子}} + \int \psi_1(p)\underbrace{|p\rangle}_{\text{有1粒子且动量为p}} dp + \frac{1}{2!}\int \psi_2(p_1,p_2)\underbrace{|p_1,p_2\rangle}_{\text{有两粒子且}p_1,p_2} dp_1\, dp_2 + \frac{1}{3!}\int\cdots \quad \cdots$$

有这样的表示后，Fock空间变得无比复杂。我们应找到一个有效的处理问题。所谓粒子以及...

为了使积分变为求和，我们做一些"违背祖宗的决定"(暂时放弃 Lorentz 对称性和旋转对称性)。我们将体系放进盒子里，则 $\vec{p} = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z)$.

在"占据数表象"中，我们可以用占据数描述一个态，即 $N(\vec{p})$, for all $\vec{p}$. 注意这里并没有新基底，只是relabel一下。e.g. $|p\rangle$ 是对应 $|N(p)=1\rangle$ 的态。 $|p_1,p_2\rangle$ 对应于 $|N(p_1)=1, N(p_2)=1\rangle$ 的态。

所以粒子数表象非常适合描述 Boson 组成的系统。有 $H = \sum_p \omega_p N(p)$,　$P = \sum_p \vec{p}\, N(\vec{p})$. 所以实际上这个系统可以类比为许多个不耦合的振子，而且它们没有零点能。

考虑一个振子，将它的能量写为 $H = \frac{1}{2}\omega(p^2+q^2-1)$. 构造生灭算符。 灭: $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(q+ip)$,　生: $a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(q-ip)$,　$H = \frac{1}{2}\omega[p^2+q^2-1] = \omega a^\dagger a = \omega N$ → 粒子数算符.

计算对易子 $[a,a^\dagger] = 1$, $[H,a] = -\omega a$, $[H,a^\dagger] = \omega a^\dagger$. $a^\dagger$, a 就是用来"爬梯子"的. $Ha^\dagger|E\rangle = (E+\omega)a^\dagger|E\rangle$　$Ha|E\rangle = (E-\omega)a|E\rangle$

由于 $H = \omega a^\dagger a$，故 H 之期望不可为负。 $H|E_0\rangle = \omega a^\dagger a|E_0\rangle = 0 \Rightarrow E_0 = 0$　从而 $|E_0\rangle = |0\rangle$. 记 $a^\dagger|n\rangle = C_n|n+1\rangle$

$\langle n|aa^\dagger|n\rangle = |C_n|^2\langle n+1|n+1\rangle = \langle n|a^\dagger a+1|n\rangle = \langle n|(\frac{H}{\omega}+1)|n\rangle = (n+1)\langle n|n\rangle = (n+1)$.　从而 $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$　同理 $a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$.

我们可以证明这样做出来的 $\{|n\rangle\}$ 是全部的能量本征态。一个问题是若 $[p,A]=0$, $[q,A]=0$ 则 $A = \lambda I$. 没有一个态不在"梯子"上，那可以通过一个投影算符 P 将它投在梯子上。

那么 $[P, a] = [P, a^\dagger] = 0$ (2). 所以 $P = \lambda I$，是恒等映射，从而不会有一个态不在 $\{|n\rangle\}$ 张成的空间内。

下面把这一套搬到 Fock 空间内。Fock 态表示 $|N(p)=\cdot, N(p')=\cdot, \ldots\rangle$ 可以看作一堆谐振子之直积。从而有 $[a_p, a_{p'}] = [a_p^\dagger, a_{p'}^\dagger] = 0$　$[a_p, a_{p'}^\dagger] = \delta_{pp'}$

$H = \sum_p \omega_p a_p^\dagger a_p$　$P = \sum_p \omega_p a_p^\dagger a_p$　真空态 $a_p|0\rangle = 0$. 在研究连续极限到全空间的粒子系统时，只需将 p 回归连续，求和变积分。在这样的操作下，可使 $|p\rangle$ 的归一化保持。

注意到 p 的态可以通过一个生成算符生成。 $a_p^\dagger|0\rangle = |p\rangle$.　$\langle p'|p\rangle = \langle 0|a_{p'}a_p^\dagger|0\rangle = \langle 0|[a_{p'}, a_p^\dagger]|0\rangle + \langle 0|a_p^\dagger a_{p'}|0\rangle = \langle 0|\delta^3(p-p')|0\rangle = \delta^3(p-p')$.

再检查 $|p\rangle = a_p^\dagger|0\rangle$ 的能量：

$H|p\rangle = Ha_p^\dagger|0\rangle$

$= \int dp'^3\, \omega_{p'}\, a_{p'}^\dagger a_{p'} a_p^\dagger|0\rangle$　同样要"利用"一下对易关系.　$[a_{p'}^\dagger a_{p'}, a_p^\dagger] = a_{p'}^\dagger a_{p'} a_p^\dagger - a_p^\dagger a_{p'}^\dagger a_{p'}$

$= \int dp'^3\, \omega_{p'}\, [a_{p'}^\dagger a_{p'}, a_p^\dagger]|0\rangle + \int dp'^3\, \omega_{p'}\, a_p^\dagger a_{p'}^\dagger a_{p'}|0\rangle$

$= \int dp'^3\, \omega_{p'}\, [a_{p'}^\dagger a_{p'}, a_p^\dagger]|0\rangle + \int dp'^3\, a_p^\dagger H|0\rangle$.　　$[a_{p'}^\dagger a_{p'}, a_p^\dagger] = a_{p'}^\dagger[a_{p'}, a_p^\dagger] = a_{p'}^\dagger\,\delta(p-p')$.

$$= \int dp'^3 \, \omega_{p'} \cdot \delta(p-p') \cdot a_{p'}^\dagger |0\rangle = \omega_p \, a_p^\dagger |0\rangle = \omega_p \cdot |p\rangle.$$

若我们想得到原来的 $|p_1, p_2\rangle$ 态，我们只需 $|p_1, p_2\rangle = a_{p_1}^\dagger a_{p_2}^\dagger |0\rangle$.

在最后，我们应保证这套理论确实相对论协变。我们要利用另一种归一化 我们的动量态 $|p\rangle = \sqrt{(2\pi)^3} \cdot \sqrt{2\omega_p}\,|p\rangle$. 我们把相对论升降算符记作

$\alpha^\dagger(p) = (2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_p}\, a_p^\dagger$ 　从而 $\alpha^\dagger(p)|0\rangle = (2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_p}\, a_p^\dagger |0\rangle = |p\rangle$. 　取一下共轭有降算符 $\alpha(p) = (2\pi)^{3/2} \cdot \sqrt{2\omega_p}\, a_p$. 下面验证这确实是洛伦兹协变的。

$|0\rangle$ 态是唯一的不简并的，所以它不可以在洛伦兹变换下变化 $\Rightarrow U(\Lambda)|0\rangle = |0\rangle$. 之前验证 $U(\Lambda)|p\rangle = |\Lambda p\rangle$ 可以「猜测」，对于多粒子系统，每个粒子的动量必须在洛伦兹下变化，$U(\Lambda)|p_1 \cdots p_n\rangle = |\Lambda p_1 \cdots \Lambda p_n\rangle$.

从而 $|\Lambda p\rangle = U(\Lambda)|p\rangle = U(\Lambda)\alpha^\dagger(p)|0\rangle = U(\Lambda)\alpha^\dagger(p)\left(U^\dagger(\Lambda)U(\Lambda)\right)|0\rangle = U(\Lambda)\cdot\alpha^\dagger(p)\cdot U^\dagger(\Lambda)|0\rangle$ 　从而，用于生成 $|\Lambda p\rangle$ 的生算符 $\alpha^\dagger(\Lambda p) = U(\Lambda)\cdot\alpha^\dagger(p)\cdot U^\dagger(\Lambda)$. *这里变化方式和 p 态反着 因为它们"扮演"不同角色.

取个共轭有降算符 $\alpha(\Lambda p) = U(\Lambda)\cdot\alpha(p)\cdot U(\Lambda)^\dagger$. 为了验证正确性，可做如下计算：

$U(\Lambda)|p, p_1, \cdots p_n\rangle \overset{①}{=} |\Lambda p, \Lambda p_1, \cdots \Lambda p_n\rangle$

$\overset{②}{=} U(\Lambda)\cdot\alpha(p)\,|p_1 \cdots p_n\rangle = U(\Lambda)\cdot\alpha(p)\cdot U^\dagger(\Lambda)\,U(\Lambda)\cdot|p_1 \cdots p_n\rangle = U(\Lambda)\cdot\alpha(p)\,U^\dagger(\Lambda)\,|\Lambda p_1 \cdots \Lambda p_n\rangle = \alpha(\Lambda p)|\Lambda p_1 \cdots \Lambda p_n\rangle = |\Lambda p, \Lambda p_1 \cdots \Lambda p_n\rangle$

$\overset{③}{=} U(\Lambda)\cdot\alpha^\dagger(p_1)\cdot\alpha^\dagger(p_2)\cdots\alpha^\dagger(p_n)|0\rangle = U(\Lambda)\,\alpha^\dagger(p_1)\cdot U^\dagger(\Lambda)\cdot U(\Lambda)\,\alpha^\dagger(p_2) \cdots\cdots \alpha^\dagger(p_n)\cdot U^\dagger(\Lambda)\cdot U(\Lambda)|0\rangle = \alpha^\dagger(\Lambda p_1)\cdot\alpha^\dagger(\Lambda p_2)\cdots|0\rangle = \cdots$

考虑生灭算符在平移下的变换。回平移算符 $U(a) = \exp(i \cdot P \cdot a)$. 　$U(a)|p_1 \cdots p_n\rangle = \exp(i\, a \cdot \sum p_i)\,|p_1 \cdots p_n\rangle$ 　平移的时候 态 $|\cdot\rangle$ 被推动、所以为了确保系统的平移不变性，算符也得被推动，

$\alpha^\dagger(p) \to U(a)\cdot\alpha^\dagger(p)\cdot U^\dagger(a)$. 　$\alpha(p) \to U(a)\cdot\alpha(p)\cdot U^\dagger(a)$ 　*其实这里更深层次的原因是场算符应在平移下协变，场算符由生灭组合得到.

考虑生算符 $U(a)\cdot\alpha^\dagger(p)\,U^\dagger(a)|0\rangle = U(a)\cdot\alpha^\dagger(p)|0\rangle = U(a)\cdot|p\rangle = \exp(i\vec{p}\cdot\vec{x})\cdot|p\rangle$ 　$\Rightarrow U(a)\cdot\alpha^\dagger(p)\,U^\dagger(a) = \exp(i\cdot\vec{p}\cdot\vec{x})\,\alpha^\dagger(p)$ 　取共轭 $U(a)\cdot\alpha(p)\cdot U^\dagger(a)$ 平移后 $\alpha(p) = \exp(-i\vec{p}\cdot\vec{x})\,\alpha(p)$

*为什么我们一直用"生的对应生灭"这个算符呢？这是因为定义上 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip)$ 　$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip)$. 在任一个系统这样的.（这也是物理数学协变的伸张）.