Day 1. Adding Special Relativity to Q.M.

在本文的讨论中为简化起见，采用单位制 $\hbar=c=1$.

我们研究问题的背景是 Minkowski 时空，一个事件 x^μ，一个粒子的动量 p^μ，在这里使用度规 $(1,-1,-1,-1)$，从而 $a^\mu=(a^0,\vec{a})$ 与 $b^\mu=(b^0,\vec{b})$ 之内积 $a^\mu b_\mu=a^0b^0-\vec{a}\cdot\vec{b}$.

度规记为 $g_{\mu\nu}$，逆度规 $g^{\mu\nu}$，有 $g_{\mu\lambda}g^{\lambda\nu}=\delta_\mu^\nu$. 在选择不同的时间指向/洛伦兹参考系时，流形 $(\mathbb{R}^4,\eta_{ab})$ 上任意两点之间的时空间隔不会变化，从而矢量的分量要变化.

这种变换称为 Lorentz 变换. $x^\mu\to x'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$. Lorentz 变换保矢量内积，具体而言 $\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu=\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\sigma x^\sigma\Lambda^\nu{}_\rho x^\rho$. 任意两 L 变之积仍为 L 变. 所以所有 L 变成群 $O(3,1)$.

狭相中的洛变实际上是 $O(3,1)$ 的一个连通分支 $SO(3,1)$，这是因为洛变是被一个连续参数参数化的 $(\frac{v}{c})$. 要从 $SO(3,1)$ 群元变 $O(3,1)$ 群元，应对 $SO(3,1)$ 群元做 $1, P, T, PT$ 操作之一.

使用与课本相反的记号，一个四矢 a^μ 被称为类时的 $a^\mu a_\mu>0$，$a^\mu a_\mu=0$ (类光)，$a^\mu a_\mu<0$ (类空).

在狭相中，不依赖坐标的协变导符和依赖坐标的普通导符相同，记作 $\partial_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}=(\frac{\partial}{\partial t},\nabla)$. 二阶导子 $\Box^2=\partial^\mu\partial_\mu=(\partial^0)^2-\nabla^2$. 作为两个导子的"内积"，它是 L 不变的，或不依赖标架的.

对全空间积分写为 $\int d^4x$. 例如 Fourier 正逆变换 $\tilde{F}(k)=\int d^4x\, F(x)\exp(i\vec{k}\cdot\vec{x})$.

$$F(x)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\tilde{F}(k)\exp(-i\vec{k}\cdot\vec{x})$$

我们将阶跃函数记为

$$\theta(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}\qquad \frac{d\theta(x)}{dx}=\delta(x).$$

下面我们正式考虑在自由单粒子上添加狭义相对论. 以 p 代表了一动量算符，以其本征值 p 标记本征态. 在标准 QM 中有 $H|p\rangle=\frac{p^2}{2m}|p\rangle$.

我们可以非常直觉地说，若粒子有静质量 m，则应当有 $H|p\rangle=\sqrt{p^2+m^2}\,|p\rangle=\omega_p|p\rangle$. 这就完了吗? 不知道! 判断它对与否的标准是它是否是洛伦兹协变的.

在考虑这个理论在 Lorentz 变换下怎么变之前，先考虑在平移下会发生什么. 之前我们说"动量是空间平移生成元". 这里的空间平移是 $\mathbb{R}^3$ 中平移，现在我们在 $\mathbb{R}^4$ 中平移，考虑由一个四矢 a^μ 指定的平移.

平移算符的性质: $U(a)U(a)^\dagger=1$. $U(0)=1$. $U(a)U(b)=U(a+b)$. 那么以上要求的平移算符是 $U(a)=\exp(i\,\vec{p}\cdot\vec{a})$，$\vec{p}=(\hat{H},\vec{p})$，$\vec{p}\cdot\vec{a}=p^0\cdot H-\vec{p}\,\vec{a}$

将 $|x\rangle$ 诠释为位置算符(尽管我们并没定义)的本征态，则与非相 QM 一样平移算符可以平移本征态. $\exists\, U(a)|0\rangle=|a\rangle$. 我们也可以对整个系统进行平移，假设我们空间中还有算符 (e.g. 场算符)，为了保证 $O(x)$ 测量的东西不变. *其实严格讲这里应该注意 QFT 的算符表征，整个量子场的构建由一个真空态和一串作用在真空上的算符 $O(x)$，将 $O(x)$ 作用在真空上就可得到各个时空点上的信息.

我们平移这个系统一定是"整体平移"，平移完以后在新位置测得的东西应该和原来一样. 所以除了态要平移，场算符也应当平移. $|0\rangle\longrightarrow|a\rangle$. 则在 $x+a$ 处测之值应与原在 x 处测之值相同.

从而 $O(x+a)=U(a)\,O(x)\,U(a)^\dagger$. 这样才能保持系统的平移不变性. ⚠ $O(x+a)=U(a)\,O(x)\,U(a)^\dagger$ 这样的变化只对算符这样"localized in space" / 是时空点有关的算符成立. 位置算符显然不适用这样的变化方式.

下面考虑旋转. 将空间旋转记为 $R\in SO(3)$. 则应有一个幺正算符使 (a) $U(R)U(R)^\dagger=1$ (b) $U(1)=1$ (c) $U(R_1)U(R_2)=U(R_1R_2)$.

根据标准 QM，平移、旋转的本质是保体系的: 平移后，x 的期望跟着平移. 旋转后，x、p 的期望跟着旋转. 在这里也一样. $\langle\psi'|P_3|\psi'\rangle=R\langle\psi|P_3|\psi\rangle$. $|\psi'\rangle=U(R)|\psi\rangle$.

$\Rightarrow U(R)^\dagger P_3U(R)=RP_3$. 由于自由粒子 H 在旋转下不变 $\Rightarrow U(R)^\dagger H\,U(R)=H$. 一个合理的 $U(R)$ 为 $U(R)|p\rangle=|Rp\rangle$. (b),(c) 性质不证自明，看 (a).

$U(R)\cdot U(R)^+ = U(R)\cdot\left[\int d^3p\,|p\rangle\langle p|\right]U(R) = \int d^3p\,(U|p\rangle)(\langle p|U^+) = \int d^3p\,|Rp\rangle\langle Rp|$ let $p'=Rp$. 由于Jacobian为1，可直接换元，从而得证。

为了证明 p在旋转下遵循矢量式变化。

$U(R)^+ p\, U(R) = U^{-1}(R)\, p\, (U^{-1}(R))^+ = U(R^{-1})\, p\, (U(R^{-1}))^+$

$= U(R^{-1})\, p \int d^3p\, |p\rangle\langle p|\, U(R^{-1})^+ = \int d^3p\, p\, |R^{-1}p\rangle\langle R^{-1}p|$ let $p'=R^{-1}p$.

$= \int d^3p'\, Rp'\, |p'\rangle\langle p'| = Rp$

这里还要注意一下，若 $U(R)U(R)^+=1$ 和 $U(R)^+ p\, U(R) = R p$ 不成立了会发生什么。在证明过程中都用了 $\int d^3p\,|p\rangle\langle p|=1$，和 $p'=Rp$，$\int d^3p'\,|p'\rangle\langle p'|=1$。这其实是，换了个积分变量后积分形式上一样，所谓"协变性"。

下面研究洛伦兹协变性，先再用旋转举例子来说明什么叫"旋转协变"的。假设我们的3-动量写为 $|p\rangle_S=\sqrt{1+p_z^2}\,|p\rangle$，此时完备性关系，$1=\int d^3p\,\frac{1}{1+p_z^2}|p\rangle_S\langle p|$。

若这个时候将旋转算符的作用取为 $U_S(R)|p\rangle_S = |Rp\rangle_S$，从而U(R)的幺正性就被破坏了。（由于 $d^3p\,\frac{1}{1+p_z^2} \neq d^3p'\,\frac{1}{1+p_z'^2}$，换言之，$d^3p\,\frac{1}{1+p_z^2}$ 并非旋转不变）。

所以什么是在洛伦兹变换下不变的？由于L要保持间隔的不变性，或由L得Jacobian，$d^4p=d^4p'$。但这并不是我们要的。首先，我们的本征态以3动量 $|p\rangle$ 标记。

所以我们需要 $\vec p$ 空间内不变测度。原则上是将一个"维度"压"在平面上，就像 $\int dp^0\,(d^3p)$ 这样。但 p^0 本身依赖于 p^1, p^2, p^3，有 $p^2=(p^0)^2-\|\vec p\|^2=\mu^2$ 的关系。

所以在积分的时候应乘一个积分 $\delta(p^2-\mu^2)\,\theta(p^0)$。（注意这个积分也是洛伦兹不变的）。从而我们有 $\vec p$ 空间上洛伦兹的不变测度 $\int dp^0\, d^3p\, \delta(p^2-\mu^2)\,\theta(p^0) = \frac{d^3p}{2\omega_p}$，$\omega_p=\sqrt{\|\vec p\|^2+\mu^2}$。

所以我们应将态写为相对论的动量本征态（以四动量标记）。$|p\rangle = \sqrt{(2\pi)^3}\,\sqrt{2\omega_p}\,|\vec p\rangle$。它所满足的归一化关系为 $\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\, 2\omega_p}\,|p\rangle\langle p| = 1$。而这个归一化关系是洛伦兹不变。

有了这个以后，我们可以有洛伦兹变换 $U(\Lambda)$，其作用为 $U(\Lambda)|p\rangle = |\Lambda p\rangle$，它同样有性质：$U(\Lambda)U(\Lambda)^+ = 1$，$U(1)=1$。

在非相对论QM中，有了 $\vec p$，我们可根据基本对易关系 $[x_i, p_j]=\delta_{ij}$，以及P为平移生成元的性质来构造X算符。现在我们需要找到相对论QM的X算符，X应满足：

$\to U(a)=\exp(-i\vec p\cdot\vec a)$，$\vec p$为三动量

$X = X^+$，$U(a)^+ X\, U(a) = X + a$，$U(R)^+ X\, U(R) = RX$。从第二个条件可得到基本对易关系，考虑无穷小变换。

$(1+i\vec p\cdot\vec a)\, X = (X+a)(1+i\vec p\cdot\vec a) \Rightarrow X + i(\vec a\cdot\vec p)X = X + iX(\vec a\cdot\vec p) + \vec a$，从而推出 $i[p_i, x_j]=\delta_{ij}$。

符合以上对易关系的X形式是这样：$x^i = i\frac{\partial}{\partial p_i} + R^i$，$R^i$ 是与 p_i 对易的算符。验证对易关系，应作用在动量的态上。

（先考虑 $\langle p'|p_j|\psi\rangle$，再将 x_i 算进去）

$$\begin{cases} \langle p|p_j|\psi\rangle = p_j\langle p|\psi\rangle \\ \langle p|x_i|\psi\rangle = i\frac{\partial}{\partial p_i}\langle p|\psi\rangle \end{cases}$$

从而 $\langle p'|x_i p_j|\psi\rangle = i\frac{\partial}{\partial p_i}\left(p_j\langle p'|\psi\rangle\right) = i\,\langle p'|\psi\rangle + i\, p_j\frac{\partial}{\partial p_i}\langle p'|\psi\rangle$

$\langle p'|p_j x_i|\psi\rangle = p_j\langle p'|x_i|\psi\rangle = p_j\, i\frac{\partial}{\partial p_i}\langle p'|\psi\rangle$。从而这到验证。

我们知道，$\{p_1, p_2, p_3\}$ 是一个对易算符的完备集合。在相对论框架下，$\hat p = (\hat p_0, \hat p_1, \hat p_2, \hat p_3)$。为什么 $\hat p_0$ 并非其中一员？因为 p_0 其实就是哈密顿量 $H = \|p\|^2+\mu^2$。它并不是独立的。

R与p对易，从而R必须由 $\hat p_i$ 组合而成。由于 x^i 像3-矢量一样变换，故 R^i 也是这样。考虑到 $\|p\|^2$ 旋转不变，而 p_i 在旋转下像3-矢量一样变化，所以 $R^i = p^i F(\|p\|^2)$。

所以证明，任何一个可写成 $p_i F(|p|^2)$ 的函数都可以被写成 $\frac{\partial G(|p|^2)}{\partial p_i}$ 的形式。从而 $x = i\frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial G(|p|^2)}{\partial p_i}$。若要吸掉第二项，我们可以改变态的相位。

所以我们作一个幺正变换。我们要令 $|p\rangle \to |p\rangle_G = \exp(iG(|p|^2))\,|p\rangle$。

$x|p\rangle = i\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\exp(iG(|p|^2))\,|p\rangle\right) = \exp(iG(|p|^2))\, i\frac{\partial}{\partial p_i}|p\rangle + \frac{\partial G(|p|^2)}{\partial p_i}\exp(\cdot)\,|p\rangle$ 可以看到这和原来效果一样。

并且这个相位变化还是幺正的，而且这只乘了常数，并不改变 $|p\rangle$ 的本征值。所以将其记为 $U(G)$，$|p\rangle \to |p\rangle_G = U(G)|p\rangle$。为了保证观测值相同，$x \to x_G = U(G)^+ X\, U(G)$。

计算可知 $x_G^i\,|p\rangle_G = i\frac{\partial}{\partial p_i}|p\rangle_G$. 从而之在指 $|x\rangle$，x 是不由取的 $|p\rangle_G$ x_G，并不自然的。 下面我们要验证这套理论是否禁止粒子超光速移动？

取t实数的时刻位于原点的粒子。$\langle x|\psi\rangle = \delta^3(\vec{x})$。 由于 $\vec{x}$、$\vec{p}$ 的对易关系没变，并且 $\vec{x}$ 的形式也没变，所以我们仍有 $\langle \vec{x}|\vec{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\cdot\exp(i\,\vec{p}\cdot\vec{x})$

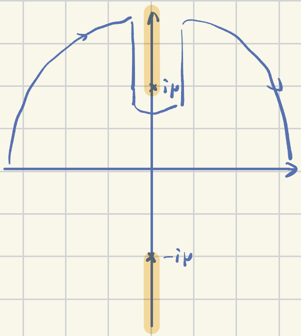
所以在 $t=0$，$\langle p|\psi\rangle = \int \langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle\,dx^3 = 1/(2\pi)^{3/2}$. 记 $H|p\rangle = \omega_p|p\rangle$（由于这是自由粒子）.

$$\langle x|\exp(-iHt)|\psi\rangle = \int dp^3\,\langle x|\exp(-iHt)|p\rangle\langle p|\psi\rangle = \int dp^3\,\frac{1}{(2\pi)^3}\exp(i\,\vec{p}\cdot\vec{x})\,\exp(-i\omega_p t)$$

计算的方法我刚刚已标注.

$$I = \int_0^\infty \frac{p^2dp}{(2\pi)^3}\exp(-i\omega_p t)\int_0^\pi \exp(i\,p\,r\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\phi = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dp\; p\exp(-i\omega_p t)\,\frac{1}{ir}\left[\exp(ipr)-\exp(-ipr)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}dp\; p\exp(ipr-i\omega_p t)$$

这显然不好积，处理方法是将 p 延拓至复平面上，这里有个问题 $\omega_p = \sqrt{p^2+\mu^2}$ 在 $p=\pm i\mu$ 有分支点，为了保证函数单值性，应挖去一些区域，选下面积分路径.



在无穷大弧上积分为0，只有两条直线上有贡献.

$$\langle x|\exp(-iHt)|\psi\rangle = \frac{i}{(2\pi)^2r}\left[\int_\infty^\mu dy\,y\exp\left(-ry-\sqrt{y^2-\mu^2}\,t\right) + \int_\mu^\infty dy\,y\exp\left(-ry+\sqrt{y^2-\mu^2}\,t\right)\right]$$

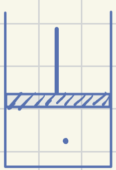
$$= \frac{i}{(2\pi)^2r}\int_\mu^\infty dy\,y\exp(-ry)\left[\exp\left(\sqrt{y^2-\mu^2}\,t\right)-\exp\left(-\sqrt{y^2-\mu^2}\,t\right)\right] = \frac{i}{2\pi^2r}\int_\mu^\infty dy\,y\exp(-ry)\sinh\left(\sqrt{y^2-\mu^2}\,t\right)$$

这个东西不可能为0的，但我们可以用sinh的一支bound住它 let $y = \sqrt{y^2-\mu^2}$

$$\langle x|\exp(-iHt)|\psi\rangle < i\cdot\frac{1}{2\pi^2r}\int_\mu^\infty dy\,y\exp\left(-(r-t)y\right) = \exp\left(-(r-t)y\right)\left(\frac{1}{(r-t)^2}+\frac{\mu}{r-t}\right)$$

所以粒子出现在光锥之外的概率指数小.

有人说，我大可以做一个思想实验，有一个箱子里放一个粒子，压一下可动的活塞，粒子不就被困在"无穷小"体积里了吗？ 这实际上不行，由不确定关系，Δx 很小，Δp 将巨大，大到足以产生新粒子.



从而我们确实仍将一些东西存在于很小空间里，但放进来的不一定是一个粒子. 从而我们可以猜想与单粒子系统是冲突的，这将由多粒子理论解决这一问题.