（官方QFT）旋量场和矢量场的路径积分

#Quantum_Field_Theory

Grassmann 代数

为了为费米子系统制造一套路径积分方法，我们首先需要引入 Grassmann 代数。考虑一个费米子系统，它的升降算符 $c_j, c_k^\dagger$ 满足：

$$\{c_j, c_k\} = \{c_j^\dagger, c_k^\dagger\} = 0,\ \{c_j, c_k^\dagger\} = \delta_{jk}$$

定义相干态 $|\alpha\rangle$ 是降算符的本征态，那么：

$$c_k c_j|\alpha\rangle = \alpha_k\alpha_j|\alpha\rangle,\ c_j c_k|\alpha\rangle = \alpha_k\alpha_j|\alpha\rangle$$

由于 c_k, c_j 反对易，这直接导致 $\alpha_k\alpha_j + \alpha_j\alpha_k = 0$。满足这个方程的一组变量 $\alpha_1, \cdots \alpha_N$ 称为 Grassmann 变量。

下面先考虑单个 Grassmann 变量的特性。首先有 $\xi \neq 0, \xi^2 = 0$，同时我们要求 ξ 和任意 c 数 x 对易：$\xi x = x\xi$。此时所有级数都会被截断，比如说 $\exp(\xi x) = 1 + \xi x$，那么，一般而言，ξ 的函数都可以写成 $f(\xi) = a + \xi b$ 。现在考虑 Grassmann 变量的积分：$\int \mathrm{d}\xi f(\xi)$
积分元是 Grassmann 变量，所以这种积分我们之前没有见过，需要重新定义，就像随机积分一样。我们定义它有以下两个性质：

- 线性性：$\int \mathrm{d}\xi (f(\xi)u + g(\xi)v) = (\int \mathrm{d}\xi f(\xi))u + (\int \mathrm{d}\xi g(\xi))v$。
- 对积分元的平移不变性：$\int \mathrm{d}\xi f(\xi + u) = \int \mathrm{d}\xi f(\xi)$
  那么根据以上性质，有：

  $$\int \mathrm{d}\xi (\xi + u) = \int \mathrm{d}\xi\, \xi \Rightarrow \int \mathrm{d}\xi\, u = 0$$

  根据线性性，我们知道 $\int \mathrm{d}\xi\ (a + \xi b) \propto b$，我们将其定义为：

  $$\int \mathrm{d}\xi\ (a + \xi b) = b \Rightarrow \int \mathrm{d}\xi\ \xi = 1$$

  或者说我得到一般公式：

  $$\int \mathrm{d}\xi f(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi)$$

如果我做换元，令 $\xi \to u\xi$，但是换元之后积分值应当是不变的，所以我得到：

$$\int \mathrm{d}(u\xi)(a+u\xi b)=b=\frac{1}{u}\int \mathrm{d}\xi(a+u\xi b)$$

于是就导出了积分测度之间的关系：

$$\mathrm{d}(u\xi)=\frac{1}{u}\mathrm{d}\xi$$

我们定义积分测度和 ξ 是反对易的：

$$\mathrm{d}\xi\xi=-\xi\mathrm{d}\xi$$

现在考虑 N 个独立 Grassmann 变量的情形，我们说这些变量独立是在说

$$1,\xi_j,\xi_j\xi_k(j<k),\xi_j\xi_k\xi_l(j<k<l),\cdots$$

这些东西不能相互表出。那么这些东西就是某个函数空间中的基底，一个函数应该是：

$$f(\xi)=a+\xi_i b_i+\frac{1}{2!}\xi_i\xi_j c_{ij}+\cdots+\frac{1}{N!}\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_N}d_{i_1\cdots i_N}$$

这里带着下标的 c 数都是全反称的，所以最后一项可以简化成 $\xi_1\cdots\xi_N d$。定义这个函数的积分：

$$\int \mathrm{d}^N\xi f(\xi)=\int \mathrm{d}\xi_N\cdots\mathrm{d}\xi_1 f(\xi)=d$$

那么利用上面这个公式，我们有：

$$\int \mathrm{d}\xi_i=0,\ \int \mathrm{d}\xi_i\xi_j=\delta_{ij}$$

同时我们定义积分变量之间的关系、积分测度和 Grassmann 变量的对易关系：

$$\mathrm{d}\xi_i\mathrm{d}\xi_j=-\mathrm{d}\xi_j\mathrm{d}\xi_i,\ \mathrm{d}\xi_i\mathrm{d}\xi_j=-\xi_j\mathrm{d}\xi_i$$

我们可以对这些变量做线性变换：$\xi_i'=J_{ij}\xi_j$，考虑只有两个变量的情形：

$$(J_{11}\xi_1+J_{12}\xi_2)(J_{21}\xi_1+J_{22}\xi_2)=(J_{11}J_{22}-J_{12}J_{21})\xi_1\xi_2$$

从而我们知道了一般情况下：

$$\xi_1'\cdots\xi_N'=(\det J)\xi_1\cdots\xi_N$$

考虑多变量情形下的积分换元，令 $\xi' = J\xi$，那么 $f(\xi)$ 中最后一项会变成 $\xi_1 \cdots \xi_N (\det J) d$，类比之前单变量时的推导立刻得到：

$$\mathrm{d}^N (J\xi) = (\det J)^{-1} \mathrm{d}^N \xi$$

Grassmann 变量有高斯积分公式，回忆标准的 c 数的高斯积分公式和协方差矩阵的逆有关，这里的高斯积分可以证明和一个矩阵的 `Pfaffian` 有关：

$$\int \mathrm{d}^N \xi \exp\left(\frac{1}{2}\xi^T M \xi\right) = \mathrm{pf}(M),\ (\mathrm{pf}(M))^2 = \det M$$

其中这里的 M 是反对称矩阵，$\mathrm{Pf}(\cdot)$ 的计算方式是：

$$\mathrm{pf}(M) \equiv \begin{cases} 0, & N \text{ is odd}, \\ \frac{1}{N!!} \sum\limits_{\sigma \in S_N} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod\limits_{i=1}^{N/2} M_{\sigma(2i-1),\sigma(2i)}, & N \text{ is even}, \end{cases}$$

还有一种 $2N$ 个自由变量的高斯积分：

$$\int \prod_{i=1}^{N} (\mathrm{d}\beta_i \mathrm{d}\alpha_i) \exp(\alpha^T M \beta) = \det M$$

证明：将 M 矩阵视作一个坐标变换矩阵，令 $\gamma_i = M_{ij}\beta_j$，那么：

$$\begin{aligned}
\int \prod_i (\mathrm{d}\beta_i \mathrm{d}\alpha_i) \exp(\alpha^T M \beta) &= \int \prod_i (\mathrm{d}\beta_i \mathrm{d}\alpha_i) \exp(\alpha_i \gamma_i) \\
&= s \int \mathrm{d}^N (M^{-1}\gamma) \mathrm{d}\alpha \exp(\alpha_i \gamma_i) \\
&= (\det M) s \int \mathrm{d}^N \gamma \mathrm{d}^N \alpha \exp(\alpha_i \gamma_i) \\
&= (\det M) \int (\mathrm{d}\gamma_1 \mathrm{d}\alpha_1) \cdots (\mathrm{d}\gamma_N \mathrm{d}\alpha_N) \exp(\alpha_i \gamma_i) \\
&= (\det M) \int (\mathrm{d}\gamma_1 \mathrm{d}\alpha_1) \cdots (\mathrm{d}\gamma_N \mathrm{d}\alpha_N) (1 + \alpha_1 \gamma_1) \cdots (1 + \alpha_N \gamma_N) \\
&= \det M
\end{aligned}$$

我引入了记号 s，这是将所有 β 聚合在一起产生的符号影响，后面我们把所有的 γ 分开的时候，同样的符号影响会再产生一次，因此 $s^2 = 1$ 。在最后一步的积分中，我需要将每一个 $(1 + \alpha_i \gamma_i)$ 恰好移动到与之对应的积分变量后面，这会产生偶数次 Grassmann 变量的交换，因此并不影响符号。

还有一个情况，如果把上面 α 换成 $\alpha^T + \xi^T M^{-1}$，β 换成 $\beta + M^{-1}\eta$，这里的 ξ, η 可以

都是复数，也可以都是 Grassmann 变量，代入后展开，利用 $\xi^T M^{-1}\eta$ 这个整体与所有东西的对易性，可以得到：

$$\begin{aligned}\int\prod_i(\mathrm{d}\beta_i\mathrm{d}\alpha_i)\exp(\alpha^T M\beta)=\exp(\xi^T M^{-1}\eta)\int\prod_i(\mathrm{d}\beta_i\mathrm{d}\alpha_i)\exp(\alpha^T M\beta+\xi^T\beta+\alpha^T\eta)\\=\det M\end{aligned}$$

通过把：

$$(\det M)\exp(-\xi^T M^{-1}\eta)=\int\prod_i(\mathrm{d}\beta_i\mathrm{d}\alpha_i)\exp(\alpha^T M\beta+\xi^T\beta+\alpha^T\eta)$$

两边展开，对比 $\xi_i\eta_i$ 前面的系数可以得到类似于高斯积分的 Wick 定理：

$$\frac{\int D\beta D\alpha\,\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_a}\beta_{j_1}\cdots\beta_{j_b}\exp(\alpha^T M\beta)}{\int D\beta D\alpha\;\exp(\alpha^T M\beta)}=0,\quad \text{if } a\neq b, \tag{38a}$$

$$\frac{\int D\beta D\alpha\,\beta_i\alpha_j\exp(\alpha^T M\beta)}{\int D\beta D\alpha\;\exp(\alpha^T M\beta)}=-(M^{-1})_{ij}\equiv\Delta_{ij}, \tag{38b}$$

$$\frac{\int D\beta D\alpha\,\beta_i\alpha_j\beta_k\alpha_l\exp(\alpha^T M\beta)}{\int D\beta D\alpha\;\exp(\alpha^T M\beta)}=\Delta_{ij}\Delta_{kl}-\Delta_{il}\Delta_{kj}, \tag{38c}$$

$$\frac{\int D\beta D\alpha\,\beta_{i_1}\alpha_{j_1}\cdots\beta_{i_a}\alpha_{j_a}\exp(\alpha^T M\beta)}{\int D\beta D\alpha\;\exp(\alpha^T M\beta)}=\sum_{\sigma\in S_a}\mathrm{sgn}(\sigma)\Delta_{i_1,j_{\sigma 1}}\Delta_{i_2,j_{\sigma 2}}\cdots\Delta_{i_a,j_{\sigma a}}. \tag{38d}$$

你可以根据缩并的时候要移位的次数快速确定这里的正负号，比如 38 式，执行 $(ij),(kl)$ 这个缩并不需要任何移位，但是执行 $(il),(kj)$ 缩并需要把 α_l 移位两次，把 α_j 移位一次，这就产生了一个负号。

我们的场量是复数，所以我们有时候需要使用复 Grassmann 变量。之前的 Grassmann 变量就像实数一样，定义它在复共轭操作下等于自身，$x^\star=x,(xy)^\star=yx$，现在我们把 $2N$ 个实变量变成 N 个复 Grassmann 变量，定义：

$$\psi_i=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_i+iy_i),\ \psi_i^\star=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_i-iy_i)$$

我可以说我从 $(x_i,y_i)\to(\psi_i,\psi_i^\star)$ 是做了坐标变换，容易知道：

$$\mathrm{d}\psi_i\mathrm{d}\psi_i^\star=+i\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \psi_i^\star\psi_i=-iy_ix_i$$

这两个变化会抵消，导致：

$$\int\mathrm{d}\psi_i\mathrm{d}\psi_i^\star\psi_i^\star\psi_i=\int\mathrm{d}x_i\mathrm{d}y_iy_ix_i=1$$

也有和之前一样的结论：

$$\int \mathrm{d}^N\psi \mathrm{d}^N\psi^\star \exp(\psi^\star M\psi) = \det M$$

以及 Wick 定理：

$$\frac{\int d^N\psi d^N\psi^*\, \psi^*_{i_1}\cdots\psi^*_{i_a}\psi_{j_1}\cdots\psi_{j_b}\exp(\psi^\dagger M\psi)}{\int d^N\psi d^N\psi^*\, \exp(\psi^\dagger M\psi)} = 0, \quad \text{if } a\neq b \text{ and } \det M\neq 0, \tag{51a}$$

$$\frac{\int d^N\psi d^N\psi^*\, \psi_{i_1}\psi^*_{j_1}\cdots\psi_{i_a}\psi^*_{j_a}\exp(\psi^\dagger M\psi)}{\int d^N\psi d^N\psi^*\, \exp(\psi^\dagger M\psi)} = \sum_{\sigma\in S_a}\operatorname{sgn}(\sigma)\Delta_{i_1,j_{\sigma 1}}\Delta_{i_2,j_{\sigma 2}}\cdots\Delta_{i_a,j_{\sigma a}}, \tag{51b}$$

where

$$\Delta_{ij}\equiv -(M^{-1})_{ij}. \tag{52}$$

费米子的相干态路径积分

在之前的路径积分中，我们插入的完备性关系是位置算符本征矢量的完备性关系 $\int \mathrm{d}x|x\rangle\langle x|=1$，或者场算符的本征矢量的完备性关系 $\int \mathcal{D}\phi|\phi\rangle\langle\phi|=1$，这是因为相等的时间点上的（玻色子）的场算符互相对易，因此 $|\phi(x)\rangle$ 是相等的时间点上场算符的相同本征态，只有插入场算符的本征态，你才能把算符变成数，才能构建一个路径积分理论。对于费米子，相等的时间点上场算符根本不对易，不能像玻色子一样构建路径积分理论。我们需要构建所谓的相干态路径积分。

设系统有 N 个单粒子态，对应的产生、湮灭算符是 $\psi_1\cdots\psi_N,\psi_1^\dagger\cdots\psi_N^\dagger$，这些算符之间满足对易关系：

$$\{\psi_n,\psi_m\}=0,\ \{\psi_n^\dagger,\psi_m^\dagger\}=0, \{\psi_n,\psi_m^\dagger\}=\delta_{nm}$$

做了二次量子化之后，哈氏量可以使用这些算符写出，并且做了正规排序：

$$H=H(\psi_1^\dagger,\cdots,\psi_N^\dagger;\psi_1,\cdots,\psi_N;t)=\sum_{k=0}^{2N}\sum_{j=0}^{k}A^{(k,j)}_{a_1\cdots a_j;a_{j+1},a_k}\psi^\dagger_{a_1}\cdots\psi^\dagger_{a_j}\psi_{a_{j+1}}\psi_{a_k}$$

下文中我要定义相干态，也就是所有降算符的共同本征态。根据之前的讨论，本征值是复的 Grassmann 变量，我定义如下关系：

$$\{\alpha_n,\psi_m\}=\{\alpha_n^\star,\psi_m\}=\{\alpha_n,\psi_m^\dagger\}=\{\alpha_n^\star,\psi_m^\dagger\}=0$$

也就是这些 Grassmann 变量和任意算符交换都会出现一个负号。首先我们有空态，只要把降算符作用在上面就得到 0，也就是完全没有粒子的态：

$$\psi_n|e\rangle=|0\rangle$$

向空态的投影算符是：

$$|e\rangle\langle e| = (\psi_1\psi_1^\dagger)(\psi_2\psi_2^\dagger)\cdots(\psi_N\psi_N^\dagger)$$

利用上面的对易关系可以看到：

$$\alpha_n|e\rangle\langle e| = |e\rangle\langle e|\alpha_n,\ \alpha_n^\star|e\rangle\langle e| = |e\rangle\langle e|\alpha_n^\star$$

我们做一些更强的假设/定义，定义这些 Grassmann 变量和空态之间的交换关系：

$$\alpha_n\,|\mathrm{e}\rangle = |\mathrm{e}\rangle\,\alpha_n, \qquad \alpha_n^*\,|\mathrm{e}\rangle = |\mathrm{e}\rangle\,\alpha_n^*,$$

$$\alpha_n\,\langle\mathrm{e}| = \langle\mathrm{e}|\,\alpha_n, \qquad \alpha_n^*\,\langle\mathrm{e}| = \langle\mathrm{e}|\,\alpha_n^*.$$

相干态是：

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha_n^\star\alpha_n - \alpha_n\psi_n^\dagger\right)|e\rangle,\ \psi_n|\alpha\rangle = \alpha_n|\alpha\rangle$$

其共轭：

$$\langle\alpha| = \langle e|\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha_n^\star\alpha_n - \psi_n\alpha_n\right),\ \langle\alpha|\psi_n^\dagger = \langle\alpha|\alpha_n^\star$$

把上面的 $\exp(\cdot)$ 展开，由于有 Grassmann 变量的原因会自行截断，可以得到相干态展开式：

$$|\alpha\rangle = \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_N\in\{0,1\}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\alpha_n^*\alpha_n\Big)(-\alpha_1)^{j_1}(-\alpha_2)^{j_2}\cdots(-\alpha_N)^{j_N}\,\hat{\psi}_N^{\dagger j_N}\cdots\hat{\psi}_2^{\dagger j_2}\hat{\psi}_1^{\dagger j_1}\,|\mathrm{e}\rangle\,.$$

利用 Grassmann 积分的性质，从这里可以证明 $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ 满足如下完备性关系：

$$\int \mathrm{d}^N\alpha^\star\mathrm{d}^N\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha| = 1$$

可以求出两个相干态的内积：

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha_n^\star\alpha_n - \frac{1}{2}\beta_n^\star\beta_n + \alpha_n^\star\beta_n\right)$$

有了这些准备，我们可以将 $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ 满足的完备性关系插入到跃迁振幅里面了：

$$\begin{aligned}\langle\alpha|\exp(-\mathrm{i}\hat{H}\epsilon)\,|\beta\rangle &= \exp\Big[-\frac{1}{2}\alpha_n^*\alpha_n - \frac{1}{2}\beta_n^*\beta_n + \alpha_n^*\beta_n - \mathrm{i}\epsilon H(\alpha_1^*,\ldots,\alpha_N^*;\beta_1,\ldots,\beta_N) + O(\epsilon^2)\Big] \\ &= \exp\Big\{\mathrm{i}\epsilon\Big[\frac{\mathrm{i}}{2}\alpha_n^*\frac{(\alpha_n-\beta_n)}{\epsilon} - \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{(\alpha_n^*-\beta_n^*)}{\epsilon}\beta_n - H(\alpha^*;\beta)\Big] + O(\epsilon^2)\Big\}, \qquad (35)\end{aligned}$$

把很多段跃迁振幅拼接一下，可以得到：

$$\langle\alpha|\exp(-iH(t))|\alpha'\rangle = \int_{\psi(t)=\alpha,\psi(t')=\alpha'}\mathcal{D}\psi^\star\mathcal{D}\psi\exp(iS)$$

拉氏量：

$$L(\psi^\star,\psi,t)=\frac{i}{2}\psi_n^\star\dot\psi_n-\frac{i}{2}\dot\psi_n^\star\psi_n-H(\psi^\star,\psi,t)$$

积分测度是：

$$\mathcal{D}\psi^\star\mathcal{D}\psi=\prod_{n=1}^N \mathrm{d}\psi_n^{(1)\star}\mathrm{d}\psi_n^{(1)}\cdots\prod_{n=1}^N \mathrm{d}\psi_n^{(M)\star}\mathrm{d}\psi_n^{(M)},\ M\to\infty$$

上标 i 代表第 i 个时间点上的场构型。

我们暂且不加证明地给出真空期望值的计算方法，与之前的标准路径积分相同：

$$\langle 0|\,\hat F_1(t_1)\cdots\hat F_a(t_a)\,|0\rangle=\frac{\int D\psi^* D\psi F_1\big(\psi^*(t_1);\psi(t_1)\big)\cdots F_a\big(\psi^*(t_a);\psi(t_a)\big)e^{\mathrm{i}S}}{\int D\psi^* D\psi\, e^{\mathrm{i}S}},\tag{47}$$

在计算真空期望值时，积分区间是从无穷远过去到无穷远未来，因此可以通过分部积分并忽略边界将拉氏量改成：

$$L=i\psi_n^\star(t)\dot\psi_n(t)-H(\psi^\star,\psi)$$

下面考虑狄拉克场，处理一个场的时候，我可以先将空间离散化，将场视作格点上的系统，利用上面的结论后再连续化。最终得到狄拉克场的拉格朗日密度：

$$\mathcal{L}=-\bar\psi(\not\partial+m)\psi,\ \bar\psi=\psi^\dagger iC^0\ (\bar\psi_a=\psi_b^\star(iC_0)_{ba})$$

电磁场的路径积分

我们不加证明地指出电磁场的拉氏量是：

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(E^2-B^2)=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

这相当于我们选了 $F_{\mu\nu}(x)$ 作为描述场位形的变量。但是不是所有的 $F^{\mu\nu}(x)$ 都是可行的路径，因为这个张量的值和 E,B 直接有联系，但是 E,B 的值受到麦克斯韦方程组的约束 $\nabla\cdot B=0,\nabla\times E=-\dfrac{\partial B}{\partial t}$，不满足这个约束的路径不能贡献振幅。为了挑选那些贡献振幅的路径，我们通常使用 4-势 A_μ 作为标志场位形的变量，
$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$。这个东西有规范自由性，在 $A'_\mu=A_\mu-\partial_\mu\alpha$ 下 $F_{\mu\nu}$ 保持不变。这会导致路径积分出现严重问题：所有等效的路径将以相同的贡献出现在路径积分中，相当于我们对每一个构型都求和了无数次，这会导致分子、分母都爆炸。所以实际使用中我们应当指定一种规范。形式化地，指定规范这件事情意味着路径积分被写成下面的样子：

$$\langle 0|Tw_1(x_1)\cdots w_N(x_N)|0\rangle = \frac{\int DA w_1(x_1)\cdots w_N(x_N)\ X[A]}{\int DA\ X[A]}$$

只要这里的 $X[A]$ 满足：

$$\int_{A\in\mathcal{C}[F]} DA\ X[A] = \eta\exp\left(-\frac{i}{4}\int \mathrm{d}^4xF_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)\right)$$

其中 $\mathcal{C}[F]$ 指由 $F_{\mu\nu}$ 指定的一个等价类中的路径。这件事情有很多种做法，我们考虑动量空间中的一些规范，在动量空间中的规范不变性是 $A^\mu(k)\to A^\mu(k)-i\alpha(k)k^\mu$，规范的选法包括：

- 类时/类空/类光规范：$n^\mu A_\mu=0$, n^μ 是指定的四矢量
- 洛伦兹规范：$k_\mu A^\mu=0$
- 库伦规范：$k_iA^i=0$
- 有一种洛伦兹规范的改版（软约束）：允许 $k_\mu A^\mu$ 服从以 ξ 为方差的高斯分布，这被称为 R_ξ 规范

下面在 R_ξ 规范下计算传播子。同样先做个 Wick 转动，令
$ix^0=x_4=x^4, iA^0=A^4=A_4$，获得欧氏空间中的作用量：

$$\begin{aligned}
-S_E &= iS\\
&= -\frac{i}{4}\int \mathrm{d}^4xF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\\
&= \frac{i}{4}\int \mathrm{d}^4x(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)\\
&= -\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4x(g_{\mu\nu}A^\mu\partial^2A^\nu - A^\mu\partial_\mu\partial_\nu A^\nu)\\
&= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x_E(A\cdot\nabla^2A - A\cdot\nabla\nabla\cdot A)
\end{aligned}$$

傅里叶变换：

$$S_E=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^4k_E}{(2\pi)^4}k^2(A(k)\cdot A(-k)-(\hat{k}\cdot A(k))(\hat{k}\cdot A(-k))$$

根据前面的讨论，在动量空间中改变 $A(k)$ 沿着 k 方向的成分不导致 $F_{\mu\nu}$ 的变化，所以我在作用量中添加一项 $\frac{1}{\xi}(\hat{k}\cdot A(k))(\hat{k}\cdot A(-k))$ 没有任何影响，这个就是 R_ξ 规范中的允许的沿着 k 方向的涨落。那么动量空间里的作用量就写成了两个方向上的高斯分布：

$$S_E=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^4k_E}{(2\pi)^4}k^2\left(|A_\perp(k)|^2+\frac{1}{\xi}|A_\parallel(k)|^2\right)$$

这两个方向是独立的，所以你可以方便地计算关联函数（就是两个防线上的关联函数相加），得到如下结果：

$$\begin{aligned}\langle\widetilde{A}^i(k)\widetilde{A}^j(k')\rangle&=\left[\frac{1}{k^2}\left(\delta^{ij}-\frac{k^ik^j}{k^2}\right)+\frac{\xi}{k^2}\frac{k^ik^j}{k^2}\right](2\pi)^4\delta_E(k+k')\\&=\frac{1}{k^2}\left[\delta^{ij}-(1-\xi)\frac{k^ik^j}{k^2}\right](2\pi)^4\delta_E(k+k'),\end{aligned}$$

并做 Wick 转动回到实空间，注意欧氏空间中的 δ^{ij} 会变成闵氏时空中的 $g^{\mu\nu}$：

$$\Delta^{\mu\nu}(x-y)\equiv\langle 0|\,\mathrm{T}A^\mu(x)A^\nu(y)\,|0\rangle=\int\frac{-\mathrm{i}d^4k}{(2\pi)^4}\hat{\Delta}^{\mu\nu}(k)e^{\mathrm{i}k\cdot(x-y)},$$

$$\hat{\Delta}^{\mu\nu}(k)=\frac{1}{k^2-\mathrm{i}\epsilon}\left[g^{\mu\nu}-(1-\xi)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right].$$

狄拉克场和电磁场的耦合

我们考虑如何把狄拉克场和电磁场耦合起来。我们知道狄拉克场的拉氏量：

$$\mathcal{L}=-\bar{\psi}(C^\mu\partial_\mu+m)\psi$$

有全局的 $U(1)$ 对称性，但是如果我做一个局部的 $U(1)$ 变换：

$$\psi=\exp(i\alpha(x))\psi',\ \bar{\psi}=\exp(-i\alpha(x))\bar{\psi}'$$

把这个变换塞进去，得到此时的拉氏量：

$$\mathcal{L}=-\bar{\psi}'\left(C^\mu\left(\partial_\mu+i\frac{\partial\alpha(x)}{\partial x^\mu}\right)+m\right)\psi'$$

我们相当于通过这个 $U(1)$ 变换引入了一个（经典）矢量场 $\alpha_\mu(x)=-\partial_\mu\alpha(x)$，并且这个矢量场满足约束 $\partial_\mu a_\nu-\partial_\nu a_\mu=0$。
现在我们要把这个场换成一个量子场，要求它有涨落，最简单的办法是把拉氏量改成下面这样：

$$\mathcal{L}=-\bar{\psi}(C^\mu(\partial_\mu-ia_\mu(x))+m)\psi-\frac{1}{4e^2}(\partial_\mu a_\nu-\partial_\nu a_\mu)(\partial^\mu a^\nu-\partial^\nu a^\mu)$$

可以验证，现在如果对 $\psi,\bar{\psi}$ 做局域 $U(1)$ 变换，同时变换这个矢量场 $\alpha_\mu(x)\to\alpha'_\mu(x)=\alpha_\mu(x)-\partial_\mu\alpha(x)$，那么拉氏量是不变的。令 $\frac{1}{e}a_\mu(x)=A_\mu(x)$，拉氏量重写为：

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}(C^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) + m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},\ F_{\mu\nu} = \partial_\mu A^\nu - \partial_\nu A_\mu$$

现在我们宣称这里的 $F_{\mu\nu}$ 就是对应了量子化的电磁场，为了验证这一点，我们可以求出这个系统对应的经典运动方程（最小作用量解）：

$$\partial_\nu F^{\mu\nu}(x) = J^\mu(x),\ J^\mu(x) = ie\bar{\psi}(x)C^\mu\psi(x)$$

这是其中两个 Maxwell 方程，该系统对应的“电荷”是 $\rho(x) = e\psi^\dagger(x)\psi(x)$，这与全局 $U(1)$ 对称性给出的 Dirac 场的守恒荷是相同的，也就是说 Dirac 场描述的自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子其实对应的就是正负电子。

CPT 定理