（官方QFT）旋量场和矢量场的量子化

#Quantum_Field_Theory

Classical Majorana Theory

之前我们的 KG 场只有一个变量，现在考虑多个变量的情形。实际上 KC 场也可以被写成有多个变量的形式，令 $\phi_1 = phi, \phi_a = \dfrac{1}{m}\partial^{a-2}\phi$，那么场方程可以写成：

$$(C^\mu \partial_\mu + m)\phi = 0$$

这些 C^μ 当然是 4 个矩阵：

$$\begin{aligned}&\left[\begin{pmatrix}0&-1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\partial_0+\begin{pmatrix}0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&0\\-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\partial_1+\begin{pmatrix}0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\partial_2\right.\\&\left.+\begin{pmatrix}0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\-1&0&0&0&0\end{pmatrix}\partial_3+m\right]\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\\\varphi_3\\\varphi_4\\\varphi_5\end{pmatrix}=0.\end{aligned}\qquad(2)$$

我们想找一下能写成这种形式的理论。首先，我们仍然希望 ϕ 的每个分量是厄米的，其次，我们至少希望在 Mass Shell 上有单粒子态，所以对于 $k_\mu k^\mu = -m^2$ 的 k，我们都期待场方程有这样的解：

$$\phi(x) = u\exp(ik(x-a)) + u^\star \exp(-ik(x-a))$$

把场方程变换到动量空间：

$$(ik_\mu C^\mu + m)u = 0$$

希望在 Mass Shell 上 u 有非零解，意思是：

$$\det(ik_\mu C^\mu + m) = 0, \text{if } k_\mu k^\mu = -m^2$$

否则反之。通过对行列式约束的讨论可知，这样的理论至少需要 ϕ 有 4 个分量。下面我们就研究最简单的 4 个分量的情形。此外，如果取 $\phi = S\phi'$，那么场方程变成：

$$(S^{-1}C^\mu S\partial_\mu + m)\phi' = 0$$

所以如果 C^μ 只是差一个相似变换的话，两个场方程描述的就是同一个理论了。

下面考虑最简单的符合上面的行列式约束的情形，这四个矩阵是：

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

场方程也可以写成分量形式：

$$\sum_{b=1}^{4}(C^{\mu}_{ab}\partial_\mu + m\delta_{ab})\phi_b(x) = 0$$

这样的场称为 Majorana 场。不难验证 C^μ 满足如下反对易关系：

$$\{C^\mu, C^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}$$

由于偏导数算符是对易的，通过将场方程的两侧同时作用 $(C^\nu\partial_\nu - m)$，注意到：

$$C^\nu C^\mu \partial_\nu \partial_\mu = \frac{1}{2}(C^\nu C^\mu + C^\mu C^\nu)\partial_\mu\partial_\mu$$

可得到方程：

$$(\partial^2 - m^2)\phi = 0$$

这说明 Majorana 场的每一个分量都满足 KG 方程。下面考虑 Majorana 场在洛伦兹变换下是怎么变的：首先我们知道标量场是这样变的：

$$\phi(x) \to \bar{\phi}(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$$

那我们假设 Majorana 场有一点差别：

$$\phi(x) \to \bar{\phi}(x) = L(\Lambda)\phi(\Lambda^{-1}x)$$

Λ 是 Proper Orthogonal 洛伦兹变换群的群元，而 $L(\Lambda)$ 是它的表示。作为表示首先得是同态：

$$L(\Lambda')L(\Lambda) = L(\Lambda'\Lambda)$$

考虑无穷小洛伦兹变换：

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \theta^{\mu}{}_{\mu}$$

对于它的表示一定能写成这样的形式：

$$L(1+\theta) = 1 + \frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}S^{\mu\nu}$$

$S^{\mu\nu}$ 是生成元（Lie 代数中的元素），你可以理解为（实际上就是） L 对 $\theta_{\mu\nu}$ 的导数。L 矩阵组成的群和 P.O.洛伦兹变换群都是 6 维的，$S^{\mu\nu}$ 就是 L 群中一条曲线在单位元处的切矢量。因为 $\theta_{\mu\nu}$ 是反对称的，我们要求 $S^{\mu\nu}$ 也是。所以我们只需要决定 6 个矩阵的样子。
下面通过具体计算给出对这些 S 矩阵的要求。考虑：

$$\begin{aligned}
(C^{\mu}\partial_{\mu}+m)\bar{\phi}(x) &= C^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\bar{\phi}(x) + m\bar{\phi}(x) \\
&= C^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}L(\Lambda)\phi(\Lambda^{-1}x) + mL(\Lambda)\phi(\Lambda^{-1}x) \\
&= C^{\mu}L(\Lambda)\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\phi(\Lambda^{-1}x) + mL(\Lambda)\phi(\Lambda^{-1}x) \\
&= C^{\mu}L(\Lambda)\frac{\partial y^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\phi(y) + mL(\Lambda)\phi(y) \\
&= C^{\mu}L(\Lambda)(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\phi(y) + mL(\Lambda)\phi(y) \\
&= L(\Lambda)(L^{-1}(\Lambda)C^{\mu}L(\Lambda)(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\phi(y) + m\phi(y))
\end{aligned}$$

这说明 L 矩阵应满足的要求是：

$$L^{-1}(\Lambda)C^{\mu}L(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}C^{\nu}$$

代入上面的无穷小 L 矩阵，将得到以下方程：

$$[C^{\mu}, iS^{\rho\sigma}] = g^{\mu\rho}C^{\sigma} - g^{\mu\sigma}C^{\rho}$$

然而上面的方程无法定下唯一的 S，这是因为 $[C^{\mu}, X] = 0$ 这个方程中 X 可以被设置为单位矩阵的任意常数倍。施加 $\mathrm{Tr}S^{\mu\nu} = 0$ 的限制后，解得：

$$S^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[C^{\mu}, C^{\nu}]$$

不难验证洛伦兹群的 Lie 代数元满足如下对易关系：

$$[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] = i[g^{\mu\rho}S^{\nu\sigma} - (\mu\leftrightarrow\nu)] - (\rho\leftrightarrow\sigma)$$

下面研究 Majorana 场的自旋。我们知道，洛伦兹变换作为一种（对称）操作，它一定有对应的幺正算符（作为洛伦兹群在 Hibert 空间中的表示）。我们把这个算符记作 $U(\Lambda)$。我现在有一个态 $|\alpha\rangle$，把这个算符作用在上面，得到 $|\alpha'\rangle = U(\Lambda)|\alpha\rangle$，标量场满足:

$$\langle\alpha'|S(\Lambda x)|\alpha'\rangle = \langle\alpha|S(x)|\alpha\rangle$$

对于 Majorana 场，有:

$$\langle\alpha'|\phi(\Lambda x)|\alpha'\rangle = L(\Lambda)\langle\alpha|\phi(x)|\alpha\rangle$$

也就是说:

$$U(\Lambda)^{-1}\phi_a(x)U(\Lambda) = \sum_{b=1}^{4} L_{ab}(\Lambda)\phi_b(\Lambda^{-1}x)$$

这里的 $U(\Lambda)$ 必然也是 Λ 的表示，所以它可以写成:

$$U(1+\theta) = 1 + \frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}M^{\mu\nu}$$

这里的 $M^{\mu\nu}$ 的空间部分就是我们在一般的量子力学中说的（轨道）角动量。我们做如下定义:

$$J_1 = M^{23}, J_2 = M^{31}, J_3 = M^{12}; K_1 = M^{10}, K_2 = M^{20}, K_3 = M^{30}$$

这里的 M 显然应该满足和前面的 S 一样的关系，从而得到 L, K 之间的对易子如下:

$$[J_i, J_j] = +i\epsilon_{ijk}J_k,\ [J_i, K_j] = +\epsilon_{ijk}K_k,\ , [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k$$

把前面的 $U(\Lambda)$ 和 $L(\Lambda)$ 都换成无穷小洛伦兹变换的形式，可给出:

$$[\phi_a(x), M^{\mu\nu}] = \frac{1}{i}(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)\phi_a(x) + \sum_{b=1}^{4}(S^{\mu\nu})_{ab}\phi_b(x)$$

特别地，代入 $M^{\mu\nu} = M^{12} = J_3$，很容易分别得到 $\phi_a(x)$ 和 J_3 的对易子，然后我们构造四个升降算符:

$$O_1(t) = \int d^3x\big[\varphi_1(x) + \mathrm{i}\varphi_2(x)\big],$$
$$O_1^\dagger(t) = \int d^3x\big[\varphi_1(x) - \mathrm{i}\varphi_2(x)\big],$$
$$O_2(t) = \int d^3x\big[\varphi_3(x) + \mathrm{i}\varphi_4(x)\big],$$
$$O_2^\dagger(t) = \int d^3x\big[\varphi_3(x) - \mathrm{i}\varphi_4(x)\big].$$

它们和 J_3 的对易子为：

$$[O_1(t), J_3] = +\frac{1}{2}O_1(t), \quad [O_1^\dagger(t), J_3] = -\frac{1}{2}O_1^\dagger(t),$$
$$[O_2(t), J_3] = -\frac{1}{2}O_2(t), \quad [O_2^\dagger(t), J_3] = +\frac{1}{2}O_2^\dagger(t).$$

所以这里的 $O_1(t), O_2^\dagger(t)$ 是降算符，另外两个是升算符。

Majorana 场有所谓"左手旋量"和"右手旋量"表示，左手自旋表示定义为：

$$\psi_L = \begin{bmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{bmatrix}$$

通过前面 Majorana 场在洛伦兹变换下的变换规律，可以直接导出 ψ_L 的变换规律：

$$U(\Lambda)^{-1}\psi_L(x)U(\Lambda) = L_L(\Lambda)\psi_L(\Lambda^{-1}x)$$

其中：

$$L_L(1+\theta) = 1 + \frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}S_L^{\mu\nu}$$

容易计算得到：

$$S_L^{10} = +\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_1, \quad S_L^{20} = +\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_2, \quad S_L^{30} = +\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_3, \quad S_L^{23} = \frac{1}{2}\sigma_1, \quad S_L^{31} = \frac{1}{2}\sigma_2, \quad S_L^{12} = \frac{1}{2}\sigma_3.$$

右手旋量就是给左手旋量取共轭。

我们上面的 S^{i0} 和 S^{ij} 是洛伦兹群的生成元，但是 Boost 和空间转动之间是有耦合的。通过构造：

$$N_i = \frac{1}{2}(J_i - iK_i),\ N_i^\dagger = \frac{1}{2}(J_i + iK_i)$$

我们有：

$$[N_i, N_j] = i\epsilon_{ijk}N_k, [N_i^\dagger, N_j^\dagger] = i\epsilon_{ijk}N_k^\dagger, [N_i, N_j^\dagger] = 0$$

所以洛伦兹群的 Lie 代数被分为两个不交的部分。不难证明，在使用左手旋量表示 Majorana 场的时候，实际上这个 Lie 代数只被“激活”了一半：$N_i=+\frac{1}{2}\sigma_i, N_i^\dagger=0$。同样，如果你使用右手旋量表示 Majorana 场，也是激活一半。一个洛伦兹群的不可约表示可以使用两个数来计数：$S_L,S_R\in\{0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\cdots\}$，$N_i,N_i^\dagger$ 的维度分别是 $2S_L+1,2S_R+1$。基本上，我选择不同的 S_L,S_R 就会对应不同的场。这一点我们在后面再详细讨论。

Quantization of Majorana Theory

要谈到如何把一个场量子化，我们实际上就是要找到满足因果关系的，场算符的对易子。我们现在不知道使用对易子还是反对易子来量子化，所以记：

$$[A,B]_\sigma=AB-\sigma BA$$

再记：

$$[\phi_a(x),\phi_b(y)]=f_{ab}(x-y)$$

我们就要求这个 $f_{ab}(x)$，考虑其 Fourier 变换：

$$\tilde{f}_{ab}(k)=\int \mathrm{d}^4x f_{ab}(x)\exp(-ikx)$$

下面先证明它是厄米的：

$$\begin{aligned}
\tilde{f}^\star_{ab}(k)&=\int \mathrm{d}^4x f^\star_{ab}(x)\exp(ikx)\\
&=\int \mathrm{d}^4x[\phi_a(x),\phi_b(0)]^\dagger_\sigma\exp(ikx)\\
&=\int \mathrm{d}^4x[\phi_b^\dagger(0),\phi_a^\dagger(x)]_\sigma\exp(ikx)\\
&=\int \mathrm{d}^4x[\phi_b(0),\phi_a(x)]_\sigma\exp(ikx)\\
&=\int \mathrm{d}^4x[\phi_b(-x),\phi_a(x)]\exp(ikx)\\
&=\int \mathrm{d}^4y[\phi_b(y),\phi_a(0)]\exp(-iky)\\
&=\tilde{f}_{ba}(k)
\end{aligned}$$

根据场方程，我们可以获得它的一些性质：由于

$$C^\mu_{ac}\partial_\mu\phi_c(x)+m\phi_a(x)=0$$

考虑整个场方程与 ϕ_b 的对易：

$$\begin{aligned}0 &= (C^\mu_{ac}\partial_\mu\phi_c(x)+m\phi_a(x))\phi_b(0)-\sigma\phi_b(0)(C^\mu_{ac}\partial_\mu\phi_c(x)+m\phi_a(x))\\ &= C^\mu_{ac}\partial_\mu[\phi_c(x),\phi_b(0)]_\sigma+m[\phi_a(x),\phi_b(0)]_\sigma\\ &= C^\mu_{ac}\partial_\mu f_{cb}(x)+mf_{ab}(x)\end{aligned}$$

做傅里叶变换：

$$(ik_\mu C^\mu+m\mathbf{1})\tilde{f}(k)=0$$

这里的 f_k 是个矩阵。由于 $\det(ik_\mu C^\mu)=(k^2+m^2)^2$，那么显然 $\tilde{f}(k)$ 只能在 Mass Shell 上不为 0。下面我们研究它在洛伦兹变换下是怎样变的，这样我们只要解出一个点的 $\tilde{f}(k)$ 就知道其他点的了。为了研究它，我们需要从实空间开始，假设 $f_{ab}(x)$ 是 c 数：

$$\begin{aligned}f_{ab}(x) &= U(\Lambda)^{-1}f_{ab}(x)U(\Lambda)\\ &= U(\Lambda)^{-1}[\phi_a(x)\phi_b(0)-\sigma\phi_b(0)\phi_a(x)]U(\Lambda)\\ &= U^{-1}\phi_a(x)UU^{-1}\phi_b(0)U-\sigma U^{-1}\phi_b(0)UU^{-1}\phi_a(x)U\\ &= L_{ac}(\Lambda)\phi_c(\Lambda^{-1}x)L_{bd}\phi_d(0)-\sigma L_{bd}\phi_b(0)L_{ac}\phi_c(\Lambda^{-1}x)\\ &= L_{ac}(\Lambda)L_{bd}(\Lambda)f_{cd}(\Lambda^{-1}x)\end{aligned}$$

那么立刻可以证明：

$$\tilde{f}_{ab}(\Lambda k)=L_{ac}(\Lambda)L_{bd}(\Lambda)\tilde{f}_{cd}(k),\ \tilde{f}(\Lambda k)=L(\Lambda)f(k)L(\Lambda)^T$$

所以下面集中精力解出一点，$k^\mu=(k^0,0,0,0)$。此时，k 在纯空间转动下是不变的，因此 $f_{ab}(\cdot)$ 也应当在空间转动下不变。代入 $L=1+i\theta_1S^{23}+i\theta_2S^{31}+i\theta_3S^{12}$，得到方程：

$$\theta_1(S^{23}\tilde{f}+\tilde{f}S^{23T})+\theta_2(S^{31}\tilde{f}+\tilde{f}S^{31T})+\theta_3(S^{12}\tilde{f}+\tilde{f}S^{12T})=0$$

利用三个角度的任意性，解出 f 应满足的形式：

$$\tilde{f}(k^0,0,0,0)=2\pi\delta((k^0)^2-m^2)(\xi_0 1+\xi_1C^0+\xi_2C^1C^2C^3+\xi_3C^0C^1C^2C^3)$$

ξ_i 是只依赖于 k^0 符号的东西。我们这个猜测只是基于 $\tilde{f}$ 在洛伦兹变换下的行为，其余的信息都还没用。使用 Majorana 场方程在动量空间中的形式，立刻得到：

$$\xi_1=i\xi_0\mathrm{sign}(k^0),\ \xi_3=i\xi_2\mathrm{sign}(k^0)$$

再利用 $\tilde{f}$ 的厄米性质，解出 $\xi_0^\star=\xi_0,\xi_i^\star=-\xi_i$。这意味着 ξ_i 要么是 0，要么纯虚数。那么定出 $\xi_2=\xi_3=0$（一个纯虚另一个就要实），从而 $\tilde{f}$ 被确定至下面的形式：

$$\tilde{f}(k^0,0,0,0)=2\pi\delta((k^0)^2-m^2)(\theta(k^0)\alpha(1+iC^0)+\theta(-k^0)\beta(1-iC^0))$$

现在做一个 Boost 就可以把它打到 Mass Shell 上的其他位置：

$$\tilde{f}(p)=2\pi\delta(p^2+m^2)\frac{1}{m}(\alpha\theta(p^0)-\beta\theta(-p^0))(\not{p}+im)C^0$$

做个傅里叶变换回实空间：

$$f(x)=\left(-\frac{i\alpha}{m}\frac{\partial I(x)}{\partial x^\mu}+\frac{i\beta}{m}\frac{\partial I(-x)}{\partial x^\mu}\right)C^\mu C^0+(i\alpha I(x)-i\beta I(-x))C^0$$

我们要求 $x^2>0$ 的时候有 $I(x)=0\Rightarrow I(x)=I(-x)$，那么继续定出常数间的关系 $\alpha=\beta$。所以：

$$\tilde{f}(k)=\frac{\alpha}{m}(2\pi)\delta(k^2+m^2)\mathrm{sign}(k^0)(\not{k}+im)C^0$$

利用 $I(-x)=I^\star(x)$：

$$f(x)=-\frac{2\alpha}{m}\frac{\partial I_2(x)}{\partial x^\mu}C^\mu C^0+2\alpha I_2(x)C^0,\ I_2(x)=-\mathrm{Im}(x)$$

注意：$I_2(x)$ 是奇函数，$\dfrac{\partial I_2(x)}{\partial x^\mu}$ 是偶函数，C^0 是反对称的，但是 $C^\mu C^0$ 是对称的，所以 $f^T(-x)=+f(x)\Rightarrow f_{ba}(y-x)=+f_{ab}(x-y)$ 。在这种情况下，如果我仍然使用对易子来量子化这个场，那么我们得到的是 $[\phi_a(x),\phi_b(x)]=0$，这是一个经典理论。为了得到非经典的结果，必须使用反对易子量子化，也就是指定 $\{\phi_a(x),\phi_b(x)\}=f_{ab}(x-y)$。

在四矢量 x 的时间维度 x^0 很小的极限下，我们得到以下近似：

$$I_2(x)\to 0\delta(\boldsymbol{x}),\frac{\partial I_2(x)}{\partial x^0}\to+\frac{1}{2}\delta(\boldsymbol{x}),\frac{\partial I_2(x)}{\partial x^i}\to 0\delta(\boldsymbol{x})$$

代入上面的 $f(x)$ 得到 $f(0,\boldsymbol{x})=\dfrac{\alpha}{m}\delta(\boldsymbol{x})\mathbf{1}$。，等时对易子：

$$\{\phi_a(\boldsymbol{x}),\phi_b(\boldsymbol{y})\}=\frac{\alpha}{m}\delta_{ab}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$

现在我们仍然有常数 α 没指定，这其实反映了我们可以任意给场乘以一个常数。我们选定 $\alpha=m$。
下面要为这个场给出动量、能量，唯一的约束是和 Heisenberg 方程兼容，这给出：

$$H=\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^3x\phi^T C^0(C^i\partial_i+m)\phi,\ P=-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^3x\pi_a\partial_i\phi_a$$

如同自由实标量场一样，Majorana 场也可以被显式解出来。最好的办法是求解场方程在动量空间中的形式：

$$(i\not{k}+m)\tilde{\phi}(k)=0$$

这个方程有两个独立解（因为前面的矩阵的秩是 2，Null Space 是 2 维）：

$$(i\not{p}+m)u_s(\boldsymbol{p})=0$$

并且这两个解满足：

$$S_3u_s(0)=\frac{s}{2}u_s(0)$$

（这就是为什么我们说 Majorana 场对应了自旋向上、向下的两类粒子的原因。这里的求解结果可以使用 MMA 验证）不失一般性，设这里求出的两个解对应于 $p^0>0$ 的情形，那么对场方程两边取复共轭：

$$(-i\not{p}+m)u_s^\star(\boldsymbol{p})=0$$

也就是说 $p^0<0$ 情形下的解是 $u_s^\star(\boldsymbol{p})$。此时 $S_3u_s^\star(0)=-\frac{s}{2}u_s^\star(0)$。因此，为了保证实空间场算符是厄米的，动量空间的场算符只有下面这种写法：

$$\tilde{\phi}(p)=2\pi\delta(p^2+m^2)\left(\theta(p^0)\sum_s b_s(\boldsymbol{p})u_s(\boldsymbol{p})+\theta(-p^0)\sum_s b_s^\dagger(-\boldsymbol{p})u_s^\star(-\boldsymbol{p})\right)$$

此时实空间的场算符是：

$$\phi(x)=\sum_s\int\tilde{\mathrm{d}}p(b_s(p)u_s(p)\exp(ipx)+b_s^\dagger(p)u_s^\star(p)\exp(-ipx))$$

通过求解上面的方程，你可以定下 $u_+(0),u_-(0)$，我们这里选择如下的结果：

$$u_+(\mathbf{0})=\sqrt{\frac{m}{2}}\begin{pmatrix}+1\\-i\\+1\\+i\end{pmatrix},\qquad u_-(\mathbf{0})=\sqrt{\frac{m}{2}}\begin{pmatrix}-1\\-i\\+1\\-i\end{pmatrix}.$$

为了得到任意动量 $\boldsymbol{p}$ 时的结果，我们显然应当研究它们在洛伦兹变换下的行为。回忆前面我们量子化 Majorana 场时对 C 矩阵在洛伦兹变换下行为的要求：

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu L^{-1}(\Lambda)C^\nu L(\Lambda)=C^\mu$$

并且由 $p'_\mu=(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu p_\nu$ 得：

$$L^{-1}(\Lambda)(ip'_\nu C^\nu + m)L(\Lambda)u = (iL^{-1}(\Lambda)(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu p_\mu C^\nu L(\Lambda) + m)u = (ip_\mu C^\mu + m)u$$

也就是说，如果 $(ip_\mu C^\mu + m)u = 0$，那么立刻得到 $(ip'_\mu C^\mu + m)L(\Lambda)u = 0$。（身处动量空间的 u 和实空间的场 $\phi(x)$ 有相同的变换规则）那么可以获得所有的 $u_+(\boldsymbol{p}), u_-(\boldsymbol{p})$：

$$u_+(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\sqrt{m+p^0}} \begin{pmatrix} m+p^0-p^1-\mathrm{i}p^2-p^3 \\ -\mathrm{i}(m+p^0+p^1+\mathrm{i}p^2-p^3) \\ m+p^0-p^1-\mathrm{i}p^2+p^3 \\ +\mathrm{i}(m+p^0+p^1+\mathrm{i}p^2+p^3) \end{pmatrix},$$

$$u_-(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\sqrt{m+p^0}} \begin{pmatrix} -(m+p^0+p^1-\mathrm{i}p^2-p^3) \\ -\mathrm{i}(m+p^0-p^1+\mathrm{i}p^2-p^3) \\ m+p^0+p^1-\mathrm{i}p^2+p^3 \\ -\mathrm{i}(m+p^0-p^1+\mathrm{i}p^2+p^3) \end{pmatrix},$$

它有非常多性质：

$$
\begin{aligned}
\not{p}u_s(\mathbf{p}) &= +\mathrm{i}mu_s(\mathbf{p}),\\
\not{p}u_s^*(\mathbf{p}) &= -\mathrm{i}mu_s^*(\mathbf{p}),\\
u_s^\dagger(\mathbf{p})\mathrm{i}C^0\not{p} &= +\mathrm{i}mu_s^\dagger(\mathbf{p})\mathrm{i}C^0,\\
u_s^T(\mathbf{p})\mathrm{i}C^0\not{p} &= -\mathrm{i}mu_s^T(\mathbf{p})\mathrm{i}C^0,\\
u_{s'}^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) &= 2p^0\delta_{s's},\\
u_{s'}^T(\mathbf{p})u_s^*(\mathbf{p}) &= 2p^0\delta_{s's},\\
u_{s'}^\dagger(\mathbf{p})\mathrm{i}C^0u_s(\mathbf{p}) &= +2m\delta_{s's},\\
u_{s'}^T(\mathbf{p})\mathrm{i}C^0u_s^*(\mathbf{p}) &= -2m\delta_{s's},\\
u_{s'}^T(\mathbf{p})\mathrm{i}C^0u_s(\mathbf{p}) &= 0,\\
u_{s'}^\dagger(\mathbf{p})\mathrm{i}C^0u_s^*(\mathbf{p}) &= 0,\\
u_{s'}^\dagger(\mathbf{p})C^0C^\mu u_s(\mathbf{p}) &= -2p^\mu\delta_{s's},\\
u_{s'}^T(\mathbf{p})C^0C^\mu u_s^*(\mathbf{p}) &= -2p^\mu\delta_{s's},\\
u_{s'}^\dagger(\mathbf{p})u_s^*(-\mathbf{p}) &= 0,\\
u_{s'}^T(\mathbf{p})u_s(-\mathbf{p}) &= 0,\\
u_s(-\mathbf{p}) &= +\mathrm{i}C^0u_s(\mathbf{p}),\\
u_s^*(-\mathbf{p}) &= -\mathrm{i}C^0u_s^*(\mathbf{p}),\\
C_5u_s(\mathbf{p}) &= -\mathrm{i}su_{-s}^*(\mathbf{p}),\\
C_5u_s^*(\mathbf{p}) &= +\mathrm{i}su_{-s}(\mathbf{p}),\\
u_{-s}^*(-\mathbf{p}) &= -sC^1C^2C^3u_s(\mathbf{p}),\\
u_{-s}(-\mathbf{p}) &= -sC^1C^2C^3u_s^*(\mathbf{p}),
\end{aligned}
$$

$$
C_5 \equiv C^0C^1C^2C^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

$$
C_5^2 = -\mathbf{1}.
$$

$$
\{C_5, C^\mu\} = 0.
$$

$$
[C_5, S^{\mu\nu}] = 0.
$$

Gordon identities:

$$
\begin{aligned}
2mu_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')C^0C^\mu u_s(\mathbf{p}) &= -\mathrm{i}u_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')C^0\left[(p'+p)^\mu - 2\mathrm{i}S^{\mu\nu}(p'-p)_\nu\right]u_s(\mathbf{p}),\\
2mu_{s'}^T(\mathbf{p}')C^0C^\mu u_s^*(\mathbf{p}) &= +\mathrm{i}u_{s'}^T(\mathbf{p}')C^0\left[(p'+p)^\mu - 2\mathrm{i}S^{\mu\nu}(p'-p)_\nu\right]u_s^*(\mathbf{p}).
\end{aligned}
$$

Spin sums that will be useful in the calculations of scattering cross sections:

$$
\begin{aligned}
\sum_{s=\pm} u_s(\mathbf{p})u_s^\dagger(\mathbf{p})\mathrm{i}C^0 &= m - \mathrm{i}\not{p},\\
\sum_{s=\pm} u_s^*(\mathbf{p})u_s^T(\mathbf{p})\mathrm{i}C^0 &= -m - \mathrm{i}\not{p}.
\end{aligned}
$$

类似自由标量场，这里的 $b_s, b_s^\dagger$ 也应当是升降算符。通过对场量 $\phi(x)$ 做一次傅里叶变换可以将他们提取出来：

$$b_s(p) = \int \mathrm{d}^3x \exp(-ipx) u_s^\dagger(p)\phi(x),\ b_s^\dagger(p) = \int \mathrm{d}^3x u_s^T(p)\phi(x)$$

利用场量间的反对易子可以计算它们的反对易子，与自由标量场类似，只有一升一降不为 0：

$$\{b_s(p), b_{s'}^\dagger(p')\} = 2\omega_p(2\pi)^3\delta(p-p')\delta_{ss'},\ \{b_s(p), b_{s'}(p')\} = 0,\ \{b_s^\dagger(p), b_{s'}^\dagger(p')\} = 0$$

将场量的解析形式代入 P^μ：

$$P^\mu = \sum_s \int \tilde{\mathrm{d}p} \frac{p^\mu}{2}(b_s^\dagger(p)b_s(p) - b_s(p)b_s^\dagger(p)) := \int \tilde{\mathrm{d}p} p^\mu (b_s^\dagger(p)b_s(p)) + \mathrm{Const}$$

Quantization of Dirac Theory

考虑两个独立的、同质量的 Majorana 场 ϕ, ζ，均满足场方程：

$$(C^\mu\partial_\mu + m)\phi = 0,\ (C^\mu\partial_\mu + m)\xi = 0$$

由于它们独立，对易子是：

$$\{\phi_a(t,x), \phi_b(t,x)\} = \{\zeta_a(t,x), \zeta_b(t,x)\} = \delta_{ab}\delta(x-y),\ \{\phi, \zeta\} = 0$$

令 $\psi_a(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\phi_a(x) + i\zeta_a(x))$，这个场被称为 Dirac 场。显然它满足和 Majorana 场一样的场方程，立刻从两个 Majorana 场的对易子得到 Dirac 场的对易子：

$$\{\Psi_a(t,\mathbf{x}), \Psi_b(t,\mathbf{y})\} = 0,$$
$$\{\Psi_a^\dagger(t,\mathbf{x}), \Psi_b^\dagger(t,\mathbf{y})\} = 0,$$
$$\{\Psi_a(t,\mathbf{x}), \Psi_b^\dagger(t,\mathbf{y})\} = \delta_{ab}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

两个 Majorana 场各有一套升降算符，做线性组合：

$$b_s(\mathbf{p}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[b_s^{(\varphi)}(\mathbf{p}) + \mathrm{i}b_s^{(\zeta)}(\mathbf{p})\right],$$
$$d_s(\mathbf{p}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[b_s^{(\varphi)}(\mathbf{p}) - \mathrm{i}b_s^{(\zeta)}(\mathbf{p})\right].$$

立刻给出 Dirac 场的解析表达式：

$$\Psi(x) = \sum_{s=\pm}\int \widetilde{dp}\left[b_s(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p})e^{\mathrm{i}px} + d_s^\dagger(\mathbf{p})u_s^*(\mathbf{p})e^{-\mathrm{i}px}\right].$$

只有相同字母的算符、一升一降的反对易子不为 0：

$$\{b_s(\mathbf{p}), b_{s'}(\mathbf{p}')\} = 0,$$
$$\{d_s(\mathbf{p}), d_{s'}(\mathbf{p}')\} = 0,$$
$$\{b_s(\mathbf{p}), d_{s'}(\mathbf{p}')\} = 0,$$
$$\{b_s^\dagger(\mathbf{p}), b_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')\} = 0,$$
$$\{d_s^\dagger(\mathbf{p}), d_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')\} = 0,$$
$$\{b_s^\dagger(\mathbf{p}), d_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')\} = 0,$$
$$\{b_s(\mathbf{p}), d_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')\} = 0,$$
$$\{b_s^\dagger(\mathbf{p}), d_{s'}(\mathbf{p}')\} = 0,$$
$$\{b_s(\mathbf{p}), b_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')\} = 2\omega_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{ss'},$$
$$\{d_s(\mathbf{p}), d_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')\} = 2\omega_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{ss'}.$$

下面给出 Dirac 场的能动量：显然，Dirac 场的能量应该是两个 Majorana 场能量的和，因为这两个场并没有耦合。猜测其能量有如下形式：

$$O = \int \mathrm{d}^3x \psi^\dagger i C^0(C^i\partial_i + m)\psi$$

这个东西是可以分成两个 Majorana 场的能量求和加上交互项：

$$O = H^\phi + H^\zeta + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x(\xi^T C^0(C^i\partial_i + m)\phi - \phi^T C^0(C^i\partial_i + m)\xi)$$

看看这个交互项：

$$\begin{aligned}\zeta^T C^0\phi - \phi^T C^0\zeta &= \zeta_a^T C^0_{ab}\phi_b - \phi_b C^0_{ba}\zeta_a \\ &= (C^0_{ab} + C^0_{ba})\zeta_a\phi_b = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta^T C^0 C^i\partial_i\phi - \phi^T C^0 C^i\partial_i\zeta &= \zeta_a(C^0C^i)_{ab}\partial_i\phi_b - \phi_b(C^0C^i)_{ab}\partial_i\zeta_a \\ &= (C^0C^i)_{ab}(\zeta_a\partial_i\phi_b + \partial_i\zeta_a\phi_b) \\ &= (C^0C^i)_{ab}\partial_i(\zeta_a\phi_b)\end{aligned}$$

这一项可以转换为边界项后消失。所以 O 就是能量。类似地可以得到动量。能量、动量可以统一地写成：

$$P^\mu = -i\int \mathrm{d}^3x\psi^\dagger\partial^\mu\psi$$

或者代入 Dirac 场的解析形式：

$$P^\mu = \sum_s \int \tilde{\mathrm{d}}p\, p^\mu (b_s^\dagger(p) b_s(p) + d_s^\dagger(p) d_s(p)) + \mathrm{Const}$$

与复标量场一样，Dirac 场有额外的对称性，考虑 $Q = \int \mathrm{d}^3 x \psi^\dagger \psi$，计算对易子：

$$[Q,\psi] = -\psi,\ [Q,\psi^\dagger] = +\psi^\dagger$$

使用 B-H 公式得到：

$$\exp(i\alpha Q)\psi \exp(-i\alpha Q) = \exp(-i\alpha)\psi,\ \exp(i\alpha Q)\psi^\dagger \exp(-i\alpha Q) = \exp(+i\alpha)\psi^\dagger$$

也就是说 Q 的操作相当于旋转了 ϕ,ζ，得到了一组新的 ϕ',ζ'。容易验证哈密顿量在这个旋转下是不变的，因此 Q 是这种变换（$U(1)$ 规范变换）下的守恒荷。

Quantization of EM Field

量子化电磁场之前，先把 Maxwell 方程写成张量形式：定义电磁 2-形式 $F_{\mu\nu}$ 满足：

$$F_{00} = 0,\ F_{i0} = -F_{0i} = E_i,\ F_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k$$

此时，Maxwell 方程写成：

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu, \partial_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0$$

首先考虑自由电磁场，此时取 $J^\mu = 0$。假定洛伦兹变换在 Hilbert 空间中对场算符的作用效果是这样的：

$$U(\Lambda)^{-1} F^{\mu\nu}(x) U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(\Lambda^{-1}x)$$

在这个情况下，$U(\Lambda)$ 是 Λ 的表示，这个基本要求是满足的。而且这种情况是最简单的假设，直接假设这一堆算符服从张量变换律。只凭这些信息无法完全确定对易子，所以我们需要更多信息，在电磁学中，我们知道电场是极矢量，在空间反演下反向，而磁场是轴矢量，不反向。换言之，引入宇称变换对应的算符 $U(\mathcal{P})$，电、磁场的变换规律是：

$$U(\mathcal{P}) E(x) U(\mathcal{P}) = -E(\mathcal{P}^{-1}x), U(\mathcal{P}) B(x) U(\mathcal{P}) = +B(\mathcal{P}^{-1}x)$$

此时，电荷、电流需要如下变换，才能不改变 Maxwell 方程：

$$U(\mathcal{P})^{-1} \rho(x) U(\mathcal{P}) = \rho(\mathcal{P}^{-1}x),\ U(\mathcal{P})^{-1} J(x) U(\mathcal{P}) = -J(\mathcal{P}^{-1}x)$$

下面开始算对易子：

$$[F^{\mu\nu}(x), F^{\rho\sigma}(y)]_s = f^{\mu\nu\rho\sigma}(x-y)$$

当然有一个符号 s 决定是对易子还是反对易子，这个我们仍然不知道。为了求出这个对易子，需要找出关于它的一堆性质。首先根据 $F^{\mu\nu}(\cdot)$ 本身的反对称性得到：

$$f^{\mu\nu\rho\sigma}(x) = -f^{\nu\mu\rho\sigma}(x) = -f^{\mu\nu\sigma\rho}(x)$$

由厄米性：

$$f^{\mu\nu\rho\sigma\star}(x) = -f^{\rho\sigma\mu\nu}(x)$$

从 Maxwell 方程可以获得：

$$\partial_\mu f^{\mu\nu\rho\sigma}(x) = \partial_\sigma f^{\mu\nu\rho\sigma}(x) = 0$$

$$\partial^\alpha f^{\mu\nu\rho\sigma}(x) + \partial^\mu f^{\nu\alpha\rho\sigma}(x) + \partial^\nu f^{\alpha\mu\rho\sigma}(x) = 0,$$
$$\partial^\alpha f^{\mu\nu\rho\sigma}(x) + \partial^\rho f^{\mu\nu\sigma\alpha}(x) + \partial^\sigma f^{\mu\nu\alpha\rho}(x) = 0.$$

由于 $F^{\mu\nu}(x)$ 在洛伦兹变换和空间反演下都是按照张量变换律变换的，那么对易子也是：

$$f^{\mu\nu\rho\sigma}(x) = \Lambda^{\mu}{}_{\mu'}\Lambda^{\nu}{}_{\nu'}\Lambda^{\rho}{}_{\rho'}\Lambda^{\sigma}{}_{\sigma'}f^{\mu'\nu'\rho'\sigma'}(\Lambda^{-1}x)$$
$$f^{\mu\nu\rho\sigma}(x) = \mathcal{P}^{\mu}{}_{\mu'}\mathcal{P}^{\nu}{}_{\nu'}\mathcal{P}^{\rho}{}_{\rho'}\mathcal{P}^{\sigma}{}_{\sigma'}f^{\mu'\nu'\rho'\sigma'}(\mathcal{P}^{-1}x).$$

以上所有约束都可以被放到动量空间中来：

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}^{\mu\nu\rho\sigma}(k) &= -\widetilde{f}^{\nu\mu\rho\sigma}(k) = -\widetilde{f}^{\mu\nu\sigma\rho}(k),\\
\widetilde{f}^{\mu\nu\rho\sigma *}(k) &= \widetilde{f}^{\rho\sigma\mu\nu}(k),\\
k_\nu \widetilde{f}^{\mu\nu\rho\sigma}(k) &= 0,\\
k_\sigma \widetilde{f}^{\mu\nu\rho\sigma}(k) &= 0,\\
k^\alpha \widetilde{f}^{\mu\nu\rho\sigma}(k) + k^\mu \widetilde{f}^{\nu\alpha\rho\sigma}(k) + k^\nu \widetilde{f}^{\alpha\mu\rho\sigma}(k) &= 0,\\
k^\alpha \widetilde{f}^{\mu\nu\rho\sigma}(k) + k^\rho \widetilde{f}^{\mu\nu\sigma\alpha}(k) + k^\sigma \widetilde{f}^{\mu\nu\alpha\rho}(k) &= 0,\\
\widetilde{f}^{\mu\nu\rho\sigma}(\Lambda k) &= \Lambda^{\mu}{}_{\mu'}\Lambda^{\nu}{}_{\nu'}\Lambda^{\rho}{}_{\rho'}\Lambda^{\sigma}{}_{\sigma'}\widetilde{f}^{\mu'\nu'\rho'\sigma'}(k).\\
\widetilde{f}^{\mu\nu\rho\sigma}(\mathcal{P}k) &= \mathcal{P}^{\mu}{}_{\mu'}\mathcal{P}^{\nu}{}_{\nu'}\mathcal{P}^{\rho}{}_{\rho'}\mathcal{P}^{\sigma}{}_{\sigma'}\widetilde{f}^{\mu'\nu'\rho'\sigma'}(k).
\end{aligned}$$

在第 5 个方程两侧乘以 k_α，并在对 α 求和的过程中使用方程 1，3，得到：

$$k^2\tilde{f}(k) = 0$$

这意味着这个场只能在光锥上有解。把它的解写成下面的形式：

$$\tilde{f}(k) = (h_+(k)\theta(k^0) + h_-(k)\theta(-k^0))2\pi\delta(k^2)$$

这里的 f, h 都有上标 $\mu\nu\rho\sigma$。由于 h_+, h_- 也是反对称的，把这个反对称的效果单独写出来：

$$h_{\pm}^{\mu\nu\rho\sigma}(\mathbf{k}) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\nu-\mu)\operatorname{sgn}(\sigma-\rho) X^{(\pm)}_{\overline{\mu\nu},\overline{\rho\sigma}}(\mathbf{k}), & \text{if } \mu\neq\nu \text{ AND } \rho\neq\sigma, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

那么现在 $X^{(\pm)}$ 只会和 $\{\mu\nu\},\{\rho\sigma\}$ 这两个集合里面有什么有关，和里面东西的顺序无关。由于 $0\sim 3$ 的下标有 6 个组合方法，所以 $X^{(\pm)}$ 分别是 6×6 矩阵 $X^{(\pm)}_{nn'}$。

$$\begin{aligned}
&\overline{01}\equiv\overline{10}\equiv 1,\\
&\overline{02}\equiv\overline{20}\equiv 2,\\
&\overline{03}\equiv\overline{30}\equiv 3,\\
&\overline{23}\equiv\overline{32}\equiv 4,\\
&\overline{13}\equiv\overline{31}\equiv 5,\\
&\overline{12}\equiv\overline{21}\equiv 6.
\end{aligned}$$

同时由于 $F^{\mu\nu}$ 的厄米性导致 $X^{\pm\star}_{nn'} = X^{\pm}_{n'n}$。现在我们要使用和之前类似的手段来确定 $X^{\pm}$：考虑 $(k^0,0,0,b)$ 这一点，它在绕着 x^3 轴的转动下保持不变，$\tilde{f}$ 当然也应该保持不变。使用 Mathmatica 求解方程可将 $X^{\pm}$ 确定到下面的程度：

$$X^{(+)}(0,0,b) = b^2 \begin{pmatrix} u & \mathrm{i}w & 0 & -\mathrm{i}w & -u & 0 \\ -\mathrm{i}w & u & 0 & -u & \mathrm{i}w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i}w & -u & 0 & u & -\mathrm{i}w & 0 \\ -u & -\mathrm{i}w & 0 & \mathrm{i}w & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X^{(-)}(0,0,b) = b^2 \begin{pmatrix} u' & -\mathrm{i}w' & 0 & -\mathrm{i}w' & u' & 0 \\ \mathrm{i}w' & u' & 0 & u' & \mathrm{i}w' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i}w' & u' & 0 & u' & \mathrm{i}w' & 0 \\ u' & -\mathrm{i}w' & 0 & -\mathrm{i}w' & u' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

现在可以用一个洛伦兹变换把 $(\pm b,0,0,b)$ 这个点推动到光锥上其他点，推动结果是：

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}^{\mu\nu\rho\sigma}(k) = \Big\{ &\big[uT^{\mu\nu\rho\sigma}(k) + \mathrm{i}wS^{\mu\nu\rho\sigma}(k)\big]\theta(k^0) \\
&+ \big[u'T^{\mu\nu\rho\sigma}(k) + \mathrm{i}w'S^{\mu\nu\rho\sigma}(k)\big]\theta(-k^0)\Big\} 2\pi\delta(k\cdot k) \qquad \text{if } \mathbf{k}\neq 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu\rho\sigma}(k) &\equiv g^{\mu\rho}k^\nu k^\sigma - g^{\mu\sigma}k^\nu k^\rho - g^{\nu\rho}k^\mu k^\sigma + g^{\nu\sigma}k^\mu k^\rho, \\
S^{\mu\nu\rho\sigma}(k) &\equiv \frac{1}{2}\big(\epsilon^{\tau\nu\rho\sigma}k_\tau k^\mu + \epsilon^{\mu\tau\rho\sigma}k_\tau k^\nu - \epsilon^{\mu\nu\tau\sigma}k_\tau k^\rho - \epsilon^{\mu\nu\rho\tau}k_\tau k^\sigma\big).
\end{aligned}$$

利用 $\tilde{f}$ 在空间反演变换下的行为，直接推出 $w=w'=0$。从而得到更简单的 $\tilde{f}$。除了上面计算出的这一部分之外，$\tilde{f}(k)$ 还可以在 $k=0$ 处不为 0，这一部分在傅里叶变换之后会变成关于 x 的多项式，记这一部分为 $Q^{\mu\nu\rho\sigma}(x)$，且满足 $\partial_\alpha\partial^\alpha Q(x)=0$。通过对上面的 $\tilde{f}(k)$ 做变换得到下面结果：

$$\begin{aligned}
f^{\mu\nu\rho\sigma}(x) = Q^{\mu\nu\rho\sigma}(x) + &\Big\{\big[g^{\mu\rho}(x^2 g^{\nu\sigma} - 4x^\nu x^\sigma) - (\rho\leftrightarrow\sigma)\big] - \big[\mu\leftrightarrow\nu\big]\Big\} \\
&\times\left\{\frac{u}{2\pi^2\big[|\mathbf{x}|^2 - (x^0 - \mathrm{i}\epsilon)^2\big]^3} + \frac{u'}{2\pi^2\big[|\mathbf{x}|^2 - (x^0 + \mathrm{i}\epsilon)^2\big]^3}\right\},
\end{aligned}$$

利用因果性的约束，立刻给出 $Q(x)=0, u=-u$。进一步地：

$$\widetilde{f}^{\mu\nu\rho\sigma}(k)=uT^{\mu\nu\rho\sigma}(k)\,\mathrm{sgn}(k^0)2\pi\delta(k\cdot k),$$

$$f^{\mu\nu\rho\sigma}(x)=\frac{\mathrm{i}u}{2\pi}\,\mathrm{sgn}(x^0)\big(g^{\mu\rho}\partial^\nu\partial^\sigma-g^{\mu\sigma}\partial^\nu\partial^\rho-g^{\nu\rho}\partial^\mu\partial^\sigma+g^{\nu\sigma}\partial^\mu\partial^\rho\big)\delta(x\cdot x),$$

从前面的表达式可以看出：

$$f^{\rho\sigma\mu\nu}(-x)=-f^{\mu\nu\rho\sigma}(x)$$

这直接导致：

$$[F^{\rho\sigma}(y),F^{\mu\nu}(x)]_s=-[F^{\mu\nu}(x),F^{\rho\sigma}(y)]_s$$

因此电磁场是使用反对易括号量子化的。

在 $x^0\to 0$ 时，依旧可以求出等时对易关系：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{sgn}(x^0)\partial^0\partial^0\delta(x\cdot x)\to 0\delta(\mathbf{x}),\\
&\mathrm{sgn}(x^0)\partial^0\partial^i\delta(x\cdot x)\to -2\pi\partial^i\delta(\mathbf{x}),\\
&\mathrm{sgn}(x^0)\partial^i\partial^i\delta(x\cdot x)\to 0\delta(\mathbf{x})\quad(\text{not summed over } i),\\
&\mathrm{sgn}(x^0)\partial^i\partial^j\delta(x\cdot x)\to 0\delta(\mathbf{x}),\quad i\neq j.
\end{aligned}$$

Thus

$$f^{0jij}(x)=f^{ij0j}(x)\to -\mathrm{i}u\partial^i\delta(\mathbf{x}),\quad i\neq j\quad(\text{not summed over } j).$$

$$\begin{aligned}
&[E_i(t,\mathbf{x}),E_j(t,\mathbf{y})]=0,\\
&[B_i(t,\mathbf{x}),B_j(t,\mathbf{y})]=0,\\
&[E_i(t,\mathbf{x}),B_j(t,\mathbf{y})]=-\mathrm{i}u\epsilon_{ijk}\frac{\partial\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial x^k},\\
&[B_i(t,\mathbf{x}),E_j(t,\mathbf{y})]=+\mathrm{i}u\epsilon_{ijk}\frac{\partial\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial x^k}.
\end{aligned}$$

为了使得代入哈氏量之后，场方程（麦克斯韦方程）与 Heisenberg 方程一致，猜测哈氏量：

$$H=\eta\int \mathrm{d}^3x(E^2+B^2)$$

注意前面对易子里面还有一个未定常量 u，Heisenberg 方程给出 $\eta u=+\frac{1}{2}$，一般而言我们选取 $u=1,\eta=\frac{1}{2}$。同理选择动量算符：

$$P=\int \mathrm{d}^3xE\times B$$

最后我们可以把电磁场解出来，为了保证厄米性，假设电磁场有这样的展开：

$$F^{\mu\nu}(x)=\sum_\lambda\int \mathrm{d}\tilde{k}(a_\lambda(\boldsymbol{k})\epsilon_\lambda^{\mu\nu\star}(\boldsymbol{k})\exp(ikx)+a_\lambda^\dagger(\boldsymbol{k})\epsilon_\lambda^{\mu\nu}(\boldsymbol{k})\exp(ikx))$$

这里的 $\epsilon_\lambda^{\mu\nu}$ 一定满足动量空间中的 Maxwell 方程组，所以：

$$\begin{aligned}\epsilon_\lambda^{\mu\nu}(\mathbf{k})&=-\epsilon_\lambda^{\nu\mu}(\mathbf{k}),\\ k_\nu\epsilon_\lambda^{\mu\nu}(\mathbf{k})&=0,\\ k^\mu\epsilon_\lambda^{\nu\rho}(\mathbf{k})+k^\nu\epsilon_\lambda^{\rho\mu}(\mathbf{k})+k^\rho\epsilon_\lambda^{\mu\nu}(\mathbf{k})&=0.\end{aligned}$$

与 Majorana 场一样，这组方程有两个线性独立的解，以 $\lambda=\pm1$ 标记。

现在我们试图直接构造这两个解。这里的 $\boldsymbol{k}$ 可以认为是电磁波的波矢，找到两个与波矢正交、且相互正交的是俩个 $\boldsymbol{u}_a,\boldsymbol{u}_b$ 满足：

$$u_a\cdot u_b=\delta_{ab},u_1\times u_2=\hat{k},u_2\times\hat{k}=u_1,\hat{k}\times u_1=u_2$$

选择：

$$\boldsymbol{e}_\lambda(\hat{\boldsymbol{k}})=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_1-\lambda i\boldsymbol{u}_2)$$

e_λ 会满足以下恒等式：

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{e}_\lambda&=0,\\ \mathbf{e}_{\lambda'}(\hat{\mathbf{k}})\cdot\mathbf{e}_\lambda^*(\hat{\mathbf{k}})&=\delta_{\lambda'\lambda},\\ e_\lambda^{i*}(\mathbf{k})e_\lambda^j(\mathbf{k})&=\frac{1}{2}\delta_{ij}-\frac{1}{2}\hat{k}^i\hat{k}^j-\frac{\mathrm{i}\lambda}{2}\epsilon_{ijk}\hat{k}^k,\\ \sum_{\lambda=\pm}e_\lambda^{i*}(\hat{\mathbf{k}})e_\lambda^j(\hat{\mathbf{k}})&=\delta_{ij}-\hat{k}^i\hat{k}^j,\\ \mathbf{e}_+(\hat{\mathbf{k}})\times\mathbf{e}_-(\hat{\mathbf{k}})&=\mathrm{i}\hat{\mathbf{k}},\\ \hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{e}_\lambda(\hat{\mathbf{k}})&=\lambda\mathrm{i}\mathbf{e}_\lambda(\hat{\mathbf{k}}),\\ \mathbf{e}_\lambda(-\hat{\mathbf{k}})&=e^{\mathrm{i}\lambda\alpha(\hat{\mathbf{k}})}\mathbf{e}_\lambda^*(\hat{\mathbf{k}}),\end{aligned}$$

其中 $\alpha(-\hat{k})=\alpha(\hat{k})$ 是一个依赖于 u_1,u_2 选择的实数相位。这些 e_λ 可构造动量空间中 Maxwell 方程的解：

$$\begin{aligned}&\epsilon_\lambda^{00}(\mathbf{k})\equiv0,\\ &\epsilon_\lambda^{0i}(\mathbf{k})=-\epsilon_\lambda^{i0}(\mathbf{k})\equiv|\mathbf{k}|e_\lambda^i(\hat{\mathbf{k}}),\\ &\epsilon_\lambda^{ij}(\mathbf{k})\equiv\lambda\mathrm{i}\epsilon_{ijk}|\mathbf{k}|e_\lambda^k(\hat{\mathbf{k}}).\end{aligned}$$

可以验证这样选择的 $\epsilon_\lambda^{\mu\nu}$ 要满足恒等式：

$$\epsilon_\lambda^{0i*}(\mathbf{k})\epsilon_{\lambda'}^{0i}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}\epsilon_\lambda^{ij*}(\mathbf{k})\epsilon_{\lambda'}^{ij}(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|^2\delta_{\lambda\lambda'},$$

$$\epsilon_+^{\mu\nu*}(\mathbf{k}) = \epsilon_-^{\mu\nu}(\mathbf{k}),$$

$$\sum_{\lambda=\pm}\epsilon_\lambda^{\mu\nu*}(\mathbf{k})\epsilon_\lambda^{\rho\sigma}(\mathbf{k}) = g^{\mu\rho}k^\nu k^\sigma + g^{\nu\sigma}k^\mu k^\rho - g^{\nu\rho}k^\mu k^\sigma - g^{\mu\sigma}k^\nu k^\rho \equiv T^{\mu\nu\rho\sigma}(k),$$

可以重新写出 E, B 的表达式，求出升降算符间的对易关系，以及重新表达能量、动量：

$$[a_\lambda(\mathbf{k}), a_{\lambda'}(\mathbf{k}')] = 0,$$
$$[a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}), a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}')] = 0,$$
$$[a_\lambda(\mathbf{k}), a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3\, 2|\mathbf{k}|\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta_{\lambda\lambda'}.$$

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\lambda=\pm}\int \widetilde{dk}\frac{|\mathbf{k}|}{2}\left[a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})a_\lambda(\mathbf{k}) + a_\lambda(\mathbf{k})a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})\right] \\ &= \sum_{\lambda=\pm}\int \widetilde{dk}\,|\mathbf{k}|a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})a_\lambda(\mathbf{k}) + \text{const.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \sum_{\lambda=\pm}\int \widetilde{dk}\,\frac{\mathbf{k}}{2}\left[a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})a_\lambda(\mathbf{k}) + a_\lambda(\mathbf{k})a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})\right] \\ &= \sum_{\lambda=\pm}\int \widetilde{dk}\,\mathbf{k}\,a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})a_\lambda(\mathbf{k}) + \text{const.} \end{aligned}$$

接下来看看电磁场的角动量。我们知道，角动量算符应该是洛伦兹群的生成元中的空间转动部分，也就是 $U(\Lambda) = \exp\left(\frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right), M^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M^{jk}$。利用电磁场在洛伦兹变换下的行为可以给出 $[F^{\rho\sigma}(x), M^{\mu\nu}]$，进一步得到：

$$[\mathbf{E}(x), \mathbf{u}\cdot\mathbf{J}] = \left[\mathbf{u}\cdot\left(\mathbf{x}\times(-\mathrm{i}\nabla)\right)\right]\mathbf{E}(x) + \mathrm{i}\mathbf{u}\times\mathbf{E}(x),$$
$$[\mathbf{B}(x), \mathbf{u}\cdot\mathbf{J}] = \left[\mathbf{u}\cdot\left(\mathbf{x}\times(-\mathrm{i}\nabla)\right)\right]\mathbf{B}(x) + \mathrm{i}\mathbf{u}\times\mathbf{B}(x).$$

计算前面的 $a_\lambda, a_\lambda^\dagger$ 与 $\hat{K}\cdot J$ 的对易子得到：

$$[\hat{K}\cdot J, a_\lambda(k)] = -\lambda a_\lambda(k), [\hat{k}\cdot J, a_\lambda^\dagger(k)] = +\lambda a_\lambda^\dagger(k)$$

这说明 $a_\lambda^\dagger$ 确实是产生算符，产生了自旋为 λ 的光子，且光子的自旋是沿着波矢方向的。

最后，利用 $F^{\mu\nu}(x)$ 的展开式，产生、湮灭算符的对易关系可计算电磁场的关联函数：

$$\begin{aligned} \langle 0|\,F^{\mu\nu}(x)F^{\rho\sigma}(y)\,|0\rangle &= \int \widetilde{dk}\,T^{\mu\nu\rho\sigma}(k)e^{\mathrm{i}k\cdot(x-y)} \\ &= \frac{\left\{\left[g^{\mu\rho}\left((x-y)^2 g^{\nu\sigma} - 4(x-y)^\nu(x-y)^\sigma\right) - (\rho\leftrightarrow\sigma)\right] - \left[\mu\leftrightarrow\nu\right]\right\}}{2\pi^2\left[|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 - (x^0-y^0-\mathrm{i}\epsilon)^2\right]^3}. \end{aligned} \tag{35}$$

具体而言：

$$\begin{aligned}
&\langle 0| E_i(t,\mathbf{x})E_j(t,\mathbf{0})|0\rangle = \langle 0| B_i(t,\mathbf{x})B_j(t,\mathbf{0})|0\rangle = \frac{2\hat{x}^i\hat{x}^j-\delta_{ij}}{\pi^2 r^4},\\
&\langle 0| E_i(t,\mathbf{x})B_j(t,\mathbf{0})|0\rangle = 0,
\end{aligned}$$

也可以写出编时传播子：

$$\begin{aligned}
\langle 0| \mathrm{T}F^{\mu\nu}(x)F^{\rho\sigma}(y)|0\rangle &= \int \widetilde{dk}\, T^{\mu\nu\rho\sigma}(k)\Big[\theta(x^0-y^0)e^{\mathrm{i}k\cdot(x-y)}+\theta(y^0-x^0)e^{\mathrm{i}k\cdot(y-x)}\Big]\\
&= \int \frac{-\mathrm{i}d^4k}{(2\pi)^4}\frac{T^{\mu\nu\rho\sigma}(k)}{k^2-\mathrm{i}\epsilon}e^{\mathrm{i}k\cdot(x-y)} \equiv \Delta^{\mu\nu\rho\sigma}(x-y),
\end{aligned}$$