# （官方QFT）路径积分和费曼图

#Quantum_Field_Theory

## Path Integral of Particles

由于我们要计算系统从一个多粒子态到另一个多粒子态的概率，根据 LSZ Reduction Formula，我们需要计算系统的真空基态值 $\langle 0|\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)|0\rangle$。为了简化问题起见，我们首先在粒子系统上研究如何计算这个值，也就是计算 $\langle 0|X(t_1)\cdots X(t_n)|0\rangle$。
现在，让我们考虑我们的时间可以取复数。取两个态 $|1\rangle, |2\rangle$，它们随着时间的演化由时间演化算符给出：

$$\exp(-iH\Delta t)|1\rangle$$

在 $Im(\Delta t) \to -\infty$ 时，有：

$$\exp(-iH\Delta t)|2\rangle \to C_2 \exp(-iE_0\Delta t)|0\rangle$$
$$\langle 1|\exp(-iH\Delta t) \to C_1^\star \exp(-iE_0\Delta t)\langle 0|$$

所以，引入两个时间点 $t_+, t_-$，使得 $Im(t_+) \to +\infty, Im(t_-) \to -\infty$，上面的真空期望值可以写成：

$$\begin{aligned}
&\langle 0|Q(t_1)Q(t_2)|0\rangle \\
&= \frac{\langle 1|\exp(-iHt_+)Q(t_1)Q(t_2)\exp(+iHt_-)|2\rangle}{\langle 1|\exp(-iHt_+)\exp(+iHt_-)|2\rangle} \\
&= \frac{\langle 1|\exp(-iH(t_+-t_1))Q(0)\exp(-iH(t_1-t_2))Q(0)\exp(-iH(t_2-t_-))|2\rangle}{\langle 1|\exp(-iH(t_+-t_1))\exp(-iH(t_1-t_2))\exp(-iH(t_2-t_-))|2\rangle}
\end{aligned}$$

注意到在 $Im(\Delta t) < 0$ 时，$\exp(-iH\Delta t)$ 一定收敛，所以我们可以说 $\langle 0|Q(t_1)Q(t_2)|0\rangle$ 在 $Im(t_1 - t_2) < 0$ 时是解析的。现在我们先考虑分子上积分的计算，我们在其中插入四个完备性关系，得到下面这个东西：

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}q'\mathrm{d}q''\mathrm{d}q(t_1)\mathrm{d}q(t_2)\langle 1|q'\rangle\langle q'|\exp(-iH(t_+-t_1))Q(0)|q(t_1)\rangle\langle q(t_1)|\exp(-iH(t_1-t_2))Q(0)|\cdots \\
&= \int \mathrm{d}q'\mathrm{d}q''\mathrm{d}q(t_1)\mathrm{d}q(t_2)q(t_1)q(t_2)\langle 1|q'\rangle\langle q'|\cdot|q(t_1)\rangle\langle q(t_1)|\cdot|q(t_2)\rangle\langle q(t_2)|\cdot|q''\rangle\langle q''|2\rangle
\end{aligned}$$

同理，通过向分母插入四个完备性关系，可以得到分母等于下式：

$$\int \mathrm{d}q'\mathrm{d}q''\mathrm{d}q(t_1)\mathrm{d}q(t_2)\langle 1|q'\rangle\langle q'|\cdot|q(t_1)\rangle\langle q(t_1)|\cdot|q(t_2)\rangle\langle q(t_2)|\cdot|q''\rangle\langle q''|2\rangle$$

所以现在重要的是算出其中"一截一截"的东西，也就是 $\langle q''|\exp(-iH\delta t)|q'\rangle$ 这个东西是什么。通过路径积分法，很容易知道这个跃迁振幅是：

$$\langle q''|\exp(-iH\delta t)|q'\rangle = \int_{q(0)=q'}^{q(t)=q''} \mathrm{D}q \exp\left(i\int L\mathrm{d}t\right)$$

$\mathrm{D}q$ 意味着所有的路径贡献的跃迁振幅都需要求和。注意分子分母上 $\langle 1|q'\rangle$ 和 $\langle q''|2\rangle$ 这两个内积都是 $c$ 数，可以消去，所以我们实际上要计算的是下面这个东西：

$$\langle 0|Q(t_1)Q(t_2)|0\rangle = \frac{\int(\mathrm{D}q)q(t_1)q(t_2)\exp\left(-i\int_C L\mathrm{d}t\right)}{\int(\mathrm{D}q)\exp\left(-i\int_C L\mathrm{d}t\right)}$$

注意对时间的积分是从 $t_-$ 到 $t_+$，也就是无穷远的过去到无穷远的未来。为了保证这里面的每一段的跃迁振幅都是解析的，我们要求随着曲线 $C$，$t$ 的虚部应该逐渐减小。另外，如果两个真空态之间夹的是编时乘积，那么积分曲线 $C$ 的时间在复平面上应该是从左上向右下的。

下面我们给出具体的计算方法。以谐振子（一维时空 KG 场）为例，拉氏量：

$$L = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2\varphi^2$$

我们一般的做法是这样的：先把 $t_1, t_2$ 取为纯虚数，然后再解析延拓到 $t_1, t_2$ 是实数的情况。做换元 $\tau = it$，令 $\phi(\tau) = \varphi(t)$ ，那么：

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2\varphi^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\phi(\tau)}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2\phi^2 \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\phi(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2\phi^2 \end{aligned}$$

记：

$$S_E = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{2}\phi^2\right)$$

那么 $S = \int iL\mathrm{d}t = -S_E$，所以在 $t_1, t_2$ 为纯虚数的情况下，我们实际上要计算的是：

$$\Delta_E(\tau_1 - \tau_2) = \frac{\int \mathrm{D}\phi\ \phi(\tau_1)\phi(\tau_2)\exp(-S_E)}{\int \mathrm{D}\phi \exp(-S_E)}$$

为了计算这个东西，最好的方法是换个基底。我们可以使用一条轨迹上的所有"控制点"来表示一条路径，这样的路径微元是 $\mathrm{D}\phi$，我们也可以使用一条路径 $\phi(\tau)$ 的傅里叶变换 $\tilde{\phi}(\nu)$（我们令 $\phi(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\nu}{2\pi}\tilde{\phi}(\nu)\exp(-i\nu\tau)$）来表示一条路径（因为一条傅里叶谱是唯一的对应一条路径的），所以我们要求的东西可以写成：

$$\frac{\int \mathrm{D}\tilde{\phi}\;\phi(\tau_1)\phi(\tau_2)\exp(-S_E)}{\int \mathrm{D}\tilde{\phi}\exp(-S_E)}$$

简便起见，我们先计算 $\mathbb{E}[\tilde{\phi}(\nu_1)\tilde{\phi}(\nu_2)]$（通过 wick 转动，上面的问题已经被转化成为统计场论问题），不难看出 $S_E$ 可写为：

$$S_E=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\nu}{4\pi}\|\tilde{\phi}(\nu)\|^2(\nu^2+\omega_0^2)$$

这样做意味着我们将系统拆分成了一系列独立的频率，频率 $\nu$ 出现的概率服从高斯分布，为：

$$p(\tilde{\phi}(\nu))=\frac{1}{Z(\nu)}\exp\left(-\frac{1}{4\pi}(\nu^2+\omega_0^2)\|\tilde{\phi}(\nu)\|^2\right)$$

我们无需在乎这个 $Z(\nu)$ 是多少，因为它会被消掉。上面的积分可以被离散为：

$$\mathbb{E}[\tilde{\phi}(\nu_1)\tilde{\phi}(\nu_2)]=\frac{\int\tilde{\phi}(\nu_1)p(\tilde{\phi}(\nu_1))\mathrm{d}\tilde{\phi}(\nu_1)\int\phi(\tilde{\nu}_2)p(\tilde{\phi}(\nu_2))\mathrm{d}\tilde{\phi}(\nu_2)\int p(\tilde{\phi}(\nu_3))\mathrm{d}\tilde{\phi}(\nu_3)\cdots}{\int p(\tilde{\phi}(\nu_1))\mathrm{d}\tilde{\phi}(\nu_1)\int p(\tilde{\phi}(\nu_2))\mathrm{d}\tilde{\phi}(\nu_2)\int p(\tilde{\phi}(\nu_3))\mathrm{d}\tilde{\phi}(\nu_3)\cdots}$$

我能把不同的频率拆开是因为这些频率是互相独立的。显然 $Z(\nu)$ 根本不是积分变元，所以分子、分母上的各个 $Z(\nu)$ 可以全都消去。那么我们只剩下下面的东西：

$$\mathbb{E}[\tilde{\phi}(\nu_1)\tilde{\phi}(\nu_2)]=\frac{\int\tilde{\phi}(\nu_1)p(\tilde{\phi}(\nu_1))\mathrm{d}\tilde{\phi}(\nu_1)\int\tilde{\phi}(\nu_2)p(\tilde{\phi}(\nu_2))\mathrm{d}\tilde{\phi}(\nu_2)}{\int p(\tilde{\phi}(\nu_1))\mathrm{d}\tilde{\phi}(\nu_1)\int p(\tilde{\phi}(\nu_2))\mathrm{d}\tilde{\phi}(\nu_2)}$$

如果 $\nu_1\neq\nu_2$，且 $\nu_1\neq-\nu_2$，则这个积分显然得到 $0$（两个频率是完全独立的）；若 $\nu_1=\nu_2$，那么令 $\tilde{\phi}(\nu_1)=x+iy$ 容易看出 $\mathbb{E}[\tilde{\phi}(\nu_1)\tilde{\phi}(\nu_1)]=0$；若 $\nu_1=-\nu_2$，那么我们实际上计算的是：

$$\mathbb{E}[\tilde{\phi}(\nu_1)\tilde{\phi}(-\nu_1)]=\frac{\int\|\tilde{\phi}(\nu_1)\|^2\exp\left(-\frac{1}{2\pi}(\nu_1^2+\omega_0^2)\|\tilde{\phi}(\nu_1)\|^2\right)\mathrm{d}\tilde{\phi}(\nu_1)}{\int\exp\left(-\frac{1}{2\pi}(\nu_1^2+\omega_0^2)\|\tilde{\phi}(\nu_1)\|^2\right)\mathrm{d}\tilde{\phi}(\nu_1)}$$

分子、分母上都是高斯积分，计算结果是：

$$\mathbb{E}[\tilde{\phi}(\nu_1)\tilde{\phi}(-\nu_1)] = \frac{2\pi}{(\nu_1^2 + \omega_0^2)}$$

我们这个是离散后的结果，在连续的情况下，我们可以说给定 $\tilde{\phi}(\nu_1)$ ，它与 $\tilde{\phi}(\nu_2)$ 在单位频率宽度 $\mathrm{d}\nu$ 内的关联强度是 $\frac{2\pi}{(\nu_1^2 + \omega_0^2)}$，所以在连续的情况下，上面的结果应当写成：

$$\mathbb{E}[\tilde{\phi}(\nu_1)\tilde{\phi}(\nu_2)] = \frac{2\pi}{(\nu_1^2 + \omega_0^2)}\delta(\nu_1 + \nu_2)$$

接下来我们可以得到原始的积分结果：

$$\begin{aligned}
\langle 0|\phi(\tau_1)\phi(\tau_2)|0\rangle &= \mathbb{E}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\nu_1}{2\pi}\tilde{\phi}(\nu_1)\exp(-i\nu_1\tau_1)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\nu_2}{2\pi}\tilde{\phi}(\nu_2)\exp(-i\nu_2\tau_2)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\nu_1^2 + \omega_0^2}\exp(-i\nu_1(\tau_1 - \tau_2)) \\
&= \frac{1}{2\omega_0}\exp(-\omega_0|\tau_1 - \tau_2|)
\end{aligned}$$

对这个结果做解析延拓：

- $t_1 > t_2$ 时，利用之前的换元 $\tau = it$，$\tau_1 - \tau_2 = i(t_1 - t_2)$，所以编时传播子是 $\exp(-\omega_0(\tau_1 - \tau_2)) \to \exp(-i\omega_0(t_1 - t_2))$
- 同理，在 $t_1 < t_2$ 时，$\exp(-\omega_0(\tau_2 - \tau_1)) \to \exp(-i\omega_0(t_2 - t_1))$
  所以，有真空态夹着编时乘积的期望：

$$\Delta(t_1 - t_2) = \langle 0|T\varphi(t_1)\varphi(t_2)|0\rangle = \exp(-i\omega_0|t_1 - t_2|)$$

从上文的推导过程中，我们还可以获得结论：若 $\langle 0|T \cdot |0\rangle$ 中的算符有奇数个，那么计算结果一定为 $0$。在有偶数个算符的情况下，这些算符一定能两两缩并，我们有 Wick 定理：

$$\langle T|\varphi(t_1)\varphi(t_2)\cdots\varphi(t_{2n})|\rangle = \sum_{\text{all possible pairings}} \Delta(t_{i_1} - t_{i_2})\cdots\Delta(t_{i_{2n-1}} - t_{i_{2n}})$$

也就是说，我们只需算出最基本的两算符传播子即可计算其他所有的传播子。不难想象，这样的处理方法可以泛化到场论问题中（你可把场视作有无穷自由度的粒子），也就是说：

$$\langle 0|T\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle = \frac{\int \mathrm{D}\varphi(x)\varphi(y)\exp(iS)}{\int \mathrm{D}\exp(iS)}$$

其中 $S=\int \mathrm{d}^4x\mathscr{L}$。

## Path Integral of Fields

根据 Wick 定理，我们仍然可以只考虑最简单的场：KG 场。我们知道它的拉氏量是：

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2-\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2}(\partial_i\varphi)^2-\frac{1}{2}m^2\varphi^2$$

同样令 $\tau=it$，并令 $\phi(\tau)=\varphi(t)$， 那么我们得到欧氏时空中的拉氏量：

$$\mathscr{L}_E=-\sum_{\mu=1}^{4}\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2-\frac{1}{2}m^2\phi^2$$

经过 Wick 转动后，我们的传播子写为：

$$\Delta_E(x-y)=\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle=\frac{\int\phi(x)\phi(y)\exp(-S_E)\mathrm{D}\phi}{\int\exp(-S_E)\mathrm{D}\phi}$$

采用与之前同样的写法，令：

$$\phi(x)=\int\frac{\mathrm{d}^4k_E}{(2\pi)^4}\tilde{\phi}(k_E)\exp(ik_E\cdot x_E)$$

其中 $x_E=[x_1,x_2,x_3,x_4],k_E=[k_1,k_2,k_3,k_4]$， $x_4=ix^0,k_4=ik^0$。我们先计算（类比之前的"各频率独立的正态分布"这一表述，很容易直接得到答案）：

$$\mathbb{E}[\tilde{\phi}(k)\tilde{\phi}(l)]=\frac{(2\pi)^4\delta(k+l)}{k^2+m^2}$$

再计算：

$$\mathbb{E}[\phi(x)\phi(y)]=\int\frac{\mathrm{d}^4k_E}{(2\pi)^4}\frac{\exp(ik_E(x_E-y_E))}{k_E^2+m^2}$$

我们接下来要做的就是解析延拓，这里直接把变量替换回去就可以得到正确的答案，直接使用之前的关系 $k^4=ik^0,x^4=ix^0$，直接得到：

$$\begin{aligned}\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle&=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\exp(i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y}))\int_{-\infty}^{+\infty}-\frac{i\mathrm{d}k^0}{(2\pi)}\frac{\exp(ik_4(x^4-y^4))}{\omega_{\vec{k}}^2-(k^0)^2}\\&=\int\frac{-i\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\exp(ik(x-y))}{k^2+m^2-i\epsilon}\end{aligned}$$

其中这里引入一个 $\epsilon$ 的目的是防止奇点出现在积分路径上。

下面我们考虑求非线性场的编时乘积期望。考虑下面的拉氏量：

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + Y\varphi + \frac{1}{6}g\varphi^3$$

这个东西没有解析解，我们只能将后两项当作微扰计算。我们考虑在做完 Wick 转动后，令：

$$\mathscr{L}_E^1 = Y\phi + \frac{1}{6}g\phi^3,\ \mathscr{L}_E^0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}m\phi^2$$

考虑计算下面的东西：

$$\mathbb{E}[\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_N)] = \frac{\int \mathrm{D}\phi\ \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_N)\exp(-\int \mathrm{d}^4x_E\mathscr{L}_E^0 + \int \mathrm{d}^4x_E\mathscr{L}_E^1)}{\int \mathrm{D}\phi\exp(-\int \mathrm{d}^4x_E\mathscr{L}_E^0 + \int \mathrm{d}^4x_E\mathscr{L}_E^1)}$$

引入记号：

$$\mathbb{E}_0[A] = \frac{\int \mathrm{D}\phi\ A\exp(-\int \mathrm{d}^4x_E\mathscr{L}_E^0)}{\int \mathrm{D}\phi\exp(-\int d^4x_e\mathscr{L}_E^0)}$$

那么上面的期望可以写为：

$$\mathbb{E}[\phi(x_1)\cdots\phi(x_N)] = \frac{\mathbb{E}_0[\phi(x_1)\cdots\phi(x_N)\exp(\int \mathrm{d}^4x_E\mathscr{L}_E^1)]}{\mathbb{E}_0[\exp(\int \mathrm{d}^4x_E\mathscr{L}_E^1)]}$$

有趣的是，这个期望的分子和分母都有图表示。我们先看（相对更简单的）分母（将其记作 $G$），利用 $g, Y \ll 1$ 的事实将其展开：

$$G = \mathbb{E}_0\left(\sum_{n_g=0}^{\infty}\sum_{n_Y=0}^{\infty}\frac{1}{n_g!n_Y!}\left(\int\frac{1}{6}g\phi^3(x)\mathrm{d}^4x_E\right)^{n_g}\left(\int Y\phi(x)\mathrm{d}^4x_E\right)^{n_Y}\right) = \sum\sum G_{n_g,n_Y}$$

由于高斯分布的概率密度对 $\phi(x)$ 是偶函数，所以这里如果某一项出现了 $\phi(x)$ 的奇数次方的话就要得到 $0$ 了，所以我们不考虑 $3n_g + n_Y = \mathrm{odd}$ 的这些项。此外，对于空图，我们定义它的值为 $1$。所以我们有：

$$G_{00} = 1, G_{10} = 0, G_{01} = 0$$

$$G_{20} = \frac{1}{2!}\left(\frac{g}{3!}\right)^2\int \mathrm{d}^4x_E\mathrm{d}^4y_E\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)$$

根据 Wick 定理，我们应该计算这里所有的缩并，显然有两种方案：$x-y$ 缩并和 $x-x, y-y$ 缩并，缩并计算的结果是：

$$\int \mathrm{d}^4x_E \mathrm{d}^4y_E (3!\Delta^3(x-y) + 3\times 3\Delta(x-y)\Delta(x-x)\Delta(y-y))$$

除以前面带着的系数 $\frac{1}{2!}\left(\frac{g}{3!}\right)^2$ 之后，两项前面的系数分别是 $\frac{1}{2!3!}$ 和 $\frac{1}{2!2!2!}$。图里面，每一个 $\phi^3$ 项都对应于一个 3 度点，缩并两个算符意味着连接 3 度点的两条边。这两个系数称为图的对称性因子，是与你绘制的图拓扑等价的图的数目。

再看分子，分子上有形如这样的项：

$$G^N(x_1,\cdots,x_N) = \mathbb{E}_0\left(\phi(x_1)\cdots\phi(x_N)\exp\left(\int \mathrm{d}^4y_E\left(\frac{1}{6}g\phi^3(y) + Y\phi(y)\right)\right)\right) = \sum_{n_g,n_Y} G^N_{n_g,n_y}$$

$$G^N_{n_g,n_y} = \mathbb{E}_0\left(\phi(x_1)\cdots\phi(x_N)\frac{1}{n_g!}(\cdots)^{n_g}\frac{1}{n_Y!}(\cdots)^{n_Y}\right)$$

这里的每一项也可以类似地用一张图表示，但是我们在这里引入了可区分的外点 $\phi(x_1),\cdots,\phi(x_N)$。这些点只能和一个算符缩并，所以显然它们是 1 度点。

上面对于真空基态值的计算可做进一步化简。所有的图都可以被拆成各种连通图，我们将这些连通图记为 $C_1, C_2, \cdots, C_n$。设分母上的所有 Feymann 图中，这些图分别有 $n_1, n_2, \cdots, n_n$ 张，那么分母上的求和重新写为：

$$G = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\cdots\frac{C_1^{n_1}C_2^{n_2}\cdots}{n_1!} = \exp(C_1 + C_2 + \cdots) = \exp\left(\sum \text{ all of the connected parts}\right)$$

分子上的每张图也可以被分解为含有外点的部分和不含外点的部分，设 $C_j^{(N)}$ 是含有 $N$ 个外点的第 $j$ 种图，那么：

$$G^{(N)}(x_1,\cdots,x_N) = \sum_j C_j^{(N)}\sum_{n_1,n_2,\cdots}\frac{C_1^{n_1}C_2^{n_2}\cdots}{n_1!n_2!\cdots} = \sum_j C_j^{(N)}\exp(C_1 + C_2 + \cdots)$$

所以我们发现，分子和分母上的真空图（不含外点的部分）是可以消去的。在计算上面的真空基态值的时候，我们只需要列出所有含有外点的图。

## Symmetry Factor, UV Divergence

通过费曼图，我们可以极其方便地计算真空基态值。写出真空基态值的微扰展开的问题转化为给定 $N_{\text{ext}}$ 个 1 度外点、$N_i$ 个 $i$ 度内点，问这样的东西能组成多少图的问

题。首先，一个图的所有点的度数之和必须为偶数，度数之和为奇数的情况不可能成图，也就对应了我们上面给出的得 $0$ 的那些项。首先需要定义什么样的两张图是拓扑等价的：我们这样定义一张费曼图：每个内点有属性：1）标签 $1,2,\cdots,n$，以及 2）与之相连的外点集合；每个边有属性：边标签 $A,B,C,\cdots$，费曼图是用 $\text{边}(\text{点},\text{点})$ 这样的集合来指定的。你有两种操作生成新的图：交换两个点的标签、交换两个边的标签。你可以在每次生成新图的过程中多次、混合使用这两个操作，一个合法的新图是指操作后：

- 某一个标签的内点连接的外点集合不变
- 集合中所有的 $\text{边}(\text{点},\text{点})$ 不变

关于对称性因子，有结论：

$$S(C)=F(C)\left(\prod_{i<j}C_{ij}!\right)\left(2^{\frac{C_{ii}}{2}}\left(\frac{C_{ii}}{2}\right)!\right)$$

其中 $F(C)$ 是交换两个点的标签而不改变邻接矩阵的操作数目。

考虑 $\varphi^3$ 理论中的 $\mathbb{E}[\phi(x)]$，它的最低阶展开是：

$$\mathbb{E}[\phi(x)]=\int \mathrm{d}^4y_E\Delta(x-y)(Y-\Delta(y-y))$$

其中：

$$\Delta(y-y)=\int\frac{\mathrm{d}^4k_E}{(2\pi)^4}\frac{1}{k_E^2+m^2}$$

是发散的。为了处理这个问题，我们直接把上面的积分和拉氏量中的参数 $Y$ 全部指定为 $0$。这样，我们可以直接忽略 1 度图和蝌蚪图。

## Scatter Amplitude and its Derivatives

下面利用 LSZ Reduction 计算散射振幅，我们在所谓 On-Shell Scheme（$\zeta=1$）下处理。考虑射入两个粒子，射出两个粒子的情况，此时 LSZ Reduction 告诉我们要计算：

$$i^{2+2}\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\mathrm{d}^4x_1'\mathrm{d}^4x_2'\exp(ik_1x_1)\exp(ik_2x_2)\exp(-ik_1'x_1)\exp(-ik_2x_2)$$

$$(m^2-\partial_1^2)(m^2-\partial_2^2)(m^2-\partial_{1'}^2)(m^2-\partial_{2'}^2)\langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_1')\phi(x_2')|0\rangle$$

先计算：

$$(m^2-\partial_x^2)\Delta(x-y)=-i\delta(x-y)$$

把前面对 $x$ 的积分向里面迁移，再计算：

$$\int i\mathrm{d}^4x\exp(ikx)(m^2-\partial_x^2)\Delta(x-y)=\exp(iky)$$

计算后，直接得到 $2\to 2$ 的三张图的总贡献是：

$$i(2\pi)^4\delta(k_1+k_2-k_1'-k_2')\mathscr{T}_{k_1k_2\to k_1'k_2'}$$

其中：

$$\mathscr{T}_{k_1k_2\to k_1'k_2'}=\sum_{\text{Connected}}\left(\prod_{\text{内部边}}\frac{1}{(\text{内部边上流过的动量})^2+m^2-i\epsilon}\right)(\prod_{\text{内点}}\text{耦合系数})$$

如果有的内部边上的流量无法确定，则需要在上式中加入积分 $\int-\frac{i\mathrm{d}l}{(2\pi)^4}$，其中 $l$ 为未确定的动量。这是标量场理论在动量空间的费曼规则。

下面考虑计算散射过程中的可观测量。设入射粒子的波函数为 $f_i(p)$，局限在 $k_i$ 附近；出射粒子的波函数为 $f_i'(p)$，局限在 $k_i'$ 附近。现在假设任何一部分 $k_i$ 的和不等于任何一部分 $k_j'$ 的和。之前我们推出了如下结果：

$$\begin{aligned}\langle out|in\rangle=\mathrm{i}^{n+n'}&\int\widetilde{dp_1}f_1(\mathbf{p}_1)\cdots\int\widetilde{dp_n}f_n(\mathbf{p}_n)\int\widetilde{dp_1'}f_1'^*(\mathbf{p}_1')\cdots\int\widetilde{dp_{n'}'}f_{n'}'^*(\mathbf{p}_{n'}')\\&\times\int d^4x_1e^{\mathrm{i}p_1x_1}(m^2-\partial_1^2)\cdots\int d^4x_ne^{\mathrm{i}p_nx_n}(m^2-\partial_n^2)\\&\times\int d^4x_1'e^{-\mathrm{i}p_1'x_1'}(m^2-\partial_{1'}^2)\cdots\int d^4x_n'e^{-\mathrm{i}p_{n'}'x_{n'}'}(m^2-\partial_{n'}^2)\\&\times\langle 0|\,\mathrm{T}\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\varphi(x_1')\cdots\varphi(x_{n'}')\,|0\rangle\,.\end{aligned}$$

我们现在为入态、出态构建波函数，我们希望这个波函数是全对称的，所以我们做个对称化：

$$\psi_{in}(p_1,\cdots p_n)=\frac{1}{\sqrt{n!}}\sum_Q f(p_{Q_1})\cdots f(p_{Q_n})$$

其中 $Q$ 是全排列。所以有：

$$\langle \text{in}|\text{in}\rangle = \frac{1}{n!}\int \tilde{\mathrm{d}p}|\psi_{in}|^2$$

对于 Out 态也一样。注意：此时有关系：

$$\int \tilde{\mathrm{d}p}\psi_{in}(p_1,\cdots p_n) = \sqrt{n!}\int \tilde{\mathrm{d}p} f(p_{Q_1})\cdots f(p_{Q_n})$$

*注意：这里和课堂上使用的归一化约定不一样，课堂上使用的约定是*

$$\int \tilde{\mathrm{d}p}\psi_{in}(p_1,\cdots p_n) = n!\int \tilde{\mathrm{d}p} f(p_{Q_1})\cdots f(p_{Q_n})$$

我们首先求出一个 in 态衰变到不同粒子数目的 out 态上的概率，由于粒子数不同的 in 态和 out 态可以视为粒子数算符的不同本征态，因而它们是互相正交的。我们考虑将一个 in 态分解到 out 态这套基底上：

$$|\text{in}\rangle = \sum_{n'}|n - \text{particles out}\rangle$$

那么我们可以拿出 $n$ -out 态的波函数，具体而言：

$$\begin{aligned}
\langle \text{out}|\text{in}\rangle &= \sum_{n''}\langle \text{out}|n'' - \text{out}\rangle \\
&= \langle \text{out}|n' - \text{out}\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!}\sqrt{n'!}}\int \tilde{\mathrm{d}p}\tilde{\mathrm{d}p'}\psi^{\star}_{out}(p')\psi_{in}(p)\cdot i\cdot\delta(p_{in}-p_{out})\cdot(2\pi)^4\cdot\mathscr{T} \\
&= \int \tilde{\mathrm{d}p}\tilde{\mathrm{d}p'}\psi^{\star}_{out}(p')\psi_{n-out}(p)
\end{aligned}$$

所以我们知道一个 in-state 的 $n$ -out state 分量的动量波函数是：

$$\psi_{n-out}(p') = \int \tilde{\mathrm{d}p}\frac{1}{\sqrt{n!}\sqrt{n'!}}\psi_{in}(p)\cdot i\cdot\delta(p_{in}-p_{out})\cdot(2\pi)^4\cdot\mathscr{T}$$

注意：我们这里拿到的是 $n$ -out state 分量的波函数，所以我们把 $p_{in}$ 积掉了。
所以现在计算概率：

$$
\begin{aligned}
\langle n-out|n-out\rangle &= \int \tilde{\mathrm{d}p}'\psi^\star_{n-out}(p')\psi_{n-out}(p') \\
&= \int \tilde{\mathrm{d}p}'\tilde{\mathrm{d}p}_1\tilde{\mathrm{d}p}_2\frac{1}{n!n'!}\delta(p_{in,1}-p_{out})\delta(p_{in,2}-p_{out})(2\pi)^8\psi^\star_{in}(p_1)\psi_{in}(p_2)\mathscr{T}_{p_1\to p} \\
&= \int \tilde{\mathrm{d}p}'\tilde{\mathrm{d}p}\frac{1}{n'!}\delta(p_{in}-p_{out})(2\pi)^8\mathscr{T}^2_{p\to p'}f^\star_1(p)\cdots f^\star_n(p)f_1(p)\cdots f_n(p) \\
&= \int \tilde{\mathrm{d}p}'\tilde{\mathrm{d}p}\tilde{\mathrm{d}q}\frac{1}{n'!}\delta(p_{in}-p_{out})(2\pi)^8\mathscr{T}(p\to p')^2[f^\star(p)][f(q)]\delta(p-q) \\
&= \int \tilde{\mathrm{d}p}'\tilde{\mathrm{d}p}\tilde{\mathrm{d}q}\frac{1}{n'!}\delta(p_{in}-p_{out})(2\pi)^4\mathscr{T}(p\to p')^2[f^\star(p)][f(q)]\int \mathrm{d}^4a\exp(i(p - \\
&= \int \tilde{\mathrm{d}p}'\frac{1}{n'!}\delta(p_{in}-p_{out})(2\pi)^4\mathscr{T}(p\to p')^2\int \mathrm{d}^4a\int \tilde{\mathrm{d}p}\tilde{\mathrm{d}q}\exp(i(p-q)a) \\
&= \int \tilde{\mathrm{d}p}'\frac{1}{n'!}\delta(p_{in}-p_{out})(2\pi)^4\mathscr{T}(p\to p')^2\int \mathrm{d}^4a\,\|g_1(a)\|^2\cdots\|g_n(a)\|^2
\end{aligned}
$$

其中：

$$
g_i(a) = \int \tilde{\mathrm{d}q}f_i(q)\exp(iqa)
$$

注意：在上面的推导中，我们将积分 $\int \tilde{\mathrm{d}p}\tilde{\mathrm{d}q}$ 直接后移了，这是因为我们已经假设了系统入射波函数仅在 $(p_1,\cdots,p_n)$ 处有值。我们直观理解一下上面算了什么：我们对出射粒子的动量、入射粒子的位置进行了积分，这相当于我们把不关注的东西积掉了，只留下了“边缘”。所以这里 $g_i(a)$ 可以视为入射粒子在空间中的振幅。取定时间 $a^0$，归一化关系是：

$$
\int \mathrm{d}^3a\|g_i(a)\|^2 = \exp(-i(q^0-p^0))\int \tilde{\mathrm{d}q}\tilde{\mathrm{d}p}f_i(q)f_i^\star(p)\delta(\vec{p}-\vec{q}) = \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} = \frac{1}{2k_i^0}
$$

所以有：概率密度

$$
\rho_i(a) = 2k_i^0\|g_i(a)\|^2
$$

这个概率密度是在动系中看到的，被“压缩”的概率密度，在静系中看到的概率密度和动系中的概率密度有如下关系：

$$
\rho_i^{(0)}(a) = \sqrt{1-v_i^2}\rho_i(a) = \frac{2m}{2k_i^0}\rho_i(a) \Rightarrow \|g_i(a)\|^2 = \frac{\rho_i^{(0)}(a)}{2m}
$$

所以我们最终有了射出 $n$ 个粒子的概率的公式（这个公式可以轻易推广至多种粒子的情形）：

$$\mathbb{P}(n \to n') = \frac{1}{S} \int \mathrm{d}p' \mathscr{T}^2 (2\pi)^4 \delta(k_{in} - p_{out}) \int \mathrm{d}^4 a \prod_i \frac{\rho_i^{(0)}(a)}{(2M_i)}$$

$M_i$ 是粒子的静质量。最右边的这个东西也可以写成 $\prod_i \frac{\rho_i(a)}{2E_i}$，因为这是洛伦兹不变量。 特别地，从这里立刻可以得到粒子（以坐标时计）的衰变率。只要把 $\int \mathrm{d}^4 a$ 分解成时间、空间积分，再利用概率密度的归一化，立刻得到单位时间内衰变率：

$$\Gamma = \frac{1}{S} \int \mathrm{d}\tilde{p}' \frac{1}{2M_{in}} \|\mathscr{T}\|^2 (2\pi)^4 \delta(k - p_{out})$$

我们可以定义以下微分散射截面：

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4\|\vec{k}\|_{CM}\sqrt{s}} \|\mathcal{T}\|^2 (2\pi)^4 \delta(k_{in} - p_{out}) \mathrm{d}\tilde{p}'$$

总散射截面：

$$\sigma = \frac{1}{S} \int \mathrm{d}\sigma$$

在这样的定义下，微分散射截面和总散射截面都是洛伦兹变换下的不变量。撞击概率：

$$P = \frac{\|\vec{k}\|_{CM}\sqrt{s}}{E_1 E_2} \sigma \int \mathrm{d}x \prod_i \rho_i(x)$$