（官方QFT）KG场与非线性标量场

#Quantum_Field_Theory

KG 场的量子化

我现在考虑量子化一个场。为了保证因果性，我们要求任何两个有类空间隔的时空区域内的可观测量对易，这就要求场量必须对易或者反对易：

$$\varphi_a(x)\varphi_b(y)=\varphi_a(y)\varphi_b(x)$$

同时，场的动力学方程是我们的基本假设之一。如果我们知道了场的动量和哈密顿量，那么时空平移算符为：

$$U(l^\mu)=\exp\left(\frac{iHl^0-iP^1l^1-iP^2l^2-iP^3l^3}{\hbar}\right)=\exp\left(-\frac{P\cdot l}{\hbar}\right)$$

海森堡绘景下，我们有：

$$\varphi_a(x+l)=\exp\left(-\frac{iP\cdot l}{\hbar}\right)\varphi_a(x)\exp\left(\frac{iP\cdot l}{\hbar}\right)$$

取时间、空间无限小得到海森堡方程：

$$\frac{\partial\varphi_a(x)}{\partial t}=\frac{i}{\hbar}[H,\varphi_a(x)],\frac{\partial\varphi_a(x)}{\partial x^i}=-\frac{i}{\hbar}[P^i,\varphi_a(x)]$$

但是，我们一开始是不知道这个 H,P 的，所以我们要开始考虑猜出场方程。考虑一个最基本的平面波，它满足方程：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2+\omega_0^2\right)\exp(-i\omega t+i\vec{k}\vec{x})=0$$

所以我们猜测场方程就是：

$$(-\partial^2+\omega_0^2)\varphi(x)=0$$

记：

$$\varphi(x)\varphi(y)-\sigma\varphi(y)\varphi(x)=C(x-y),\sigma=\pm1$$

通过分别赋值 $x=0,y=0$ 得到 $C(-x)=-\sigma C(x)$。下面确定 σ，考虑：

$$(-\partial_x^2+\omega_0^2)(\varphi(x)\varphi(0)-\sigma\varphi(0)\varphi(x)))=(-\partial^2+\omega_0^2)C(x)$$

左手边是 0，我们考虑右手边，做个傅里叶变换：

$$\tilde{C}(k)=\int \mathrm{d}^4xC(x)\exp(-ikx),C(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k\tilde{C}(k)\exp(ikx)$$

把这个东西代入之后我们发现只有在 $k^2=-\omega_0^2$ 处 $\tilde{C}(k)$ 才能非零！我们记：

$$\tilde{C}(k)=C_+2\pi\delta(-(k^0)^2+\omega_{\vec{k}}^2)\theta(k^0)+C_-2\pi\delta(-(k^0)^2+\omega_{\vec{k}}^2)\theta(-k^0)$$

其中，$\omega_{\vec{k}}=\sqrt{\omega_0^2+\vec{k}^2}$，计算其反变换：

$$C(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k\tilde{C}(k)\exp(ikx)$$

利用 δ 函数的分解性质：

$$\delta(f(y))=\sum_i\frac{1}{f'(y_i)}\delta(y-y_i)$$

所以立刻得到结果：

$$C(x)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega_{\vec{k}}}(C_+\exp(-i\omega_{\vec{k}}t+ikx)+C_-\exp(i\omega_{\vec{k}}t+ikx))$$

取 $x^0=t=0$，有：

$$C(\vec{x})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega_{\vec{k}}}(C_++C_-)\exp(-i\vec{k}\vec{x})\propto\frac{J_1(\omega_0x)}{|\vec{x}|}$$

由于前面对因果性的要求，我们必须有：

$$C(\vec{x})=0,C_+=-C_-$$

所以我们的 $\tilde{C}(k)$ 是奇函数，$C(x)$ 也是奇函数，立刻有 $\sigma=+1$。

KG 场的模式展开：

$$\varphi(x)=\int \mathrm{d}\tilde{k}\ (a(\vec{k})\exp(ikx)+a^\dagger(\vec{k})\exp(-ikx))$$

升降算符的基本对易关系：

$$[a(\vec{k}),a^\dagger(\vec{l})]=2\omega_{\vec{k}}(2\pi)^3\delta(\vec{k}-\vec{l})$$

系统能量、动量算符：

$$H=\int \tilde{\mathrm{d}}k\,\omega_{\vec{k}}a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k})+C,P=\int \tilde{\mathrm{d}}k\,\vec{k}a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k})+C$$

场算符的等时对易关系中只有一个不是 0：

$$[\varphi(t,\vec{x}),\pi(t,\vec{y})]=i\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

非线性场的量子化

在 KG 场中，为了保证归一化关系是洛伦兹不变的，我们采用这样的归一化关系:

$$\begin{aligned}\langle k|l\rangle&=\langle 0|a(\vec{k})a^\dagger(\vec{l})|0\rangle\\&=\langle 0|a(\vec{k})a^\dagger(\vec{l})-a^\dagger(\vec{l})a(\vec{k})|0\rangle\\&=\langle 0|(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}\delta(\vec{k}-\vec{l})|0\rangle\\&=(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}\delta(\vec{k}-\vec{l})\end{aligned}$$

很容易求出下面的东西：

$$\begin{aligned}\langle k|\varphi(x)|0\rangle&=\langle 0|a(\vec{k})\int \tilde{\mathrm{d}}l(a(\vec{l})\exp(ilx)+a^\dagger(\vec{l})\exp(-ilx))|0\rangle\\&=\exp(-ikx)\end{aligned}$$

以及：计算傅里叶变换得到：

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(k)&=\int \exp(-ikx)\varphi(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{2\pi}{2\omega_{\vec{k}}}(a(\vec{k})\delta(\omega_{\vec{k}}-k^0)+a^\dagger(-\vec{k})\delta(\omega_{\vec{k}}+k^0))\end{aligned}$$

所以考虑 $\hat{\varphi}(-k)$，我把它作用在真空态 $|0\rangle$ 上，得到的结果应该是：

$$\tilde{\varphi}(-k)|0\rangle=\frac{2\pi}{2\omega_{\vec{k}}}\delta(\omega_{\vec{k}}+k^0)\theta(k^0)|k\rangle=2\pi\delta(-(k^0)^2+\omega_{\vec{k}})\theta(k^0)|k\rangle$$

这意味着如果我们的四矢量 k 在质壳上，$\tilde{\varphi}(-k)$ 将生出一个粒子。

下面我们考虑非线性场 $(-\partial^2+\omega_0^2)\varphi(x)=c_0+c_1\varphi+c_2\varphi^2+\cdots$。这样的场仍然有唯一的基态 $|0\rangle$，我们选择基态使得 $P|0\rangle=0,H|0\rangle=0$，为了做这一点，我们相当于移动了所有的态，包括我们的单粒子态。所以现在我们的质壳条件变成 $-(k^0)^2+\omega_{\vec{k}}^2=0$ ，其中 $\omega_{\vec{k}}=\sqrt{\vec{k}^2+m^2}$。与线性场相比，这里最大的不同是我的场算符作用在 $|0\rangle$ 上

可能不会只得到单粒子态的线性组合。考虑 $\tilde{\varphi}(-k)$，我们已经证明这是一个产生算符，如果 $k^0-\vec{k}^2<\Delta$（Δ 是允许双粒子态出现的最低能量），那么：

$$\tilde{\varphi}(-k)|0\rangle=2\pi\sqrt{\zeta}\delta(k^2+m^2)\theta(k^0)|\vec{k}\rangle+\eta(2\pi)^4\delta(k)|0\rangle$$

也就是说要么 k 在质壳上产生单粒子态，要么产生 $|0\rangle$ 态。

LSZ Reduction Fomula

有两个函数 $\psi_1(x),\psi_2(x)$，如果它们的傅里叶变换在质壳上是相等的，那么我们称它们在壳等价。如果 $\psi_1(x),\psi_2(x)$ 在动量空间中几乎是个 Delta 函数，那么它们可以配合场算符用于创建相同的单粒子态：

$$\int \mathrm{d}^4x\psi_1(x)\varphi(x)|0\rangle=\int \mathrm{d}^4x\psi_2(x)\varphi(x)|0\rangle$$

令：

$$F(x)=\int\frac{\mathrm{d}^3l}{(2\pi)^3}f(\vec{l})\exp(-i\omega_{\vec{l}}t+i\vec{l}\vec{x})$$

那么可以证明 $F(x)g(t-T)$ 这样的函数全是在壳等价，其中 $g(\cdot)$ 有远大于 m^{-1} 的带宽。
下面我们打算算散射振幅，我们需要构建入射、出射粒子态。我们需要一个东西帮助我们框定粒子的时间和空间范围：

$$u_\alpha(x_\alpha)=g(t_\alpha-T_-)\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}f_\alpha(\vec{p})\exp(-i\omega_{\vec{p}}t_\alpha+i\vec{p}\vec{x}_\alpha),T_-\to-\infty$$

同理有 $u'_\alpha(x'_\alpha)$，只不过是把 T_- 换成 T_+。那么入射粒子：

$$C_\alpha=\int\mathrm{d}^4x_\alpha u_\alpha(x_\alpha)\varphi(x_\alpha)\ \ |in\rangle=C_1\cdots C_n|0\rangle$$

同理：

$$D_\alpha=\int\mathrm{d}^4x'_\alpha u'_\alpha(x'_\alpha)\varphi(x'_\alpha)\ \ |out\rangle=D_1\cdots D_{n'}|0\rangle$$

我们要算的是：

$$\langle out|in\rangle=\langle 0|D_1^\dagger\cdots D_{n'}C_1\cdots C_n|0\rangle=\langle 0|TD_1^\dagger\cdots D_{n'}^\dagger C_1\cdots C_n|0\rangle$$

为了计算这个，我们构造两个东西 $\bar{C}_\alpha$ 是把 C_α 中 T_- 换成 T_+， $\bar{D}_\alpha$ 亦然。如果我们把上面算符序列中的一个 C_α 换成 $\bar{C}_\alpha$，那么这个东西会被编时算符移到最左边，从而整个列得 0，D_α 亦然。所以我们可以计算：

$$\langle 0|T(D_1^\dagger-\bar{D}_1^\dagger)\cdots(D_{n'}^\dagger-\bar{D}_{n'}^\dagger)(C_1-\bar{C}_1)\cdots(C_n-\bar{C}_n)|0\rangle$$

计算后会得到这样的结果：

$$\begin{aligned}\langle out|in\rangle = \mathrm{i}^{n+n'}&\int\widetilde{dp_1}f_1(\mathbf{p}_1)\cdots\int\widetilde{dp_n}f_n(\mathbf{p}_n)\int\widetilde{dp'_1}f_1'^*(\mathbf{p}'_1)\cdots\int\widetilde{dp'_{n'}}f_{n'}'^*(\mathbf{p}'_{n'})\\ &\times\int d^4x_1e^{\mathrm{i}p_1x_1}(m^2-\partial_1^2)\cdots\int d^4x_ne^{\mathrm{i}p_nx_n}(m^2-\partial_n^2)\\ &\times\int d^4x'_1e^{-\mathrm{i}p'_1x'_1}(m^2-\partial_{1'}^2)\cdots\int d^4x'_ne^{-\mathrm{i}p'_{n'}x'_{n'}}(m^2-\partial_{n'}^2)\\ &\times\langle 0|\,\mathrm{T}\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\varphi(x'_1)\cdots\varphi(x'_{n'})\,|0\rangle\,.\end{aligned}$$

特别地，对于纯纯的粒子态，也就是只含有一种动量成分的态：

$$\begin{aligned}\langle out|in\rangle = \mathrm{i}^{n+n'}\zeta^{-(n+n')/2}&\int d^4x_1e^{\mathrm{i}k_1x_1}(m^2-\partial_1^2)\cdots\int d^4x_ne^{\mathrm{i}k_nx_n}(m^2-\partial_n^2)\\ &\times\int d^4x'_1e^{-\mathrm{i}k'_1x'_1}(m^2-\partial_{1'}^2)\cdots\int d^4x'_{n'}e^{-\mathrm{i}k'_{n'}x'_{n'}}(m^2-\partial_{n'}^2)\\ &\times\langle 0|\,\mathrm{T}\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\varphi(x'_1)\cdots\varphi(x'_{n'})\,|0\rangle\,.\end{aligned}$$

一些关于解析延拓的笔记

简化起见，考虑一维时空。先说说传播子这个东西，两个真空态之间会夹着这样的编时乘积：$T\varphi(t_1)\varphi(t_2)$，也就是说要把这些场算符按照 t 的实部从大到小排序。我们也可以定义一个标记 I，它负责将 t 的虚部按照从小到大的顺序排序。显然，考虑时间的复平面，如果 t_1,t_2 在一条过 2，4 象限且穿过了原点，那么就有：

$$\Delta(t_1-t_2):=\langle 0|T\varphi(t_1)\varphi(t_2)|0\rangle==\Delta_I(t_1-t_2)\langle 0|I\varphi(t_1)\varphi(t_2)|0\rangle$$

不难证明在 $\langle 0|\varphi(t)|0\rangle=0$ 时，$\|\Delta_I(t)\|\propto\exp(-m|Im(t)|)$ 。考虑求 $\Delta(t)$ 的傅里叶变换，但是在对 t 积分的时候选择不同的路径，令：

$$\hat{\Delta}_\alpha(\omega)=i\int_{C_\alpha}\Delta(t)\mathrm{d}t,\ \hat{D}_\alpha(\omega)=i\int_{C_\alpha}\Delta_I(t)\mathrm{d}t$$

这里的 C_α 是横穿 2，4 象限，过原点，且与实轴夹角 α 的直线。显然我们有 $\hat{\Delta}_\alpha(\omega)=\hat{D}_\alpha(\omega)$，但是不同 α 对应 $\hat{D}_\alpha$ 的解析区域不同，$\hat{D}_\alpha$ 在：

$$-m+(\mathrm{Im}\omega)\cot\alpha<\mathrm{Re}\omega<m+(\mathrm{Im}\omega)\cot\alpha$$

的区域内都是解析的。而且如果我选取两个不同 α 导致解析区域不同，那么在重叠的区域内，$\hat{D}_\alpha(\omega)$ 的值是相同的。所以我可以把所有 $\hat{D}_\alpha$ 视作对 $\hat{D}_{\pi/2}$ 的解析延拓，下面全部用 $\hat{D}$ 代替（所以，如果我本来想处理实数 t，我完全可以先处理虚数 t 的情况，再进行解析延拓）。如果 ω 是虚的，$k_4=i\omega$ 是实数，那么这个时候我可以换变量 $\tau=it$:

$$\hat{D}(\omega)=\hat{D}_{\frac{\pi}{2}}(\omega)=i\int_{t=+i\infty}^{-i\infty}\exp(i\omega t)\Delta_I(t)\mathrm{d}t=\int_{\tau=-\infty}^{+\infty}\exp(ik_4\tau)\Delta_I(-i\tau)\mathrm{d}\tau$$

至于 $\Delta_I(-i\tau)$ 可以换成一个统计力学问题处理。

好，现在我们用以上的手法计算了 KG 场的传播子（把 t 的积分路径先放到虚轴上，令 $x_4=x^4=\tau=it$），我们的计算结果是:

$$\Delta(x-y)=\langle 0|I\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^4k_E}{(2\pi)^4}\frac{\exp(ik_E(x_E-y_E))}{k_E^2+m^2}$$

下面我们需要延拓回去。首先把上面的积分拆成:

$$\Delta(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\exp(i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y}))\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^4}{2\pi}\frac{\exp(ik^4\tau)}{(k^4)^2+\omega_{\vec{k}}^2}$$

算后面的一部分。利用留数定理，在 $\tau>0$ 时应选择上半平面的半圆围道；$\tau<0$ 反之。所以:

$$\Delta(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\exp(i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y}))\frac{1}{2\omega_{\vec{k}}}\exp(-\omega_{\vec{k}}\tau),\tau>0$$

$$\Delta(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\exp(i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y}))\frac{1}{2\omega_{\vec{k}}}\exp(+\omega_{\vec{k}}\tau),\tau<0$$

现在，可以发现，只要 $Re(\tau)>0$，上面 $\tau>0$ 的式子都是好用的；只要 $Re(\tau)<0$，下面那个式子也是好用的！而我们一开始讨论的是 t 是纯虚数的情况，变量代换是 $\tau=it$，所以 $Re(\tau)$》0 对应于 $Im(t)<0$，另外一边一样。于是我们得到结果:

$$\Delta(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\exp(i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y}))\frac{1}{2\omega_{\vec{k}}}\exp(-i\omega_{\vec{k}}t),Im(t)<0$$

$$\Delta(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\exp(i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y}))\frac{1}{2\omega_{\vec{k}}}\exp(+i\omega_{\vec{k}}t),Im(t)>0$$

这两项可以统一写成：

$$\Delta(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\exp(i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y}))\int_{k_0=\exp(i\alpha)\infty}^{\exp(-i\alpha)\infty}\frac{i\mathrm{d}k^0}{2\pi}\frac{\exp(-ik^0t)}{-(k^0)^2+\omega_{\vec{k}}^2}$$

除了通过以上的手段得到这个“统一写成”之外，还有一种手段是直接从 $\Delta(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\exp(i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y}))\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k^4}{2\pi}\frac{\exp(ik^4\tau)}{(k^4)^2+\omega_{\vec{k}}^2}$ 这里下手。我们首先把变量替换回去（$k^4=ik^0,\tau=it$），但是换回去之后我们发现这个东西只在 t 为纯虚的时候收敛。究其原因，这是因为 k^0 也是纯虚的，如果我们想要把 t 从虚轴上转出来，那么对 k^0 的积分路径必须也反向旋转。换言之，若 $t=|s|\exp(-i\alpha)$，那么必然有：

$$\Delta(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\exp(i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y}))\int_{k^0=\exp(i\alpha)\infty}^{-\exp(i\alpha)\infty}\frac{\exp(-ik_0t)}{-(k^0)^2+\omega_{\vec{k}}^2}$$

现在我们把 k_0 的积分路径往回转，为了不让路径穿越奇点，我们要把 $\omega_{\vec{k}}$ 处的奇点稍微往下压，另一边奇点稍微往上提，这就得到我们标准的传播子：

$$\langle 0|T\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle=\int\frac{-i\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\exp(ik(x-y))}{k^2+m^2-i\epsilon}$$