类光无限远上的对称性；BMS,SPI群

#Asymptotic_Flat_Spacetime #General_Relativity

上次我们说到要找到 $\mathscr{I}$ 上的对称性，也就是要找到 $\mathscr{I}$ 上的"渐近 Killing 场"。注意：在 $\mathscr{I}$ 上的一个无限小对称性 $\hat{\xi}$ 可能对应 (M, g_{ab}) 上的多个无限小渐近对称性（这样的渐近对称性被成为是等价的）。然而，在 $\mathscr{I}$ 上不存在非退化的诱导度规，从而我们没法说 $\hat{\xi}$ 是保了 $\mathscr{I}$ 上的什么东西。为了说明这一点，我们在 $\mathscr{I}$ 上定义一个张量场 $\Gamma^{ab}{}_{cd} = n^a n^b \tilde{h}_{cd}$。这里的 $n^a, n^b, \tilde{h}_{cd}$ 都与规范选择有关，而 $\Gamma^{ab}{}_{cd}$ 却是规范无关的（注意我们是在 $\mathscr{I}$ 上讨论，这里 $\Omega = 0$）。并且 $\mathscr{I}$ 上的无限小对称性 $\hat{\xi}$ 必然满足：$\mathscr{L}_{\hat{\xi}} \Gamma^{ab}{}_{cd} = 0$。另外，如果我们有两个渐进平直时空 $(M, g_{ab}), (\underline{M}, \underline{g_{ab}})$，它们分别对应类光无限远 $(\mathscr{I}, \Gamma^{ab}{}_{cd}), (\underline{\mathscr{I}}, \underline{\Gamma^{ab}{}_{cd}})$，则存在微分同胚 $\Psi(\mathscr{I}) = \underline{\mathscr{I}}$，使得 $\Psi_\star \Gamma^{ab}{}_{cd} = \underline{\Gamma^{ab}{}_{cd}}$。既然我们能在各个渐近平直时空的 $\Gamma^{ab}{}_{cd}$ 之间建立联系，也就是说 $\Gamma^{ab}{}_{cd}$ 代表了渐进平直时空的普适几何。与闵氏时空的 η_{ab} 一样，既然 $\Gamma^{ab}{}_{cd}$ 在不同渐进平直时空中都是相似的（最多差一个微分同胚诱导的推前映射），那么它就可以视作"背景"。
显然，$\mathscr{I}$ 上的无限小对称性也成群，且 $\Gamma^{ab}{}_{cd}$ 的普适性保证所有时空的对称性群都是相同的。该群称为 BMS 群，是无限维群。此外，空间无限远 i^0 上也有对称性群，称为 SPI 群，它也是无限维李群。

类光无限远上的对称性：BMS 代数

我们将满足 $\mathscr{L}_{\hat{\xi}} \Gamma^{ab}{}_{cd} = 0$ 的矢量场 $\hat{\xi}$ 集合记作 $\mathscr{B}$，而对称性群记作 B。容易验证 $\mathscr{B}$ 是 Lie 代数，这是因为取 $\hat{\xi}, \hat{\eta} \in \mathscr{B}$，则：

$$\mathscr{L}_{[\hat{\xi}, \hat{\eta}]} \Gamma^{ab}{}_{cd} = 0$$

考虑有一嵌入映射 ζ，将 I 映射到 $\mathscr{I}^+$（下文中可能继续简写为 $\mathscr{I}$）。可以通过 ζ 诱导的拉回映射将 $\mathscr{I}$ 上的张量场拉回到 I 上。注意 ζ 并非微分同胚，因此并非所有的张量场都可以被拉回。根据拉回映射的定义，只有下指标的当然可被拉回，但是上指标场不一定，例如如果 v^a 不切于 $\mathscr{I}$，那么就不可拉回。具体而言，对 $\mathscr{I}$ 上张量场的可拉回性有一些限制：若张量场 T 的每一个上标都与 n_a 的缩并得 0，那么就可以拉回。此外，可证明，如果 T 和 v^a 均可拉回，那么 $\mathscr{L}_v T$ 也可以拉回，且：

$$\zeta^\star(\mathscr{L}_v T) = \mathscr{L}_{\zeta^\star(v)}(\zeta^\star(T))$$

根据拉回的定义，我们可将拉回的张量场 $\zeta^\star(T)$ 认同为 T 在 $\mathscr{I}$ 上的限制。下面的证明中，这个拉回映射被用于建立整个 $\tilde{M}$ 上的张量场和 $\mathscr{I}$ 上张量场之间的关系。

下面首先证明：

> **Theorem 12 5 1**
>
> 若 ξ^a 是无限小渐近对称性，则 $\mathscr{L}_{\hat{\xi}}\Gamma^{ab}{}_{cd} = 0$ 确实成立。

证明：

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{\hat{\xi}}\Gamma^{ab}{}_{cd} &= \mathscr{L}_{\zeta^\star(\xi)}(\zeta^\star(n^a n^b \tilde{g}_{cd})) \\
&= \zeta^\star(\mathscr{L}_\xi(n^a n^b g_{cd})) \\
&= \mathscr{L}_\xi(n^a n^b \tilde{g}_{cd})|_{\mathscr{I}}
\end{aligned}$$

计算这个 Lie 导数：

$$\mathscr{L}_\xi(n^a n^b \tilde{g}_{cd}) = n^a n^b \mathscr{L}_\xi \tilde{g}_{cd} + 2\tilde{g}_{cd} n^{(a}\mathscr{L}_\xi n^{b)}$$

分别计算：

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_\xi \tilde{g}_{cd} &= \mathscr{L}_\xi \Omega^2 g_{cd} \\
&= \Omega^2 \mathscr{L}_\xi g_{cd} + 2 g_{cd}\Omega\mathscr{L}_\xi\Omega \\
&= \Omega^2 \mathscr{L}_\xi g_{cd} + 2 g_{cd}\Omega^{-1}\xi^a\nabla_a\Omega \\
&= \Omega^2 \mathscr{L}_\xi g_{cd} + 2 g_{cd}\Omega^{-1}\xi^a n_a \\
&= \Omega^2 \mathscr{L}_\xi g_{cd} + 2 g_{cd}\lambda
\end{aligned}$$

其中 $\lambda = \Omega^{-1}\xi^a n_a$。根据渐近无限小对称性的定义，趋于 $\mathscr{I}$ 时 $\Omega^2\mathscr{L}_\xi g_{cd}$ 趋于 0，从而：

$$(\mathscr{L}_\xi \tilde{g}_{cd} - 2\lambda\tilde{g}_{cd})|_{\mathscr{I}} = 0$$

由于 $\mathscr{L}_\xi \tilde{g}_{cd}$ 和 g_{cd} 都光滑，从而 λ 光滑，从而 $\xi^a n_a = 0|_{\mathscr{I}}$，于是 $\hat{\xi}^a = \xi^a|_{\mathscr{I}}$ 确实是切于 $\mathscr{I}$ 的（这验证了我们上面定义的正确性）。另一部分：

$$\mathscr{L}_\xi n^b = -\lambda n^b + \Omega\tilde{g}^{be}\tilde{\nabla}_e\lambda - n^f\tilde{g}^{be}(\Omega^2\mathscr{L}_\xi g_{ef})$$

回代，可以验证式中每一项都可光滑延拓到 $\mathscr{I}$ 上，且在 $\mathscr{I}$ 上取值为 0. 从而完成证明。

> Theorem 12 5 2
>
> $\hat{\xi}^a \in \mathscr{B}$ 的充要条件为：$\mathscr{I}$ 上存在标量场 k 使得 $\mathscr{L}_{\hat{\xi}}\tilde{h}_{cd} = 2k\tilde{h}_{cd}, \mathscr{L}_{\hat{\xi}}n^a = -kn^a$

借用前面计算的结果：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\hat{\xi}}\Gamma^{ab}{}_{cd} &= \zeta^\star[\mathscr{L}_\xi(n^a n^b \tilde{g}_{cd})]\\ &= \zeta^\star[n^a n^b \mathscr{L}_\xi \tilde{g}_{cd} + 2\tilde{g}_{cd} n^{(a}\mathscr{L}_\xi n^{b)}]\\ &= n^a n^b \mathscr{L}_{\hat{\xi}}\tilde{h}_{cd} + 2\tilde{h}_{cd} n^{(a}\mathscr{L}_{\hat{\xi}} n^{b)}\end{aligned}$$

根据上式，从右向左的证明是显然的。对于从左向右：

$$n^a n^b \mathscr{L}_{\hat{\xi}}\tilde{h}_{cd} = -\tilde{h}_{cd}(n^a \mathscr{L}_{\hat{\xi}} n^b + n^b \mathscr{L}_{\hat{\xi}} n^a)$$

以 $\tilde{h}_{ae}$ 缩并之（$n_a\tilde{h}^{ae} = 0$）：

$$0 = 0 - \tilde{h}_{cd} n^b (\tilde{h}_{ae}\mathscr{L}_{\hat{\xi}} n^a)$$

从而 $0 = \tilde{h}_{ae}\mathscr{L}_{\hat{\xi}} n^a$，这意味着 $\mathscr{L}_{\hat{\xi}} n^a$ 是沿着 $\tilde{h}_{ae}$ 的"退化方向"的，从而：

$$\mathscr{L}_{\hat{\xi}} n^a = -kn^a$$

带回原式：

$$n^a n^b \mathscr{L}_{\hat{\xi}}\tilde{h}_{cd} = 2k\tilde{h}_{cd} n^a n^b$$

$\forall p \in \mathscr{I}, n^a|_p \neq 0$，从而 $\exists \theta_a, s.t. \theta_a n^a = 1$，以 $\theta_a\theta_b$ 缩并上式即完成证明。

> Definition 2
>
> $\mathscr{I}$ 上的无限小对称性称为 $\mathscr{I}$ 上的无限小超平移，若 $\mathscr{I}$ 上有标量场 α 使得 $\hat{\xi}^a = \alpha n^a$。全体无限小超平移的集记作 $\mathscr{S}$。

> Theorem 12 5 3
>
> 设 ξ^a 是无限小渐近对称性，则 $\hat{\xi}^a$ 是无限小超平移的充要条件：

$$\lim_{\to \mathscr{I}} \Omega^2 g_{ab}\xi^a\xi^b = 0$$

这是直观的。充要条件说明 $\xi^a|_{\mathscr{I}}$ 用 $\tilde{g}_{ab}$ 衡量是类光的。$\mathscr{I}$ 上每一点只有一个类光方向。可以验证，闵氏时空中四个平移 Killing 场给出 $\mathscr{I}$ 上的超平移，其余的 Killing 场并非。

下面我们讨论一些使用了 Bondi 规范才会得到的结论。注意之前给出了 Bondi 规范的三个等价条件：

$$\Omega^{-1}\tilde{g}^{ab}n_a n_b = 0 \quad \tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\Omega|_{\mathscr{I}} = 0 \quad \mathscr{L}_n\tilde{g}_{ab}|_{\mathscr{I}} = 0$$

通过对第三个条件使用 $\zeta^\star$ 拉回可以得到 $\mathscr{L}_n\tilde{h}_{ab} = 0$。

Theorem 12 5 4

Bondi 规范下，$\alpha n^a \in \mathscr{B}$ 的充要条件是 $n^a\tilde{\nabla}_a\alpha = 0$，也就是说 α 应在每一条类光母线上为常数。

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{\alpha n}\tilde{h}_{ab} &= \alpha n^c\tilde{\nabla}_c\tilde{h}_{ab} + \tilde{h}_{cb}\nabla_a(\alpha n^c) + \tilde{h}_{ac}\nabla_b(\alpha n^c) \\
&= \alpha n^c\tilde{\nabla}_c\tilde{h}_{ab} + \alpha\tilde{h}_{cb}\nabla_a n^c + n^c\tilde{h}_{cb}\nabla_a\alpha + \alpha\tilde{h}_{ac}\nabla_b n^c + n^c\tilde{h}_{ac}\nabla_b\alpha \\
&= \alpha n^c\tilde{\nabla}_c\tilde{h}_{ab} + \alpha\tilde{h}_{cb}\nabla_a n^c + \alpha\tilde{h}_{ac}\nabla_b n^c \\
&= \alpha\mathscr{L}_n\tilde{h}_{ab} \\
&= 0
\end{aligned}$$

考虑与前面无限小对称性的必要条件对比，得到 $k = 0$。

$$\begin{aligned}
-\mathscr{L}_{\alpha n}n^a &= \mathscr{L}_n(\alpha n^a) \\
&= \alpha\mathscr{L}_n n^a + n^a\mathscr{L}_n\alpha \\
&= n^a n^b\nabla_b\alpha
\end{aligned}$$

从而得证。

Theorem 12 5 5

$\mathscr{S}$ 是 $\mathscr{B}$ 的 Lie-Sub Algebra。

取 $\alpha n^a, \beta n^a \in \mathscr{S}$：

$$
\begin{aligned}
[\alpha n,\beta n] &= \mathscr{L}_{\alpha n}\beta n^a \\
&= \beta\mathscr{L}_{\alpha n} n^a + n^a\mathscr{L}_{\alpha n}\beta \\
&= -k\beta n^a + n^a\mathscr{L}_{\alpha n}\beta \\
&= n^a(\mathscr{L}_{\alpha n}\beta - k\beta)
\end{aligned}
$$

注意：$\alpha n^a, \beta n^a$ 都是 $\mathscr{B}$ 的元素，故 Lie Bracket 的结果必然在 $\mathscr{B}$ 中。使用 Bondi 规范可以看出 $[\alpha n, \beta n] = 0$。这一条件还可以再增强，即 $\mathscr{S}$ 是 $\mathscr{B}$ 的理想。为了验证这一点，取 $\hat{\xi}^a \in \mathscr{B}, \alpha n^a \in \mathscr{S}$：

$$
\begin{aligned}
[\hat{\xi}, \alpha n]^a &= \mathscr{L}_{\hat{\xi}}(\alpha n^a) \\
&= n^a(\mathscr{L}_{\hat{\xi}} a - ak)
\end{aligned}
$$

可以验证，$\mathscr{B}/\mathscr{S}$ 是洛伦兹 Lie 代数。这样做商，直观上相当于把 n^a 方向的信息商掉了。

这里补充一下商 Lie 代数。设 $\mathscr{H}$ 是 $\mathscr{G}$ 的理想，则可定义商 Lie 代数。设 $A, A' \in \mathscr{G}$ 且 $A - A' \in \mathscr{H}$，则称 A, A' 处在同一个等价类中。商 Lie 代数是等价类的集合，其中元素的 Lie Bracket 定义为：

$$
[\hat{A}, \hat{B}] = \pi([A, B])
$$

其中 π 是从元素向等价类的投影映射。
$\mathscr{B}$ 和 Poincare 代数 $\mathscr{P}$ 可以类比，因为 $\mathscr{P}/\mathscr{T} = \mathscr{L}$。我们先谈谈 Poincare 代数，对于 $\xi^a \in \mathscr{P}$，我可以说它是位于 $\mathscr{T}$ 的内部或者外部。我们定义：

$$
\mathscr{T} = \{\xi^a = \xi^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a\}
$$

这个定义是依赖于坐标系的，但是就算我们换系，$\left(\dfrac{\partial}{\partial x'^\mu}\right)$ 也可由原来的坐标基矢表出。因此其实 $\mathscr{T}$ 的定义可以不依赖于坐标系。记：

$$
\mathscr{P}_p = \{\xi^a \in \mathscr{P} | \xi^a|_p = 0\}
$$

显然，Rotation 和 Boost 的 Killing 场均在 $\mathscr{P}_p$ 中，所以 $\mathscr{P}$ 中可以给出无限多这样的与 $\mathscr{L}$ 同构的子代数。

下面考虑 $\mathscr{B}$。首先考虑 $\mathscr{S}$，我们说过在闵氏时空中 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 的每一个平移 Killing 场给出 $\mathscr{I}$ 上的无限小超平移，然而，前者的集合是 4 维的，而后者的集合是无穷维的，因此 $\mathscr{S}$ 中必然含有大量不能用 $\mathscr{T}$ 中元素诱导出的元素。现在我们希望在 $\mathscr{S}$ 中找到由 $\mathscr{T}$ 诱导的无限小超平移集合，记作 $\mathscr{T}_{BMS}$。这个子代数不依赖于任何人为选择的因

素（因为 $\mathscr{I}$ 本身不依赖于任何人为选择因素）。
再讨论 $\mathscr{B}$ 中的其余部分。在 $\mathscr{B}$ 中存在大量与 $\mathscr{L}$ 同构的子代数。在 $\mathscr{I}$ 上任取截面 C ，定义：

$$\mathscr{B}_C = \{\eta^a \in \mathscr{B} | \eta^a|_C 切于C\} \subset B$$

设 $\hat{\xi}^a \in \mathscr{B}$，则存在唯一 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使得 $\eta^a|_q = (\hat{\xi}^a - \alpha n^a)|_q$，换言之我们存在 $\mathscr{B} \to \mathscr{B}_C$ 的映射 Ψ。将 η^a 视作独点子集，则 $\Psi^{-1}[\eta^a]$ 可以被认为是从一个等价类到等价类内元素的投影映射，因此 η^a 是商 Lie 代数的元素。换言之：$\mathscr{B}_C = \mathscr{B}/\mathscr{S}$，所以只要选定一个截面即可找到一个与 $\mathscr{L}$ 同构的 Lie 代数。

类空无限远上的对称性：SPI 代数

下面我们讨论 i^0 上的对称性，i^0 只是一个点，所以我们要将它打开。正如所有类光测地线终止于 $\mathscr{I}^+$，所有的类空测地线终止于 i^0，所以我们希望借助类空测地线讨论 i^0 这一点处的结构。这里有一个问题是 (M, g_{ab}) 存在无穷多的共形规范，这使得我们无法选择一个特殊的共形度规 $\tilde{g}_{ab}$ 来描述类空曲线的测地性。解决办法是：先在 i^0 之外用原度规 g_{ab} 写出曲线的测地条件，再使用 $\tilde{g}_{ab}$ 改写 g_{ab} 的测地条件，而后证明这样的做法在 i^0 处的极限与共形规范无关。现在考虑 $\gamma(\lambda)$ 以是 g_{ab} 衡量的一条测地线，但是 λ 未必是仿射参数，设其切矢为 η^a，满足：

$$\eta^a \nabla_a \eta^b = \alpha \eta^b$$

令（四加速）$A^b = \eta^a \nabla_a \eta^b$，容易发现 $\gamma(\lambda)$ 是（准）测地线等价于 $\eta^{[a} A^{b]} = 0$。为了能在 i^0 处取极限，我们把这个条件改造成 $\tilde{\nabla}_a$ 表述的形式：

$$\eta^{[a} \tilde{A}^{b]} + \Omega^{-1} \chi \eta^{[a} \tilde{\nabla}^{b]} \Omega = 0$$

其中 $\xi = \tilde{g}_{ab} \eta^a \eta^b, \tilde{\nabla}^b \Omega = \tilde{g}_{bc} \nabla_c \Omega$。它另有一个等价形式：

$$\tilde{h}_{ab}(\tilde{A}^b + \chi \Omega^{-1} \tilde{\nabla}^b \Omega) = 0$$

设 W_p 是与 $\eta^a|_p$ 正交的三维子空间，$\tilde{h}_{ab}$ 是 $\tilde{g}_{ab}$ 在 W_p 上的诱导度规。现在 n^a 是类空的，因此诱导度规的表达式 $\tilde{h}_{ab} = \tilde{g}_{ab} - \chi^{-1} \eta_a \eta_b$。下面给一个简单的证明：改写前面的测地线条件：

$$0 = \eta^a \tilde{A}^b - \eta^b \tilde{A}^a + \chi \Omega^{-1} \eta^a \tilde{\nabla}^b \Omega - \chi \Omega^{-1} \eta^b \tilde{\nabla}^a \Omega$$

上式两侧同时缩并 $\tilde{g}_{ac} \tilde{g}_{bd} \eta^d$，得到：

$$0 = \eta_c \eta_b \tilde{A}^b - \chi \tilde{g}_{ac} \tilde{A}^a + \chi \Omega^{-1} \eta_c \eta_b \tilde{\nabla}^b \Omega - \chi^2 \Omega^{-1} \tilde{g}_{ac} \tilde{\nabla}^a \Omega$$

修改下标：

$$0=\eta_a\eta_b\tilde{A}^b-\chi\tilde{g}_{ba}\tilde{A}^b+\chi\Omega^{-1}\eta_a\eta_b\tilde{\nabla}^b\Omega-\chi^2\Omega^{-1}\tilde{g}_{ba}\tilde{\nabla}^b\Omega$$

两侧同乘 $(-\chi)^{-1}$：

$$\begin{aligned}0&=-\chi^{-1}\eta_a\eta_b\tilde{A}^b+\tilde{g}_{ab}\tilde{A}^b-\Omega^{-1}\eta_a\eta_b\tilde{\nabla}^b\Omega+\chi\Omega^{-1}\tilde{g}_{ab}\tilde{\nabla}^b\Omega\\&=(\tilde{g}_{ab}-\chi^{-1}\eta_a\eta_b)\tilde{A}^b+(\tilde{g}_{ab}-\chi^{-1}\eta_a\eta_b)\chi\Omega^{-1}\tilde{\nabla}^b\Omega\end{aligned}$$

这就完成了证明。可以证明，上面的测地线条件并非是规范依赖的，这是因为我们只是将以 g_{ab} 衡量的测地条件以 $\tilde{g}_{ab}$ 进行了改写。们将满足以下三个条件的曲线称为正规线：

- $\gamma(0)=i^0,\gamma$ 在 i^0 为 $C^{>1}$，其余的地方 C^3
- $\gamma(\lambda)$ 在 i^0 处切矢长度为 1
- $\lim_{\to i^0}\tilde{h}_{ab}(\tilde{A}^b+\chi\Omega^{-1}\tilde{\nabla}^b\Omega)=0$
  这里的第一条对曲线的连续性做出了一些要求，第三条要求曲线越接近 i^0 越"类空测地"。我们称两条正规线 γ,γ' 是等价的，当且仅当它们在 i^0 有相同的 4-速和 4-加速。注意：如果我们讨论的是测地线，那么"一点"+"一矢"已经可以确定"一测"。然而我们现在的曲线只是"越来越测地"，不是真的测地，所以即使在一点上有相同的速度、加速度也可以是两条不同曲线。把 $\tilde{h}_{ab}$ 用 $\tilde{g}_{ab}$ 升指标就得到投影映射 $\tilde{h}_{ab}$：

  $$\tilde{h}^a{}_b=(\delta^a{}_b-\chi^{-1}\eta^a\eta_b)\tilde{A}^b=\tilde{A}^a-\chi^{-1}\eta^a(\eta_b\tilde{A}^b)$$

  从而得到对 A 的分解：

  $$\tilde{A}^a=\tilde{h}^a{}_b\tilde{A}^b+\chi^{-1}\eta^a(\eta_b\tilde{A}^b)$$

  这两项分别被称为纵向和横向分量。上面的条件 $\tilde{h}_{ab}(\tilde{A}^b+\chi\Omega^{-1}\tilde{\nabla}^b\Omega)=0$ 相当于只对第一个分量有要求。我们记 $SPI=\{\text{所有正规线的等价类}\}$，或者称为 i^0 的吹胀。

为了找出 SPI 的几何结构，我们讨论 i^0 的切空间 $(V_{i^0}),\tilde{g}_{ab}|_{i^0}$，在其上任选一组正交归一基底 $\{e_\mu\}$，它的任意元素 x 就有四个分量 x^μ。借助 $\{x^\mu\}$ 系的对偶坐标基底可以在 V_{i^0} 上定义度规 $\eta_{ab}=\eta_{\mu\nu}(\mathrm{d}x^\mu)_a(\mathrm{d}x^\nu)_b$。我们称从 V_{i^0} 中零元指向 x 元素的矢量 $x^\mu\left(\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a$ 称为 x 点的矢径。
显然，正规线的一个等价类在 V_{i^0} 上留下一个点，并且这个点在一个"双曲面" $-(x^0)^2+(x^1)^2+\cdots=1$ 上：

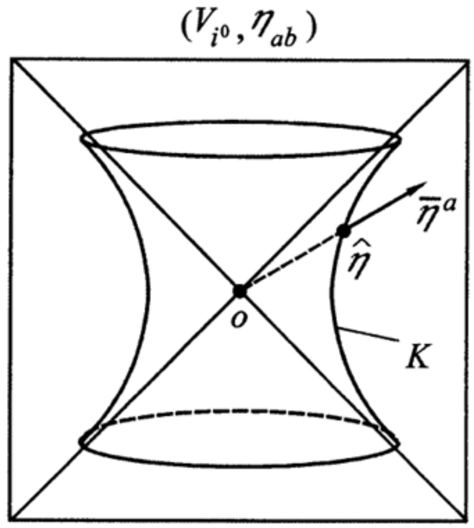

图 12-14　V_{i^0} 可看作闵氏时空. 全体单位类空矢量 $\hat{\eta}^a$ 的子集是类时超曲面 K. 位矢 $\overline{\eta}^a$ 是 K 上的单位法矢场

我们定义这些点的集合：

$$K := \{\hat{\eta} \in V_{i^0} | \tilde{g}_{i^0}(\hat{\eta}, \hat{\eta}) = 1\}$$

可以证明，K 上任意一点的矢径正交于 K，我们只考虑前两维，设 $f(x^0, x^1) = -(x^0)^2 + (x^1)^2$，则 $K : f(\cdot) = 1$，其法余矢：

$$(\mathrm{d}f)_a| = -2(x^0(\mathrm{d}x^0)_a + x^1(\mathrm{d}x^1)_a)$$

不难注意到矢径就是上式升指标后得到的法矢。

由于给出 SPI 的一个元素，我们就可在 K 上找到一点，所以我们有一个映射 $\pi : S \to K$，注意 π 是一个投影映射，因为只要两个等价类在 i^0 处的四速相同它们在 V_{i^0} 上留下的就是同一个点，而两个留下同样的点的等价类在 i^0 处四加速的纵向分量可以不同。由于前面正规线的条件已经对 γ 的四加速的三个分量施加了约束，因此被投影到 K 上同一点的两个等价类的 A 只能有一个分量的差距，所以不难看出 SPI 是四维流形，并且是 K 上的纤维丛，这使得我们可以讨论 SPI 的一些特殊性质。首先，由于 SPI 上的每条纤维是一个 1 维流形（SPI 上的曲线），所有纤维上各点处切于纤维的切矢构成 S （以下将 SPI 简写为 S ）上的一个处处非零矢量场 v^a，称为竖直矢量场，后面会讨论它与 $\mathscr{I}$ 上类光法矢场的对应。此外，V_{i^0} 上的 η_{ab} 在 H 上诱导出 $\bar{h}_{ab}$，而且这个度规非退化。通过将 $\bar{h}_{ab}$ 拉回到 S 上，得到 S 上的 h_{ab}，但是这样直接拉回的结果是退化的，因此 h_{ab} 无法充当 S 上的度规。考虑将 h_{ab} 作用在 v^a 和任一矢量场 u^b 上

$$h_{ab}v^a u^b = (\pi^\star \tilde{h}_{ab})v^a u^b = \bar{h}_{ab}(\pi_\star v^a)(\pi_\star u^b) = 0$$

也就是说 h_{ab} 和我们之前介绍的 $\mathscr{I}$ 上的 h_{ab} 很像，都是非退化的。现在我们希望类比 $\mathscr{I}$ 上的对称性来找出 i^0 上的无穷小对称性，也就是说我们希望找一个矢量场，使得：

$$\mathscr{L}_\xi h_{ab}=0,\mathscr{L}_\xi v^a=0$$

不难相信 $\{\xi\}$ 是 Lie 代数，它被称作 SPI 代数，记作 $\mathscr{G}$。下面我们要说明若 $\xi^a\in\mathscr{G}$，那么 ξ^a 可以通过 $\pi_\star$ 生成 K 上矢量场 $\bar{\xi}^a$。首先，S 上矢量场 v^a 诱导出 S 上单同群 $\{\psi_t:S\to S\}$，直观上，这个映射把纤维上的一点搬运到另外一点。考虑 $p,q\in\Pi^{-1}[x]$，下证 $\pi_\star(\xi^a|_q)=\pi_\star(\xi^a|_p)$。由于：

$$\mathscr{L}_\xi v^a=0\Rightarrow\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\psi_t^\star\xi^a-\xi^a)=0\Rightarrow\psi_t^\star\xi^a=\xi^a$$

从而 $\xi^a|_q=(\psi_{t,\star}\xi^a)|_q=\psi_{t,\star}(\xi^a|_p)$。从而：

$$\pi_\star(\xi^a|_q)=\pi_\star(\psi_{t,\star}(\xi^a|_p))=(\pi\circ\psi_t)|_\star(\xi^a|_p)=\pi_\star(\xi^a|_p)$$

另一个性质是，若 ξ^a 可以诱导出 $\bar{\xi}^a$，则：$\mathscr{L}_\xi h_{ab}=0$ 等价于 $\mathscr{L}_{\bar{\xi}}\bar{h}_{ab}=0$。下面我们说明 $\mathscr{G}$ 确实和 $\mathscr{B}$ 很像。定义：设 $\xi^a\in\mathscr{G}$，则它是无限小超平移若 $\xi^a=fv^a$。下面我们说明，若 $\xi=fv^a$，则 $\xi\in\mathscr{G}$ 充要于 $\mathscr{L}_\xi f=0$。不难完成这个证明：

$$\xi^a=fv^a\Rightarrow\bar{\xi}_a=0\Rightarrow\mathscr{L}_{\bar{\xi}}\bar{h}_{ab}=0\Rightarrow\mathscr{L}_\xi h_{ab}=0$$

$$\mathscr{L}_\xi v^a=\mathscr{L}_{fv}v^a=-\mathscr{L}_v(fv)=0$$

这样的做法说明 f 在纤维上是常数，这与 $\mathscr{B}$ 上的无穷小超平移的行为是十分类似的。我们同样将 $\mathscr{G}$ 上的无限小超平移记为 $\mathscr{S}$，$\mathscr{S}$ 可以与 K 上的标量场建立一一映射：对于 $fv^a\in\mathscr{S}$，定义 K 上标量场 $\bar{f}=f|_p, p$ 在 x 处纤维上，反过来也是类似的。下面说明 $\mathscr{S}$ 是 $\mathscr{G}$ 的阿贝尔理想。不难验证：

$$[fv^a,f'v^a]=0$$

$$[\xi,fv]^a=\mathscr{L}_\xi(fv^a)=v^a\mathscr{L}_\xi f$$

而 $v^a\mathscr{L}_\xi f$ 必然是 $\mathscr{G}$ 的成员，这种形式决定了它也是 $\mathscr{S}$ 的成员。还可以得到其他与 BMS 代数类似的结论，例如 $\mathscr{G}/\mathscr{S}=\mathscr{L}$。证明这个结论需要找到两个 Lie 代数之间的同构。我们宣称两个位于 $\mathscr{S}$ 中的元素位于同一个等价类中，记 $\{\xi^a\}\in\mathscr{G}/\mathscr{S}$，取 $\mathscr{G}$ 中两个等价的矢量场，即 $\xi'^a-\xi^a=fv^a$，那么 $\pi_\star\xi'^a=\pi_\star\xi^a=\bar{\xi}^a$，从而 $\bar{\xi}_a$ 是 K 上的 Killing 矢量场。记 K 上 Killing 场的集合为 $\mathscr{K}$，则我们可以找到 $\mathscr{G}/\mathscr{S}\to\mathscr{K}$ 的映射，我们不加证明地指出它是李代数同构，那么只需证明 $\mathscr{K}$ 同构于 $\mathscr{L}$，这是很直观

的，可以观察 (V_{i^0},η_{ab}) 中除去平移的六个 Killing 矢量场的积分曲线均可以“躺”在 K 上，而它们又恰好是 $\mathscr{K}$ 上的 Killing 矢量场。

同样，$\mathscr{S}$ 也是无穷维的。与 BMS 代数中的 $\mathscr{S}$ 类似，现在我们说明，$\mathscr{S}$ 中有 $\mathscr{T}_{SPI}$，它是 $\mathscr{S}$ 的 4 维理想。取 $\omega \in V_{i^0}^{\star}$，将其指定为 $\omega=\omega_\mu e^\mu=\omega_\mu(\mathrm{d}x^\mu)_a$，$\omega_\mu$ 为常数，则我们指定了 V_{i^0} 上的一个常对偶矢量场。以 $\bar{\omega}_a$ 代表 ω_a 在 K 上的取值，而 K 上的每一点都有矢径 η^a，记 $\bar{f}(\omega)=\bar{\omega}_a\bar{\eta}^a, f(\omega)=\pi^\star\bar{f}(\omega)$。由拉回的定义，$f(\omega)$ 在每一条纤维上必定为常数，从而 $\mathscr{L}_v f(\omega)=0$，从而 $f(\omega)v^a$ 是一个无限小超平移。我们将这样诱导出的无限小超平移的集合称为 $\mathscr{T}_{SPI}$。不难看出，诱导集合中的每一个元素需要一个 4 D 常对偶矢量场，所以 $\mathscr{T}_{SPI}$ 是 4 维的，下证明它是理想。取 $\xi \in \mathscr{S}$，求：

$$
\begin{aligned}
[\xi, f(\omega)v^a] &= \mathscr{L}_\xi(f(\omega)v^a)\\
&= \mathscr{L}_\xi f(\omega)v^a
\end{aligned}
$$

换言之，我们是在问：

$$\mathscr{L}_\xi f(\omega)=f(\omega')$$

是否成立？方程两边整体作用一次推前映射，将问题推前到 K 上，问题转化为：

$$\mathscr{L}_{\bar{\xi}}\bar{f}(\omega)=\bar{f}(\omega')$$

是否成立？考虑：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_{\bar{\xi}}\bar{f}(\omega) &= \mathscr{L}_{\bar{\xi}}(\bar{\omega}_a\bar{\eta}^a)\\
&= \bar{\xi}^b\partial_b(\omega_a\eta^a)\\
&= \omega_a\xi^b\partial_b\eta^a\\
&= \bar{\omega}_a\bar{\xi}^a
\end{aligned}
$$

定义 $\omega'_b=\omega_a\partial_b\xi^a$，那么 $\partial_c\omega'_b=\omega_a\partial_c\partial_b\xi^a=0$，所以我们构造的是常矢量场。

$$
\begin{aligned}
\bar{f}(\omega') &= \bar{\omega}'_b\bar{\eta}^b\\
&= \bar{\eta}^b\omega_a\partial_b\xi^a\\
&= -\bar{\omega}_a\bar{\eta}_b\partial^a\xi^b
\end{aligned}
$$

而 $\bar{\eta}_b\bar{\xi}^b=0$，这是因为 ξ^b 是 V_{i^0} 中 6 个 Killing 场在 K 上的取值，它是切于 K 的，从而与 K 的法矢正交，继续推导：

$$\bar{f}(\omega')=\bar{\omega}_a\partial^a(\bar{\eta}_b\xi^b)$$

于是我们解决了问题。