附录H：诺特定理

#General_Relativity #Classcal_Mechanics

下面我们介绍著名的 Noether 定理：一个连续对称性必然导致体系的一个守恒律。

基于几何语言的证明

设 $\{x^\mu\}$ 是 $\mathbb{R}^4$ 上的整体坐标系，有平直度规：

$$\eta_{ab} = \eta_{\mu\nu}(\mathrm{d}x^\mu)_a(\mathrm{d}x^\nu)_b$$

的 Riemann 张量 $R_{abc}{}^d[\eta]$ 为 0。设 $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ 是微分同胚，则使用它推前后，$f_\star\eta_{ab}$ 也为 0。注意：新、老度规一般不同，除非 f 是等度规映射，但是，我们通过一个推前映射将所有几何量从旧点搬运到新的点，所以黎曼张量这样的内蕴几何量不会改变。
设 ψ 是 $(\mathbb{R}^4,\eta_{ab})$ 上的某种物质场（张量场），并且略去所有张量指标。设 ξ^a 是 $\mathbb{R}^4$ 上任一光滑矢量场，$f_\lambda:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ 是 ξ^a 产生的单参微分同胚群族，它将 $\psi,\partial\psi,\eta_{ab}$ 变成新的场：

$$\psi_\lambda = f_\lambda^\star\psi,\ (\partial_a\psi)_\lambda = f_\lambda^\star(\partial_a\psi),\ (\eta_{ab})_\lambda = f_\lambda^\star\eta_{ab}$$

我们以 ∂_a 代表与 η_{ab} 适配的导数算符，而使用 ∂'_a 代表与 $(\eta_{ab})_\lambda$ 适配的导数算符，要定义 ∂'_a，那么就要定义它作用在任意张量场上的效果，不难验证：∂'_a 作用在一个张量场上，相当于先把这个张量场推前后使用 ∂_a 作用，然后再拉回来。也就是说：

$$f_\lambda^\star(\partial_a\psi) = \partial'_a(f_\lambda^\star\psi)$$

我们前面那使用 $f_\lambda^\star$ 作用到各个东西上，相当于对场的构型做了改变。所以现在的 $\mathscr{L}$ 应视为 $\psi,\partial_a\psi,\eta_{ab}$ 的局域函数，也就是：

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\psi,\partial_a\psi,\eta_{ab})$$

现在使用 Lie 导数定义各个量的无穷小变化：

$$\delta\psi = \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}(f_\lambda^\star\psi-\psi) = \mathbb{L}_\xi\psi,\ \delta(\partial_a\psi) = \mathbb{L}_\xi(\partial_a\psi),\ \delta(\eta_{ab}) = \mathbb{L}\eta_{ab}$$

那么，拉氏量的变化：

$$
\begin{aligned}
\delta\mathscr{L} &= \frac{\mathrm{d}\mathscr{L}_\lambda}{\mathrm{d}\lambda} \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}(\mathscr{L}(f_\lambda^\star\psi, f_\lambda^\star(\partial_a\psi), f_\lambda^\star\eta_{ab}) - \mathscr{L}(\psi, \partial_a\psi, \eta_{ab})) \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}(f_\lambda^\star\mathscr{L} - \mathscr{L}) \\
&= \mathbb{L}_\xi\mathscr{L} \\
&= \xi^a\partial_a\mathscr{L}
\end{aligned}
$$

所以：

$$
\xi^a\partial_a\mathscr{L} = \delta\mathscr{L} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi}(\mathbb{L}_\xi\psi) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\psi)}\mathbb{L}_\xi(\partial_a\psi) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{ab}}\mathbb{L}_\xi\eta_{ab}
$$

由于任意张量场的拉氏运动方程为：

$$
\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi} = \partial_a\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\psi)}\right)
$$

代入后得到拉氏量的变化：

$$
\xi^a\partial_a\mathscr{L} = \partial_a\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\psi)}\right)(\mathbb{L}_\xi\psi) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\psi)}\mathbb{L}_\xi(\partial_a\psi) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta_{ab}}\mathbb{L}_\xi\eta_{ab}
$$

诺特定理是时空对称性的反应，所以现在我们将 ξ^a 选为 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 上的 Killing 矢量场，那么 $\mathbb{L}_\xi\eta_{ab} = 0, (\eta_{bc})_\lambda = \eta_{bc}$，这又导致 $\partial'_a = \partial_a$，所以有：

$$
\mathbb{L}_\xi(\partial_a\psi) = \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}(f_\lambda^\star(\partial_a\psi) - \partial_a\psi) = \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}(\partial'_a(f_\lambda^\star\psi) - \partial_a\psi) = \partial_a(\mathbb{L}_\xi\psi)
$$

于是上式简化为：

$$
\xi^a\partial_a\mathscr{L} = \partial_a\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\psi)}\right)(\mathbb{L}_\xi\psi) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\psi)}\partial_a(\mathbb{L}_\xi\psi)
$$

又由于：

$$
\partial_a\xi^a = \eta^{ab}\partial_a\xi_b = \eta^{(ab)}\partial_{[a}\xi_{b]} = 0
$$

所以上式可以改写为：

$$
\partial_a(\xi^a\mathscr{L}) = \partial_a\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\psi)}\mathbb{L}_\xi\psi\right)
$$

因此，矢量场：

$$J^a = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_a \psi)} \mathbb{L}_\xi \psi - \xi^a \mathscr{L}$$

满足连续性方程 $\partial_a J^a = 0$。定义张量场：

$$S^{ab} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_a \psi)} \partial^b \psi + \mathscr{L} \eta^{ab}$$

当 ξ^a 是平移 Killing 矢量场时，可以证明 $\mathbb{L}_\xi \psi = \xi^b \partial_b \psi$，从而此时有 $S^{ab}\xi_b = -J^a$，立刻得到 $\partial_a S^{ab} = 0$。

可以证明，以上对于单个场的讨论可以推广到多个场的情形：只需将右侧的第一项改为多项的加和，同时，拉氏量也应当改为总拉氏量。我们可以看看遮掩不放过会导出什么样子的守恒量，例如，取 $\xi^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$，可得到：

$$J^a = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_a \psi)} \dot{\psi} - \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a \mathscr{L}$$

则其 0 分量：

$$J^0 = \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}}\right) \dot{\psi} - \mathscr{L} = \mathscr{H}$$

所以我们可以看到时间平移对称性导出的守恒量是能量！

关于正则能动张量

这里给出的正则能动张量 S^{ab} 核之前熟知的能动张量并不一定相同（或者说大概率不同），之前，从我们熟知的能动张量 T^{ab} 中定义守恒流的方式是：$L^a = -T^{ab}\xi_b$，它满足：

$$\partial_a L^a = \partial_a(-T^{ab}\xi_b) = -T^{ab}\partial_a \xi_b = 0$$

现在，非对称的 S^{ab} 将使得上面的证明不成立。特别地，若 ξ^a 是四个平移 Killing 矢量场中之一，那么：

$$\partial_a(S^{ab}\xi_b) = S^{ab}\partial_a \xi_b = 0$$

在 ξ^a 并非 Killing 矢量场时，这样的定义会出现问题。它还有诸多坏处，例如，对于电磁场，S^{ab} 没有规范不变性，且 $\eta_{ab}S^{ab} \neq 0$，所以我们要改进 S^{ab} 的定义。我们希望找到另一个 S'^{ab}，使得 $\partial_a S'^{ab} = 0$，而且 S'^{ab} 是对称化的。这需要我们将原来的 S^{ab} 做对称化。上面的守恒流：

$$J^a=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\psi)}\mathbb{L}_\xi\psi-\xi^a\mathscr{L}$$

是依赖于 Killing 场的，现在我们考虑 6 个独立的非平移 Killing 场：

$$\xi^a_{\mu\nu}=-\xi^a_{\nu\mu}=x_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^a-x_\nu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a$$

根据 Killing 场的下标，我们把 J^a 加上两个下标：

$$J^a_{\mu\nu}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\psi)}\mathbb{L}_{\xi_{\mu\nu}}\psi-\xi^a_{\mu\nu}\mathscr{L}$$

引入记号：

$$l_{\mu\nu}\psi=\mathbb{L}_{\xi_{\mu\nu}}\psi-\xi^b_{\mu\nu}\partial_b\psi$$

那么：

$$\begin{aligned}J^a_{\mu\nu}&=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\psi)}l_{\mu\nu}\psi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\psi)}\xi^b_{\mu\nu}\partial_b\psi-\xi^a_{\mu\nu}\mathscr{L}\\&=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\psi)}l_{\mu\nu}\psi-S^{ab}\xi_{b\mu\nu}\\&=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\psi)}l_{\mu\nu}\psi-S^a{}_b\left(x_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b-x_\nu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b\right)\end{aligned}$$

利用 $\partial_aJ^a_{\mu\nu}=0$，可以得到：

$$0=\partial_aJ^a_{\mu\nu}=\partial_a\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_a\psi}l_{\mu\nu}\psi\right)-2S_{[\mu\nu]}$$

这里面有点难算的部分是验证 $\partial^ax_\mu=\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a$。一个可行的方法是把抽象指标换成具体指标，算出 $\partial^\alpha x_\mu$ ，即 ∂^ax_μ 在坐标基底下的分量为 δ^a_μ，从而完成了验证。定义张量：

$$N^c{}_{ab}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_c\psi}l_{\mu\nu}\psi(\mathrm{d}x^\mu)_a(\mathrm{d}x^\nu)_b$$

利用刚才导出的式子，可以得到：

$$2S^{[ab]}=\partial_cN^{cab}$$

所以我们完成了 S^{ab} 的对称化。引入张量 F^{cab}，要求它满足 $F^{cab}=F^{[ca]b}$，$2F^{c[ab]}=-N^{cab}$，这两个条件将 F^{cab} 唯一确定为:

$$2F^{cab}=N^{bca}-N^{cab}-N^{abc}$$

现在令 $Y^{ab}=\partial_c F^{cab}$ ，显然 $\partial_a Y^{ab}=0$，所以取 $S'^{ab}=S^{ab}+Y^{ab}$ 满足 $\partial_a S'^{ab}=0, S'^{ab}$ 对称。这是因为

$$S'^{[ab]}=S^{[ab]}+\partial_c F^{c[ab]}=S^{[ab]}-\frac{1}{2}\partial_c N^{cab}=0$$

这里的 S'^{ab} 是我们之前谈到的能动张量 T^{ab}，我们利用了 S^{ab} 的规范自由性给它加了点东西，从而完成了对称化。
下面我们讨论使用 S^{ab} 和 T^{ab} 定义出的各种守恒量是不是一样的，考虑 $L^a=-T^{ab}\xi_b, J^a=-S^{ab}\xi_b$，先设 ξ^a 为平移 Killing 矢量场，那么:

$$L^a=J^a-\partial_c(\xi_b F^{cab})$$

考虑守恒荷的密度:

$$L^0=J^0-\partial_i(\xi_\nu F^{i0\nu})$$

右边的第二项是一个三维散度，所以积分的时候可以转化成边界项，会消失。所以 L^a, J^a 定义的守恒能量、动量一致。角动量也有类似的关系，经过计算可以得到:

$$L^a{}_{\mu\nu}=J^a{}_{\mu\nu}-\partial_c(\xi_{b\mu\nu}F^{cab})$$

所以定义的角动量也没有区别。

总结一下，S_{ab} 本身没有对称化，通过它的规范自由性我们可以对称化它。但是，S_{ab} 和 T_{ab} 定义了相同的守恒量。

基于坐标语言的证明

下面我们给出基于坐标语言证明 Noether 定理的过程。在证明之前，我们先复习如何使用坐标语言对张量场进行描述。首先考虑标量场 $\phi:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$，它与任意坐标系 $\{x^\mu\}$ 结合诱导出四元函数 $\phi(x)$，我们也可以以 $\phi'(x')$ 代表 ϕ 与 $\{x'^\mu\}$ 结合得到的四元函数，则:

$$\phi'(x'|_p)=\phi|_p=\phi(x|_p)$$

因此，我们换一个坐标系，标量场与坐标系结合所得的函数就会发生变化。类似地，在我们更换坐标系的时候，由于坐标基底和对偶基底的变换，矢量和对偶矢量的分量

将发生变化：

$$u'^{\mu}|_p = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}|_p u^{\nu}|_p$$

若 ψ 是 (k,l) 型张量场，则在坐标语言中它有 4^{k+l} 个分量，但是我们通常只使用一个指标做区分，将分量记作 $\psi^i(x)$，那么拉氏密度是：

$$\mathscr{L}(x) = \mathscr{L}(\psi^i(x), \nabla_\mu \psi^i(x), g_{\mu\nu}(x))$$

其中，∇_a 是与 η_{bc} 适配的导数算符。以 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 上的电磁场为例，其场量 ψ 是电磁 4-势能，则几何语言中，无源电磁场的拉氏密度为：

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4\pi}\eta^{ac}\eta^{bd}(\nabla_a A_b)\nabla_{[c}A_{d]}$$

在坐标语言中：

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{1}{4\pi}g^{\mu\rho}(x)g^{\nu\sigma}(x)(\nabla_\mu A_\nu(x))\nabla_{[\rho}A_{\sigma]}(x)$$

若我们有另一坐标系 $\{x'^{\mu}\}$，则 $\mathscr{L}(x)$ 变为：

$$\mathscr{L}'(x') = \mathscr{L}(\psi'^i(x'), \nabla'_\mu \psi'^i(x'), g'_{\mu\nu}(x'))$$

虽然在任意时空 (M, g_{ab}) 中的 Killing 场都可以诱导出守恒量，但是我们这里只从一个洛伦兹坐标系开始讨论。在下面的推理中，我们略去 $g_{\mu\nu}(x)$ 的分量变化，因为我们最终得到的结论是只有 Killing 场才诱导出守恒量，显然，在 Killing 场诱导的坐标变换下，$g_{\mu\nu}$ 的分量是不变的。因此略去 $g_{\mu\nu}$ 分量的变化不会影响我们的结论（尽管这样做是不严格的）。下面考虑 $\{x^\mu\}$ 是洛伦兹系，$\{x^\mu\} \to \{x'^\mu\}$ 是无穷小庞加莱变换，考虑这一坐标变换导致的 $\mathscr{L}$ 的改变：

$$\mathscr{L}'(x') - \mathscr{L}(x) = \delta_1\mathscr{L} + \delta_2\mathscr{L}$$

其中：

$$\delta_1\mathscr{L} = \mathscr{L}(\psi'^i(x'), \partial'_\mu\psi'^i(x')) - \mathscr{L}(\psi'^i(x), \partial'_\mu\psi'^i(x))$$

$$\delta_2\mathscr{L} = \mathscr{L}(\psi'^i(x), \partial'_\mu\psi'^i(x)) - \mathscr{L}(\psi^i(x), \partial_\mu\psi^i(x))$$

其中 $\delta_1\mathscr{L}$ 是坐标变化导致的拉氏量变化；$\delta_2\mathscr{L}$ 是函数变化导致的拉氏量变化。令：

$$\delta\psi^i(x) = \psi'^i(x) - \psi^i(x) \quad \delta\partial_\mu\psi^i(x) = \partial'_\mu\psi'^i(x) - \partial_\mu\psi^i(x)$$

那么拉氏量的第二部分变化：

$$\delta_2\mathscr{L}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi^i(x)}\delta\psi^i(x)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\psi^i(x)}\delta\partial_\mu\psi^i(x)=\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\psi^i(x)}\delta\psi^i(x)\right)$$

其中使用了拉格朗日方程以及 $\delta\partial_\mu\psi^i(x)=\partial_\mu\delta\psi^i(x)$。令 $\delta x^\mu=x'^\mu$，那么这一部分的拉氏量变化是：

$$\delta_1\mathscr{L}=\frac{\partial\mathscr{L}(x)}{\partial x^\mu}\delta x^\mu$$

那么，对称性条件 $\delta_1\mathscr{L}+\delta_2\mathscr{L}=0$ 表述为：

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^i(x))}\delta\psi^i(x)\right)+\frac{\partial\mathscr{L}(x)}{\partial x^\mu}\delta x^\mu=0$$

现在考虑坐标变换是 Killing 场，设无穷小变换的参数是 $\delta\lambda$，那么：

$$\delta x^\mu=\xi^\mu\delta\lambda$$

由于 Killing 性导致 $\partial_\mu\xi^\mu=0$，所以：

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^\mu}(\xi^\mu\delta\lambda)=\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\mathscr{L}\xi^\mu\delta\lambda)$$

从而：

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\psi^i(x)}\frac{\delta\psi^i(x)}{\delta\lambda}+\mathscr{L}\xi^\mu\right)=0$$

所以我们可以将 ∂_μ 内的内容定义为守恒流。要证明这里给出的守恒流和之前相同，只需证明 $\delta\psi^i(x)=-(\mathbb{L}_\xi\psi)^i\delta\lambda$，这个证明是简单的。我们知道，微分同胚映射 $\phi_{\delta\lambda}$ 诱导出一个坐标变换 $\{x^\mu\}\to\{x'^\mu\}$，由“新新老=老老新”，有：

$$((\phi_{\delta\lambda})_\star\psi)(x'^\mu)=\psi'(x'^\mu)$$

这里只是需要注意：对于一个标量场来说，它与一个坐标系结合形成的“分量”就是 $\psi(x)$，因此，老张量与新坐标系结合所得的分量是 $\psi'(\cdot)$，该分量满足变换关系：

$$\psi'(x')=\psi(x)$$

那么立刻就可以看出：

$$((\phi_{\delta\lambda})_\star\psi)(\cdot)=\psi'(\cdot)$$

根据 Lie 导数的定义：

$$\delta\lambda \mathscr{L}_{\xi}\psi(x^{\mu}) = ((\phi_{\delta\lambda})^{\star}\psi)(x^{\mu}) - \psi(x^{\mu}) = -(\psi'(x^{\mu}) - \psi(x^{\mu})) = -\delta\psi(x^{\mu})$$

从而得证。