有限自由度拉氏、哈氏理论的几何表述

#Classcal_Mechanics #Differential_Geometry

关于勒让德变换

我们将流形 M 的切丛 TM 定义为流形上每一点处切空间之并，原流形上的坐标系自然在切丛上诱导出一组坐标 (x^μ, v^μ)。称如下集合是一条纤维：

$$F_m = \{(m, v^a) | v^a \in V_m\}$$

不难看出存在自然的投影映射 π，使得 $\pi((m, v^a)) = m$。不难同样定义流形 M 的余切丛 $T^\star M$，它在 m 点的纤维表为：

$$F_m^\star = \{(m, \omega_a) | \omega \in V_m^\star\}$$

切丛和余切丛都是流形的纤维丛的特例。

下设 $\mathscr{C}$ 是构形流形，拉氏量定义为 $T\mathscr{C}$ 上的标量场。选定坐标系后，拉氏量可以表为 $L(q^i, v^i)$，注意此时我们还并没有在 q^i, v^i 之间建立联系，此时二者是独立的。现取 $\sigma \in T\mathscr{C}$ ，定义：

$$p_i := \frac{\partial L(q, v)}{\partial v^i}$$

不难直接验证在 $\mathscr{C}$ 上有坐标变换时其变换规律与对偶矢量一致，因此我们可以说它是 $Q = \pi(\sigma)$ 上的对偶矢量，可写为 $p_a = p_i (dq^i)_a$。由于给定一组 (q, v)，就可以得到一个 p_a，并且我们可以缩并 $p_a v^a$，所以我们可以说 $p_a v^a$ 也是 $T\mathscr{C}$ 上的标量场，于是我们可以定义一个新的标量场：

$$\tilde{H} = p_a v^a - L$$

另一方面，构形流形的余切丛 $T^\star\mathscr{C}$ 称为系统的相空间，记作 Γ，将 $P \in \Gamma$ 表为 $P = (Q, \omega_a)$，在 $\mathscr{C}$ 上选择一个坐标系后，Γ 上自然也有一个坐标系。在选定拉氏量后可以自然地定义映射（在前面从拉氏力学到哈氏力学的过程中我们已经定义了这个映射）$f: T\mathscr{C} \to \Gamma$，使得 $\forall \sigma = (Q, v^a)$，$f(\sigma) = (Q, \omega_a)$，并且 $\omega_i|_{f(\sigma)} = p_i|_\sigma$。我们将这样的映射称作勒让德变换。注意：在前文中我们已经体会过，勒让德变换的表现与拉氏量的 Jacobi 矩阵 J_{ij} 密切相关，而且容易验证 J_{ij} 是 $\mathscr{C}$ 上的张量。如果在 $T\mathscr{C}$ 上的每一点都有 $J_{ij} \neq 0$，则 f 至少是局部一一映射，则 $(f^{-1})^\star \tilde{H}$ 就是定义在 Γ 上的哈密

顿量，此时就是无约束的情形；否则，f 不一一到上，H 无法按照上面的方式定义，这就是有约束的情形。

下面我们着重考虑有约束的情形，此时 $T\mathscr{C}$ 上的一点 σ 应满足约束 $\phi_m(q,p)=0$，做完勒让德变换后自然要求 $f(\sigma)$ 满足 $\phi_m(q^i,\omega_i)=0$，这就得到的初级约束的子流形 $\Gamma_1=0$。我们首先直接借 $\tilde{H}:T\mathscr{C}\to\mathbb{R}$ 和 $f:T\mathscr{C}\to\Gamma$ 在 Γ_1 上定义一个哈氏量，而后再将其定义域延拓至 Γ。我们将讨论 $f^{-1}[P]$ 只有一个弧连通分支的情况，设：

$$(q^i,v_1^i),(q^i,v_2^i)\in f^{-1}[P]$$

则必存在曲线 $\beta(s):[0,1]\to f^{-1}[P]$ 使得 $\beta(0)=(q^i,v_1^i),\beta(1)=(q^i,v_2^i)$，由于这条曲线上都有 $p_i|\beta_s=\omega_i|_P$，从而曲线两端 $\tilde{H}$ 的差：

$$\tilde{H}(q,v_2)-\tilde{H}(q,v_1)=\omega_i|_P(v_2^i-v_1^i)-L(q,v_2)+L(1,v_1)$$

另一方面，计算：

$$\begin{aligned}L(q,v_2)-L(q,v_1)&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}L(q,v(s))\mathrm{d}s\\&=\int_0^1\frac{\partial}{\partial v^i}L(q,v(s))\frac{\mathrm{d}v^i(s)}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s\\&=\omega_i|_P\frac{\mathrm{d}v^i(s)}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s\\&=\omega_i|_P(v_2^i-v_1^i)\end{aligned}$$

因此，我们看到在这条曲线上 $\tilde{H}$ 不变，可见 $\tilde{H}|_{f^{-1}[P]}=0$，从而我们可以令：

$$H(P)=\tilde{H}|_\sigma,\ \sigma\in T\mathscr{C}\ s.t.\,f(\sigma)=P$$

现在我们说明以上内容如何用于描述物理系统的运动。对于拉氏理论，$\mathscr{C}$ 中中一条曲线 $q^i(t)$ 自然给出 $T\mathscr{C}$ 中的一条曲线 $(q^i(t),\dot{q}^i(t))$（这被称为 $\mathscr{C}$ 中曲线的提升曲线）。拉氏方程中的 q^i,v^i 本身自然是互相独立的，但是当我们谈及演化线时，它们就不再独立了。

对于哈氏形式，对 $T\mathscr{C}$ 上的演化线做勒让德变换后自然得到 Γ_1 上的演化线，这条演化线服从哈密顿方程。然而，有一个问题是哈密顿方程中将涉及 H 对所有 q_i,p_i 的偏导数，然而我们刚才只在 Γ_1 上定义了 H，岂不是有些偏导数没有意义？这时我们需要做延拓，将 H 的定义延拓到全空间中，下面讨论不同的延拓方式是否导致不同的演化。设有两个延拓 H 和 H'，记 $H''=H'-H$，从而 $\nabla_AH''|_{\Gamma_1}$ 为 Γ_1 的法余矢，从而：

$$\nabla_AH''=\mu^m\nabla_A\phi_m$$

用对偶基底展开比较系数：

$$\frac{\partial H''}{\partial q^i}=\mu^m\frac{\partial\phi_m}{\partial q^i},\ \frac{\partial H''}{\partial p_i}=\mu^m\frac{\partial\phi_m}{\partial p_i}$$

从而，如果 (q,p,λ) 满足方程：

$$\dot{q}^i=\frac{\partial H}{\partial p_i}+\lambda^m\frac{\partial\phi_m}{\partial p_i},\ \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q^i}-\lambda^m\frac{\partial\phi_m}{\partial q^i}$$

那么 $(q,p,\lambda'=\lambda+\mu)$ 满足方程：

$$\dot{q}^i=\frac{\partial H'}{\partial p_i}+\lambda'^m\frac{\partial\phi_m}{\partial p_i},\ \dot{p}_i=-\frac{\partial H'}{\partial q^i}-\lambda'^m\frac{\partial\phi_m}{\partial q^i}$$

随意进行两种不同的延拓并不会带来不同的演化，哈氏量不同的效果可以通过选择不同的拉氏乘子来抵消掉。在本书后面的讨论中将允许对哈氏量的任意延拓。

在有了这样的认识之后，我们来讨论一下前文中对于 Hamilton 方程的推导。我们是通过对比这样两个式子：

$$\mathrm{d}H=\dot{q}^i\mathrm{d}p_i-\dot{p}_i\mathrm{d}q_i$$

与

$$\mathrm{d}H=\frac{\partial H}{\partial q^i}\mathrm{d}q^i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i$$

来推出 Hamilton 方程组的。然而，注意第一个式子来自于 H 本身，是 $T^\star\mathscr{C}$ 上的等式，而第二个式子来自于 $\mathrm{d}(p_i\dot{q}^i-L)$，因此这其实是 $\tilde{H}$，是 $T\mathscr{C}$ 上的等式。为何联立这两个等式就得到了 $\Gamma=T^\star\mathscr{C}$ 上的等式？首先，勒让德变换给出 $(Q,v^i)\mapsto(Q,\omega_i)$ 的映射，我们将其定义为 $p_i:=\dfrac{\partial L(q,v)}{\partial v^i}$，从而：

$$d\tilde{H}=v^i\mathrm{d}p_i-\frac{\partial L}{\partial q^i}\mathrm{d}q^i$$

在之前的定义中，若 f 为一一映射，则我们定义 $H=(f^{-1})^\star\tilde{H}$，也就是说 $\tilde{H}=f^\star H$。我们现在定义：$T^\star\mathscr{C}$ 上的一个无挠导数算符：

$$\nabla_{T^\star\mathscr{C}}T=f^\star(\nabla f_\star(T)),\ T\in T^\star\mathscr{C}$$

其中 ∇ 是 $T\mathscr{C}$ 上的无挠导数算符。由于对于任意无挠导数算符有 $\nabla_aH=(\mathrm{d}H)_a$，立刻得到性质：

$$d\tilde{H} = f^\star(\mathrm{d}H)$$

把这里的 H 换成任意一个函数都是可以成立的，下文中我们还将反复使用这个性质。我们有：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tilde{H} &= f^\star\left(\frac{\partial H}{\partial q^i}(\mathrm{d}q^i)_a + \frac{\partial H}{\partial \omega_i}(\mathrm{d}\omega_i)_a\right) \\
&= f^\star\left(\frac{\partial H}{\partial q^i}\right)\mathrm{d}(f^\star q^i) + f^\star\left(\frac{\partial H}{\partial \omega_i}\right)\mathrm{d}(f^\star \omega_i) \\
&= f^\star\left(\frac{\partial H}{\partial q^i}\right)\mathrm{d}q^i + f^\star\left(\frac{\partial H}{\partial \omega_i}\right)\mathrm{d}p_i
\end{aligned}$$

最后一个等号利用了勒让德变换的定义。由于对于演化线上有 $\dfrac{\partial L}{\partial q^i} = \dfrac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = \dot{p}_i, v^i(t) = \dot{q}^i(t)$，从而我们可以在 $T\mathscr{C}$ 的演化线上比较两个式子，得到：

$$\left(\left(\dot{q} - f^\star\frac{\partial H}{\partial \omega_i}\right)\mathrm{d}p_i - \left(\dot{p}_i + f^\star\frac{\partial H}{\partial q^i}\right)\mathrm{d}q^i\right)|_\sigma = 0, \forall \sigma \in \tilde{\eta}(t)$$

下面我们要为把这个式子最终放到 $T^\star\mathscr{C}$ 上做准备。我们又知道：

$$\mathrm{d}q^i = \mathrm{d}(f^\star q^i) = f^\star \mathrm{d}q^i \quad \mathrm{d}p_i = \mathrm{d}(f^\star \omega_i) = f^\star \mathrm{d}\omega_i$$

从而 $f^\star \mathrm{d}q^i, f^\star \mathrm{d}\omega_i$ 是 σ 点的对偶矢量，从而上式写为：

$$\left(\left(\dot{q} - f^\star\frac{\partial H}{\partial \omega_i}\right)(f^\star \mathrm{d}\omega_\mathrm{i})_A - \left(\dot{p}_i + f^\star\frac{\partial H}{\partial q^i}\right)(f^\star \mathrm{d}q^i)_A\right)|_\sigma = 0, \forall \sigma \in \tilde{\eta}(t)$$

这个东西是 σ 点处的 0对偶矢量，从而对 $\forall u^A \in V_\sigma$ 都有：

$$\left(\left(\dot{q} - f^\star\frac{\partial H}{\partial \omega_i}\right)(f^\star \mathrm{d}\omega_\mathrm{i})_A - \left(\dot{p}_i + f^\star\frac{\partial H}{\partial q^i}\right)(f^\star \mathrm{d}q^i)_A\right)u^A|_\sigma = 0$$

方程两侧作用推前映射，得到：

$$\left(\left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial \omega_i}\right)(\mathrm{d}\omega_\mathrm{i})_A - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q^i}\right)(\mathrm{d}q^i)_A\right)(f_\star u)^A|_\sigma = 0$$

以 $W_{f(\sigma)}$ 代表 $V_{f(\sigma)}$ 中切于 Γ_1 的元素构成的子空间，则 u^A 跑遍 V_σ 导致 $(f_\star u)^A$ 跑遍 $W_{f(\sigma)}$，从而左边是 Γ_1 在 $f(\sigma)$ 处的法余矢，从而它可以写成 $\lambda^m(t)\nabla_A\phi_m$。

拉氏角度看约束

前面我们已经知道，不恰当的拉氏量选择会在我们使用哈氏理论分析系统时给我们迎头痛击——加上初级（甚至次级）约束，但是我们怎么没在分析拉氏系统的时候感受到这些约束呢？只要系统的 N 个构型变量 $q_1, \cdots q_N$ 完全独立，系统演化必然服从拉氏方程。考虑到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}A^j + v^j \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial q^j}$$

从而令 $J_{ij} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}, C_i = \dfrac{\partial L}{\partial q^i} - v^j \dfrac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial q^j}$，拉氏方程重写为：

$$J_{ij}A^j = C_i$$

若 $J_{ij} = 0$，则勒让德变换并不一一到上，从而将 $T\mathscr{C}$ 映射到 Γ_1。考虑一条演化曲线 $\tilde{\eta}(t)$，并有 $\tilde{\eta}(0) = \sigma$，若 $J_{ij}|_\sigma \neq 0$，则可求出 $A^i|_\sigma$ 的唯一解；若 $T\mathscr{C}$ 上处处 $J_{ij} \neq 0$，则可在 $T\mathscr{C}$ 上给出一个演化矢量场：

$$Y^a = v^i\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^A + A^i\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right)^A$$

显然其积分曲线就是演化曲线。然而，若 $T\mathscr{C}$ 上处处多有 $J = 0$，不妨设 J 的秩在 $T\mathscr{C}$ 上为常值 Z，那么存在 $N - Z$ 个非 0 的非 0 的 $\beta^i_{(s)}$ 使得：

$$(\beta^i_{(s)}J_{ij})|_\sigma = 0$$

这立刻给出：

$$\mu(q, v) = \beta^i_{(s)}C_i = 0$$

这里的 $\mu(q, v)$ 就是 $T\mathscr{C}$ 上的函数，从而 $T\mathscr{C}$ 上不满足上式的点完全不可能有演化曲线经过，这就是 $T\mathscr{C}$ 中的约束，这些约束虽然不是在拉氏量选择后立刻得到的（而是配合运动方程给出的），但是未必与哈氏理论中的次级约束对应。我们将约束中不含 v 的称为 A 型约束，否则称为 B 型约束，A 型约束两侧对时间求导后得到 $\dot{\mu}_s(q(t), v(t)) = 0$，这是进一步的约束；而 B 型约束求导后得到 $\mu_s(q, v, A) = 0$，这是关于 q, v, A 的方程而不是 $T\mathscr{C}$ 上的约束，应当与拉氏方程联合求解。而新的约束同样应满足自洽性条件，因此以上讨论也可以递归进行，直至不再添加新的约束为止。最终，我们得到的结果是：以 $\bar{S} \subset T\mathscr{C}$ 代表某个约束面，则仅在 $\bar{S}$ 上有约束线经过，且 $f[\bar{S}] = \bar{\Gamma}$。
在无约束的时候，由于我们能在整个 $T\mathscr{C}$ 上定义矢量场，其积分曲线即为演化线，从而每一点只有一条演化线经过。约束的存在不仅将演化线可以运行的范围限制在子集

$\bar{S}$ 上，还使得经过每一点的演化线可能不止一条。这是由于设 $\tilde{\eta}(t), \tilde{\eta}'(t)$ 均为过 σ 的演化线，它们在 σ 处的加速度为 A^i, A'^i，在 J 不满秩时，$J_{ij}(A'^i - A^j)|_\sigma = 0$ 显然有非零解。

下面我们聊聊在哈氏理论中的拉氏乘子 λ。在我们之前的推导中，ξ_A 是 Γ_1 上的法余矢。我们之前将其作为演化线上的函数 $\lambda(t)$ 直接引入，事实上，它们也可以被视为 $\bar{S} \subset T\mathscr{C}$ 上的函数。设 $\sigma \in \bar{S}, f(\sigma) = P$，$Y^A$ 为 $T\mathscr{C}$ 上的演化矢量场，则可使用 $f^\star$ 将其变为 $f(\sigma)$ 处矢量 $Z^A = f_\star(Y^A|_\sigma)$，并满足：

$$Z^A = v^i|_\sigma \left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^A|_{f(\sigma)} + \left(A^i J_{ji} + v^j \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i}\right)|_\sigma \left(\frac{\partial}{\partial \omega^i}\right)^A|_{f(\sigma)}$$

这个式子很好证明，Z^A 必然是 $\bar{\Gamma}$ 上演化线的切矢，观察一下它的分量就知道上式是对的。对于两条不同的演化线的切矢的像 Z'^A, Z^A，显然有：

$$Z'^A - Z^A = (A'^j - A^j) J_{ji}|_\sigma \left(\frac{\partial}{\partial \omega_i}\right)^A|_{f(\sigma)} = 0$$

虽然 σ 处所有 Y^A 的像相同，但是这不意味着 $\bar{\Gamma}$ 上过 $f(\sigma)$ 的演化线唯一，这是因为有约束时可能出现拉氏乘子的自由性，并且此时 $f^{-1}[f(\sigma)]$ 不一定是 $T\mathscr{C}$ 的独点子集。设 $\exists \hat{\sigma} \in \bar{S}$ 使得 $f(\sigma) = f(\hat{\sigma})$，则不难看出过 $\hat{\sigma}$ 点的演化线的切矢的像 $\hat{Z}^A \neq Z^A$。下面考虑 $P \in \bar{\Gamma}$ 的逆像是个什么东西，不妨设 $\sigma \in f^{-1}[P], \hat{\sigma}$ 是与 σ 无限临近的点，设 D^A 是从 σ 指向 $\hat{\sigma}$ 的矢量，则显然有 $D^A \nabla_A q^i = 0, D^A \nabla_A p_i = 0$。将 D^A 写成矢量展开式：

$$D^A = D^i \left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right)^A + \tilde{D}^j \left(\frac{\partial}{\partial q^j}\right)^A$$

从而第一个条件等价于 $\tilde{D}_j = 0$，第二个条件等价于：

$$0 = D^j \left(\frac{\partial}{\partial v^j}\right)^A \nabla_A \frac{\partial L}{\partial v^i} = J_{ij} D^j$$

我们如下定义 $\sigma \in T\mathscr{C}$ 的切空间 V_σ 的子空间：

$$\mathscr{D}_\sigma = \{D^A \in V_\sigma | D^A = D^j \left(\frac{\partial}{\partial v^j}\right)^A, J_{ij} D^j = 0\}$$

这是 $f^{-1}[f(\sigma)]$ 中一点 σ 指向集合中其他点的"所有可能"方向。显然这个子空间是 $2N - Z$ 维的，我们可以说 $T\mathscr{C}$ 上有一个 $N - Z$ 维的子空间场。可以证明它是可积的，换言之，$\forall \sigma \in T\mathscr{C}$，有 $N - Z$ 维子流形 $\mathscr{S}_\sigma$，使得其上任意一点 ρ 处的切空间与

$\mathscr{D}_\rho$ 重合，换言之通过指定前面的 $\mathscr{D}_\sigma$，实际上我们已指定了一个 $T\mathscr{C}$ 的子流形 $\mathscr{S}$ 以及其切空间。直观上，你可以想象 $\forall\sigma\in T\mathscr{C}$ 有 $f^{-1}[f(\sigma)]=\mathscr{S}_\sigma$。
设 $\gamma(t)$ 是起自 $f(\sigma)$ 的任意演化曲线，其在点 $f(\sigma)$ 的切矢为 Z^A，根据有约束情形下的 Hamilton 方程有：

$$Z^A = {X_H}^A|_{f(\sigma)} + \lambda^m(0)X_m^A|_{f(\sigma)}$$

不妨设另一条起自 $f(\sigma)$ 的演化线在 $f(\sigma)$ 处的切矢也是 Z^A，从而两线 $\lambda^m(0)$ 相同。由于所有 $\bar{S}$ 上的起自 σ 的演化线，其像都有全同的切矢，因此，指定 $\sigma\in\bar{S}$ 后可以通过先给出 Y^A，再将其推前到 $\bar{\Gamma}$ 上得到 Z^A，再指定 $\lambda^m(0)$ 的方式获得一组 λ^m，这样我们可以给 $\bar{S}$ 上的每一点分配 λ^m，于是 λ^m 可以视作 $\bar{S}$ 上的函数（所以你猜它为什么被叫做拉氏乘子）。注意 λ^m 不能视为 $\bar{\Gamma}$ 上的函数，这是因为 $f^{-1}[P]$ 未必是独点子集。
我们考虑两个非常特殊的情形。第一种是 $\det(\Phi_{mn})\neq 0$，此时 $\bar{\Gamma}$ 上每一点 P 已有一组确定的 λ^m，因此也只有唯一的演化线经过 P 点。这正是因为此时 f 一一到上，因此 $\bar{\Gamma}$ 上每一点继承了其原像处的 λ^m，此时 λ^m 也被视为 $\bar{\Gamma}$ 上的函数。第二种情形是 $\Phi_{mn}=0$，即所有约束均为第一类，此时 $f^{-1}[P]$ 的所有点的 λ^m 构成 M 维仿射空间。