

有限自由度哈氏理论

#Classcal_Mechanics

前面我们说过，若系统有 M 个约束，那么系统的演化方程变成：

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda^m(t) \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \lambda^m(t) \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i}$$

原则上，我们有 M 个拉氏待定乘子，以及 $2N$ 个广义坐标，共有 $2N + M$ 个函数，可以由 $2N$ 个演化方程和 M 个约束方程联立解出。下面我们讨论与解有关的一些问题。

初级约束&次级约束

设受到约束后，系统的状态只能躺在 Γ 这个相空间的子流形上，设 $\gamma(t)$ 是 Γ 上的一条演化曲线， f 通过 $\gamma(t)$ 诱导出一个一元函数 $f(t) = f(q^i(t), p_i(t))$ ，为了表达它对时间的导数，我们可以定义泊松括号：

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i}$$

它有如下性质：

- 反对称
- 对每个槽位的线性性
- 莱布尼兹律
- Jacobi 恒等式

从而：

$$\dot{f} = \{f, H\} + \{f, \phi_m\} \lambda^m$$

⚠ Warning

在约束面上 $\phi_m = 0$ 并不意味着 $\{f, \phi_m\} = 0$

将 f 取为 p, q ，上式无非化简到演化方程。考虑将 f 取为 ϕ_m ，那么得到：

$$\dot{\phi}_m = \{\phi_m, H\} + \{\phi_m, \phi_n\}\lambda^n = 0$$

这被称为自洽性条件，但是，自洽性条件并非永远成立，拉氏量的不恰当选择会导致各种问题。举个例子：取 $L = q^1 + (\dot{q}^2)^2$ ，不难验证拉氏方程给出 $1 = 0$ ，在哈氏理论中的表现就是自洽性条件不满足。下面我们只考虑拉氏量选得好的情况：记

$\Phi_{mn} = \{\phi_m, \phi_n\}$ ，则它是一个反称矩阵；记 $h_m = -\{\phi_m, H\}$ ，上式被重新写为：

$$\Phi_{mn}\lambda^n = h_m$$

ϕ_m, H 都是已知函数，因此这个东西是关于 λ^n 的线性方程组，在系数矩阵可逆时立刻解得：

$$\lambda^m = (\Phi^{-1})^{mn} h_n$$

从而得到 Γ 上任一函数的演化方程：

$$\dot{f} = \{f, H\} + \{f, \phi_m\}(\Phi^{-1})^{mn} h_n$$

但是，物理上更常见的例子是 Φ_{mn} 不可逆，考虑最简单的情况是 $\Phi_{mn} = 0$ ，则此时对拉格朗日乘子没有任何限制，也就是说随便选择一组拉格朗日乘子代入，都可以得到一条演化曲线。此时，初态不能完全决定系统的演化，也就是说 Γ 上的点与实际的物理状态并非是一一对应的。

如果 $\Phi_{mn} = 0$ 成立，而 $h_m = 0$ 并非在整个 Γ_1 上点点满足，那么就应当将 p, q 的取值范围限制在 $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$ 中，这些为了满足自洽性条件而出现的约束称为次级约束。（换言之，初级约束是因为拉氏量的选择导致不能从 $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ 中反解出 \dot{q}^i 而出现的约

束；而次级约束是在考察了约束随着时间的演化后，发现某些约束在 Γ_1 上无法完全满足，从而对系统的演化范围再次做出的约束），在次级约束施加后，通过

$\dot{\phi}_m = \{\phi_m, H\} + \{\phi_m, \phi_n\}\lambda^n = 0$ 可能对 λ^n 加入新的限制，最终的约束面记作 $\bar{\Gamma}$ 。 $\bar{\Gamma}$ 上的函数被称为第一类的，如果它与所有约束函数（初、次级约束）的泊松括号为 0，否则称为第二类的。有一直观结论：有多少个第一类初级约束，就有多少个自由拉格朗日乘子。

下面使用几何语言讨论最自由的情况 $\Phi_{mn} = 0, h_m = 0$ 。利用 Γ 上的 $M + 1$ 个函数 H, ϕ^m 可以在 Γ 上定义 $M + 1$ 个矢量场：

$$X_H^A = \frac{\partial H}{\partial p_i} \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \right)^A - \frac{\partial H}{\partial q^i} \left(\frac{\partial}{\partial p_i} \right)^A$$

根据 Hamilton 方程，这个其实是（无约束情况下的）演化矢量场。在有约束的情形下，演化矢量场还需要叠加上：

$$X_m^A = \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \right)^A - \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i} \left(\frac{\partial}{\partial p_i} \right)^A$$

而 $\nabla_A \phi_n$ 是法余矢，在刚才指定的简单情况 $h_m = 0$ 下有：

$$X_H^A \nabla_A \phi_n = \{\phi_n, H\} = h_n = 0$$

这说明 X_H^A 本身就是切于 $\phi_n = 0$ 指定的超曲面，同样地：

$$X_m^A \nabla_A \phi_n = \{\phi_m, \phi_n\} = 0$$

这说明演化矢量场：

$$w^A = X_H^A + \lambda^m X_m^A$$

是切于 Γ_1 的，从而拉氏乘子的选择有相当任意性。根据积分曲线的唯一性，任意在 Γ_1 上指定 M 个函数 $\lambda^m(q, p)$ 都可获得一条躺在 Γ_1 上的积分曲线。

下面考虑更复杂的一般情况，即 Φ_{mn} 的秩为 $z < M$ ，那么，应当有 $M - z$ 个独立列向量 λ^n 使得 $\Phi_{mn} \lambda^n = 0$ 。根据 Φ_{mn} 的定义知它是反对称的，那么就有 $M - z$ 个独立的行向量 $l_{(s)}^m$ 使得 $l_{(s)}^m \Phi_{mn} = 0$ ，据此（利用自治性条件）推出：

$$l_{(s)}^m \Phi_{mn} h^n = l_{(s)}^m (\Phi_{mn} h^n) = l_{(s)}^m h_m = 0$$

下文中我们将 $l_{(s)}^m$ 称为 Φ_{mn} 的消灭行向量。现在在约束面 Γ_1 上每个点有 $M - z$ 个独立的消灭行向量，将它们任意地延拓到相空间 Γ 上，则 $l_{(s)}^m h_m$ 是 (q, p) 的函数。然而，自治性条件不一定完全满足，如果自治性条件部分地被违反，也就是出现在 Γ_1 上的某些点有 $l_{(s)}^m h_m \neq 0$ ，为了弥补这一点，就应当将 (q, p) 的取值范围做进一步限制，也即所谓次级约束。设 $\psi_u(q, p) = l_{(s)}^m h_m, u = 1, \dots, U (\leq M - z)$ ，那么我们又将有 U 个约束 $\psi(q, p) = 0$ ，这将系统的运动范围进一步限制在 $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$ 上。下面将初级、次级约束的自治性条件作为一个整体进行讨论：

$$\{\phi_m, H\} + \{\phi_m, \phi_n\} \lambda^n = 0, \{\psi_u, H\} + \{\psi_u, \phi_n\} \lambda^n = 0$$

这个讨论过程是“递归”的， ψ_u 可能无法满足自治性条件，这可能导致新的次级约束，因此这样的讨论过程应当不断进行下去。假定添加完所有约束后我们有 M 条初级约束和 U 条次级约束，从而有 $M + U$ 个线性方程，其系数矩阵：

$$\bar{\Phi}_{mn} = \begin{bmatrix} \Phi_{mn} \\ \{\psi_u, \phi_n\} \end{bmatrix}$$

如果它满秩，则可以解出所有 M 个拉氏乘子 λ^n ，否则若其秩为 \bar{z} ，则又只有 \bar{z} 个 λ^n 的线性组合是可以解出的，其余 $M - \bar{z}$ 个任意。此时，存在 $M - \bar{z}$ 个消灭列向量满足：

$$\Phi_{mn}\xi_\alpha^n = 0 \quad \{\psi_u, \phi_n\}\xi_\alpha^n = 0$$

利用这些消灭列向量，我们构造一些新的但是与原来等价的约束函数。构造的具体方法是：令 $\phi'_m = C_m{}^n \phi_n$ ，其中矩阵 $C_m{}^n$ 非奇异，那么 $\phi'_m = 0$ 与 $\phi_n = 0$ 决定的就是相同的约束。据此，令：

$$\phi_\alpha = \xi_\alpha{}^n \phi_n \quad \phi_\beta = \eta_\beta{}^n \phi_n$$

其中 $\eta_\beta{}^n$ 是适当系数。这个构造有性质：

$$\{\phi_\alpha, \phi'_\alpha\} = \{\phi_\alpha, \phi_\beta\} = \{\phi_\alpha, \psi_\beta\} = 0$$

也就是说每缺一个秩我们其实是可以构造一个与所有约束对易的约束函数（第一类约束）。这些新的约束与原约束的关系是：

$$\phi_n = \mu_n{}^\alpha \phi_\alpha + \nu_n{}^\beta \phi_\beta$$

其中 $\mu_n{}^\alpha, \nu_n{}^\beta$ 组成了与 ξ, η 矩阵的逆。构造新的拉氏乘子（把拉氏乘子一起线性变换了）：

$$\lambda^\alpha = \mu_n{}^\alpha \lambda^n, \lambda^\beta = \nu_n{}^\beta \lambda^n$$

从而初级约束满足的自治条件被重新写为：

$$\mu_m{}^\alpha \{\phi_\alpha, H\} + \nu_m{}^\beta (\{\phi_\beta, H\} + \{\phi_\beta, \phi_{\beta'}\} \lambda^{\beta'}) = 0$$

如果将 $\{\phi_\alpha, H\}$ 以及 $\{\phi_\beta, H\} + \{\phi_\beta, \phi_{\beta'}\} \lambda^{\beta'}$ 视作未知数，那么上式是 M 个线性方程组。由于 μ, ν 排成的矩阵是满秩的，因此上述方程组没有非零解。也就是说，我们可以重新表达这一自治性条件为：

$$\{\phi_\alpha, H\} = 0, \{\phi_\beta, H\} + \{\phi_\beta, \phi_{\beta'}\} \lambda^{\beta'} = 0$$

同样另一个自治性条件写为：

$$\{\Psi_u, H\} + \{\Psi_u, \phi_\beta\} \lambda^\beta = 0$$

所以我们发现，选取新的第一类约束 ϕ_α 后，它直接在所有自治性条件中消失了，同时拉氏乘子 λ^α 也消失了。由于拉氏乘子受到的所有约束均表现在自治条件之中，因此

这些消失的乘子是自由的，我们就证明了之前的结论：有几个第一类初级约束，就有多少自由的拉氏乘子。

此外，对于初级约束函数族的选择也具有规范自由性。例如对于前文中所述一组初级约束，既可使用 $\phi_m = 0$ 刻画，又可使用 $\phi_\alpha = 0, \phi_\beta = 0$ 刻画。不幸的是，不同初级约束中，第一类初级约束的个数可以不同，因此，前面的结论应该更准确地理解为：自由拉氏乘子的数目等于第一类约束最多的那个规范（下文称“最大规范”）中第一类约束的数目。下面证明 $\phi_\alpha = 0, \phi_\beta = 0$ 恰好是一个最大规范。首先应证上文中 $\bar{\Phi}_{mn}$ 的秩是规范不变的。设 $\phi_m = 0$ 与 $\phi'_i = 0$ 是两个规范，显然有：

$$\nabla_A \phi'_i = A_i^m \nabla_A \phi_m$$

令 Ω^{AB} 为正则辛形式的逆映射：

$$\Omega^{AB} = \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \right)^A \left(\frac{\partial}{\partial p_i} \right)^B - \left(\frac{\partial}{\partial p_i} \right)^A \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \right)^B$$

泊松括号可以写为 $\{f, g\} = \Omega^{AB}(\nabla_A f)(\nabla_B g)$ ，从而：

$$\{\phi'_i, \phi'_j\} = A_i^m A_j^n \Omega^{AB}(\nabla_A \phi_m)(\nabla_B \phi_n) = A_i^m \{\phi_m, \phi_n\} \tilde{A}^n_j$$

由于 $\{\nabla_A \phi_m\}$ 已经是 Γ_1 上法矢的一组基底了，所以我们还可以有：

$$\nabla_A \psi_v = B_v^m \nabla_A \phi_m, \nabla_A \psi_u = C_v^u \nabla_A \psi_u$$

从而立刻得到新的规范与旧的规范之间的联系：

$$\begin{bmatrix} \{\phi'_i, \phi'_j\} \\ \{\psi'_v, \phi'_j\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i^m & 0 \\ B_v^m & C_v^u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\phi_m, \phi_n\} \\ \{\psi_u, \phi_n\} \end{bmatrix} [\tilde{A}^n_j]$$

由于第二个、第四个矩阵都是满秩的，因此可知 $\bar{\Phi}_{mn}$ 的秩有规范不变性。

在上面的推导中，我们最终找到了一个最大规范

$\{\phi'_\alpha = 0, \phi'_\beta = 0, \alpha = 1 \cdots A, \beta = A + 1 \cdots M\}$ ，其中 ϕ_α 为第一类约束，同时有次级约束 $\psi'_v = 0, v = 1, \cdots, U$ ，则其 $\bar{\Phi}_{mn}$ 矩阵的秩 $z \leq M - A$ （这是因为该矩阵有 z 列为 0）。同时，按照前面讨论的方法，在 $\bar{\Phi}_{mn}$ 矩阵的秩为 z 时，我们至少能够构造出 $M - z$ 个第一类约束，从而 $A \geq M - z$ 。两式联立得到 $A = M - z$ ，从而我们构造出的 $M - z$ 个一级约束确实已经是最多的。

一个特殊情况的讨论

特别地，我们考虑有一个广义坐标对应的广义速度不出现在拉氏量中的情形，即：

$$L = L(q^1, q^k; \dot{q}^k) \quad k = 2, \dots, N$$

从而所有的动量表达式中均不含 \dot{q}^1 ，它无法被反解出。此时有初级约束：

$$\phi(q, p) = p_1 = 0$$

此时可以构造哈氏量 $H = H(q^1, \dots, q^N, p_2, \dots, p_N)$ 。通过具体计算可以得到演化方程：

$$\dot{q}^1 = \lambda, \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q^1}, \quad \dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q^k}$$

第一个式子指出此时的拉氏乘子就是广义速度 \dot{q}^1 ，第二个式子是自治条件，它要么在 Γ_1 上处处为 0，要么成为新的次级约束。特别地，如果拉氏量从一开始就选择不当，那么该式将无法满，例如前面介绍过的 $L = \dot{q}^1 + (\dot{q}^2)^2$ 。如果需要加次级约束，那么考虑：

$$\psi(q^k, p_k, \dot{q}^1) = \frac{\partial H}{\partial q^1}$$

它应满足（属于次级约束的）自治性条件：

$$0 = \dot{\psi} = \{\psi, H\} + \{\psi, \phi\}\lambda$$

其中：

$$\{\psi, \phi\} = \{\psi, p_1\} = \frac{\partial^2 H}{(\partial q^1)^2}$$

如果 H 对 q^1 的依赖是线性的，那么 $\{\psi, \phi\} = 0$ ，如果再有 $\{\psi, H\} = 0$ ，则所有约束已经穷尽（下面要谈到的电磁场和引力场都是如此）。此时，所有约束均为第一类，这意味着拉氏乘子完全是自由的，这将导致 q_1 也完全任意。因此，我们不妨将 q^1, p_1 从相空间中开除，从而相空间的维度减少为 $2(N-1)$ 。