广义相对论的哈氏理论

#General_Relativity

之前，我们通过引入 Hilbert 作用量将广义相对论改造成拉氏形式，现在，我们希望将其改造成哈氏形式。简便起见，我们对时空的因果性做出一定要求：我们只讨论整体双曲的真空时空，并且将对边界条件做出一定要求。显然，拉氏理论是一种相对论协变的理论，但是哈氏理论并非，它天然依赖于 3+1 分解。现在设 Σ 是一个三维流形，四维流形 M 上有光滑函数 t，使得每一个等 t 面 Σ_t 均同胚于 Σ。在 M 上指定光滑矢量场 t^a 代表 t 的增加方向（$t^a\nabla_a t=1$）。若给 M 指定洛伦兹度规使得 Σ_t 均为类空超曲面，t^a 为指向未来的雷士矢量场，我们称 $\{\Sigma_t\}, t^a$ 构成 (M, g_{ab}) 的 $3+1$ 分解，t^a 可以表示为

$$t^a = Nn^a + N^a$$

其中 N，N^a 被称为时移和位移。在拉氏理论中的构型变量是 g^{ab}，因此将其 $3+1$ 分解就得到哈氏理论中的构型变量，我们说明这些构型变量是 (N, N_a, h_{ab})。由于：

$$h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b \Rightarrow h^{ab} = g^{ab} + n^a n^b$$

从而：

$$g^{ab} = h^{ab} - n^a n^b = h^{ab} - N^{-2}(t^a - N^a)(t^b - N^b)$$

一个 h_{ab} 决定了唯一的 h^{ab}，从 N_a 可借 h^{ab} 求出 N^a，从而 (N, N_a, h_{ab}) 足够帮我们定出原来的 g^{ab}。找到了构型变量之后，考虑重写 Hilbert 作用量中 $\mathscr{L} = (-g)^{\frac{1}{2}}R$，使之只含新的构型变量以及其时空导数。由于 $G_{ab} = R_{ab} - R\dfrac{1}{2}g_{ab}$，而我们的类光法矢 n^a 是归一化的，因此两侧与 $n^a n^b$ 缩并得到：

$$R = 2(G_{ab}n^a n^b - R_{ab}n^a n^b) = (\tilde{R} - K_{ab}K^{ab} + K^2) - 2R_{ab}n^a n n^b$$

这里的 K_{ab} 是等 t 面 Σ_t 的外曲率（或称为第二基本形式，诱导度规 h_{ab} 称为第一基本形式），它的定义为：

$$K_{ab} = h_a{}^c h_b{}^d \nabla_c n_d$$

$\tilde{R}$ 是 Σ_t 的曲率张量所对应的标量曲率。展开右侧的第二项：

$$
\begin{aligned}
n^a R_{ab} n^b &= n^a R_{acb}{}^c n^b \\
&= -n^a(\nabla_a\nabla_c - \nabla_c\nabla_a)n^c \\
&= -\nabla_a(n^a\nabla_c n^c) + (\nabla_a n^a)\nabla_c n^c + \nabla_c(n^a\nabla_a n^c) - (\nabla_c n^a)\nabla_a n^c \\
&= -\nabla_a(n^a\nabla_c n^c) + K^2 + \nabla_c(n^a\nabla_a n^c) - K_{ac}K^{ac}
\end{aligned}
$$

把以上计算结果代入拉氏量密度中，略去边界项得到：

$$\mathscr{L} = \sqrt{h}N(\tilde{R} + K_{ab}K^{ab} - K^2)$$

K_{ab} 可进一步表为：

$$K_{ab} = \frac{1}{2}N^{-1}(\dot{h}_{ab} - 2D_{(a}N_{b)})$$

代入后就可将 $\mathscr{L}$ 改造成新的构型变量的函数。求广义动量：注意到 $\mathscr{L}$ 不含 $\dot{N}, \dot{N}^a$，所以与它们对应的正则动量是 0，这给出两个初级约束。经过计算得到与 $\dot{h}_{ab}$ 对应的正则动量是：

$$\pi^{ab} = \sqrt{h}(K^{ab} - Kh^{ab})$$

两侧与 h_{ab} 缩并，考虑到 $h^{ab}h_{ab} = 3$，得：

$$K = -\frac{\pi}{2\sqrt{h}}$$

由于 $\dot{h}_{ab} = 2NcK_{ab} + 2D_{(a}N_{b)}$，而现在 K_{ab} 可以完全被 π_{ab}, π, h_{ab} 表出，所以 $\dot{h}_{ab}$ 确实可以被正则坐标和动量表出，也就是说没有新的约束被加入。将以上计算结果全部代入，计算哈氏密度和哈氏量：

$$\mathscr{L} = \sqrt{h}N\left(\tilde{R} + \frac{1}{h}\left(\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2}\pi^2\right)\right)$$

$$\mathscr{H} = \pi^{ab}\dot{h}_{ab} - \mathscr{L} = \sqrt{h}N\left(-\tilde{R} + \frac{1}{h}\left(\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2}\pi^2\right)\right) + 2\pi^{ab}D_a N_b$$

用一次分布积分，上面的哈氏量被写为：

$$H = \int_{\Sigma_t}\sqrt{h}N\left(-\tilde{R} + \frac{1}{h}\left(\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2}\pi^2\right)\right) - 2\int_{\Sigma_t}\sqrt{h}N_b D_a\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ab}\right) + 2\int_{\Sigma_t} D_a\left(\frac{1}{\sqrt{h}}N_b$$

由于积分号下的体元仍然是 $\tilde{e}$，而 $\tilde{e}\sqrt{h} = \tilde{\epsilon}$，所以这一项也可以通过高斯定理转化为边界项，我们暂且先不讨论。只考虑哈氏量的如下部分：

$$H=\int_{\Sigma_t}(NC+N_bC^b), C=-\tilde{R}+h^{-1}\left(\pi^{ab}\pi_{ab}-\frac{1}{2}\pi^2\right), C^b=-2D_a(\sqrt{h}\pi^{ab})$$

计算两个次级约束：

$$\dot{\pi}_N=\frac{\delta H}{\delta N}=\sqrt{h}C,\ \dot{\pi}_{N_a}=\sqrt{h}C^b\Rightarrow C=0, C^b=0$$

在约束满足时，我们得到 $H=0$，这是由于边界项被忽略的结果。为了求得演化方程，下面计算所有泛函导数，记：

$$\mathscr{H}=\mathscr{H}_1+\mathscr{H}_2+\mathscr{H}_3=-N\sqrt{h}\tilde{R}+\frac{N}{\sqrt{h}}\left(\pi^{ab}\pi_{ab}-\frac{1}{2}\pi^2\right)+2\pi^{ab}D_aN_b$$

对 π^{ab} 的泛函导数：

$$\frac{\delta H}{\delta\pi^{ab}}=\frac{2N}{\sqrt{h}}\left(\pi_{ab}-\frac{1}{2}\pi h_{ab}\right)+2D_{(a}N_{b)}$$

这里加一个 $(\cdot)$ 是因为 $H=\int\chi_{ab}\delta\pi^{ab}$，不难发现 π^{ab} 是对称的，所以 χ_{ab} 有规范自由性，所以我们在下标上加一个 $(\cdot)$ 来消除这种自由性。

一项一项求对 h_{ab} 的泛函导数，先看第一项，之前已经推导过：

$$\delta H_1=-N\sqrt{h}D^av_a-N\sqrt{h}\left(\tilde{R}_{ab}-\frac{1}{2}\tilde{R}h_{ab}\right)\delta h^{ab}$$

其中：

$$v_a=D^b\delta h_{ab}-h^{cd}D_a\delta h_{cd}$$

把第一项中凑出 δh_{ab}：

$$\begin{aligned}-N\sqrt{h}D^av_a&=-\sqrt{h}(D^a(Nv_a)-v_aD^aN)\\&=\sqrt{h}v^aD_aN\\&=\sqrt{h}(D^aN)D^b(\delta h_{ab})-\sqrt{h}(D^aN)h^{cd}D_a\delta h_{cd}\\&=-\sqrt{h}(D^bD^aN)\delta h_{ab}+\sqrt{h}h^{cd}(D_aD^aN)\delta h_{cd}\\&=(-\sqrt{h}D^aD^bN+\sqrt{h}h^{ab}D_cD^cN)\delta h_{ab}\end{aligned}$$

上面的处理过程中我们忽略了所有边界项。利用 $\delta^a_b=h^{ac}h_{cb}$ 可推出 $\delta h^{ab}=-h^{ac}h^{bd}\delta h_{cd}$，可以将第一项的变分写成：

$$\delta\mathscr{H}_1=\left(-\sqrt{h}(D^aD^bN-h^{ab}D_cD^cN)+N\sqrt{h}\left(\tilde{R}_{ab}-\frac{1}{2}\tilde{R}h^{ab}\right)\right)\delta h_{ab}$$

继续处理第二项，其中利用 $\delta h = hh^{ab}\delta h_{ab}$：

$$\begin{aligned}
\delta\mathscr{H}_2 &= -\frac{N}{2\sqrt{h^3}}\left(\pi^{ab}\pi_{ab}-\frac{1}{2}\pi^2\right)+\frac{N}{\sqrt{h}}\delta\left(\pi^{ab}\pi^{cd}h_{ac}h_{bd}-\frac{1}{2}(\pi^{ab}h_{ab})^2\right)\\
&= -\frac{N}{2\sqrt{h}}h^{ab}\left(\pi^{cd}\pi_{cd}-\frac{1}{2}\pi^2\right)\delta h_{ab}+\frac{N}{\sqrt{h}}(2\pi^{ab}\pi^{cd}h_{ac}\delta h_{bd}-\pi\pi^{ab}\delta h_{ab})\\
&= \left(-\frac{N}{2\sqrt{h}}h^{ab}\left(\pi^{cd}\pi_{cd}-\frac{1}{2}\pi^2\right)+\frac{2N}{\sqrt{h}}\left(\pi^{ac}\pi^b{}_c-\frac{1}{2}\pi\pi^{ab}\right)\right)\delta h_{ab}
\end{aligned}$$

第三项，这里需要对协变导数算符求变分：

$$\begin{aligned}
\delta\mathscr{H}_3 &= 2\pi^{ab}\delta(D_aN_b)\\
&= 2\pi^{ab}\delta(\partial_aN_b-\tilde{C}^c{}_{ab}N_c)\\
&= -2\pi^{ab}(\delta\tilde{C}^c{}_{ab})N_c\\
&= -\pi^{ab}N^d(2D_a\delta h_{bd}-D_d\delta h_{ab})\\
&= 2\sqrt{h}D_a\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ab}N^d\right)\delta h_{bd}-\sqrt{h}D_d\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ab}N^d\right)\delta h_{ab}\\
&= 2\pi^{ab}(D_aN^d)\delta h_{bd}-\sqrt{h}D_d\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ab}N^d\right)\delta h_{ab}\\
&= \left(2\pi^{cb}D_cN^a-\sqrt{h}D_c\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ab}N^c\right)\right)\delta h_{ab}
\end{aligned}$$

在推导的过程中我们已经利用了前面导出的次级约束。

最后我们可以讨论被忽略的边界项。在最初重写拉氏量的时候，我们就扔掉了两项，而最初我们给出 Hilbert Action 的时候说过，我们的拉氏量中实际上是缺一个边界项 $2\int_{\dot{U}}K$ 的。我们讨论的时空区域是被夹在 Σ_1,Σ_2 中间的区域 U，在 Σ_t 紧致且没有边界的情况下，$\dot{U}=\Sigma_1\cup\Sigma_2$。我们要说明 $2\int_{\dot{U}}K$ 的效果恰好与略去的 $2\nabla_a(n^a\nabla_cn^c)$ 抵消。我们使用 $\tilde{n}^a$ 代表 Σ_1,Σ_2 上的内向法矢，而使用 n^a 代表指向未来的法矢，那么对于 Σ_1,Σ_2 分别有 $\tilde{n}^a=n^a,\tilde{n}^a=-n^a$，下面将 K_{ab} 改记为 $\tilde{K}_{ab}$，那么标量外曲率是：

$$\tilde{K}=h^{ab}\tilde{K}_{ab}=h^{ab}h_a{}^c\nabla_c\tilde{n}_b=h^{cb}\nabla_c\tilde{n}_b=g^{cb}\nabla_c\tilde{n}_b+\tilde{n}^c\tilde{n}^b\nabla_c\tilde{n}_b=\nabla_c\tilde{n}^c$$

其中 $\tilde{n}^b\nabla_c\tilde{n}_b=0$ 是因为 $\nabla_c(\tilde{n}^b\tilde{n}_b)=0$。考虑被我们扔掉的这一项：

$$\int_U 2\nabla_a(n^a\nabla_cn^c)\epsilon=2\int_{\dot{U}}(n^a\nabla_cn^c)\tilde{n}_a=2\int_{\dot{U}}(\tilde{n}^a\nabla_c\tilde{n}^c)\tilde{n}_a=-2\int_{\dot{U}}\nabla_c\tilde{n}^c=-2\int_{\dot{U}}\tilde{K}$$

我们还扔下了一个东西，我们看看它的贡献：

$$\int_U 2\nabla_c(n^a\nabla_an^c)=2\int_{\dot{U}}(n^a\nabla_an^c)\tilde{n}_c=2\int_{\dot{U}}(\tilde{n}^a\nabla_a\tilde{n}^c)\tilde{n}_c=\int_{\dot{U}}\tilde{n}^a\nabla_a(\tilde{n}^c\tilde{n}_c)=0$$

所以这一项的贡献为 0。若 Σ_t 紧致，则 Σ_t 没有边界，因此刚才略去的 $\int_{\Sigma_t}\sqrt{h}D_a\left(\frac{1}{\sqrt{h}}N_b\pi^{ab}\right)$ 这一项直接为 0。所以这个时候就算我们略去了三项，但是对于结果没有任何影响。

下面考虑 Σ_t 非紧致但是渐进平直的情况。这种情况下，我们直接考虑如何修改 H 的表达式可以使得 $\dot{h}_{ab},\dot{\pi}_{ab}$ 能够导出前面忽略了大量边界项时给出的演化方程（可以验证这些演化方程和我们之前讨论 GR 的拉氏形式时给出的演化方程是一致的，所以它们等价于真空 Einstein 场方程 $G_{ab}=0$。）利用渐进平直条件，在 Σ_t 上选渐进笛卡尔系 $\{x^i\}$，r 代表"距离"，选择合适的 t^a 使得 $r\to\infty$ 时 $N_a\to 0, N-\hat{N}\to 0$，且各个分量趋于 0 的速度满足 $N^i\sim r^{-1}, N-\hat{N}\sim r^{-1}$，则可以发现将略去的各个边界项表示为面积分之后，只有一项不会消失，我们举个例子：之前略去了 $\sqrt{h}D_b((D_aN)\delta h^{ab})$，考虑它的面积分：

$$\int_S \tilde{e}\sqrt{h}D_b((D_aN)\delta h^{ab}) = \int_S \hat{r}_b((D_aN)\delta h^{ab}) \to 0$$

这个能为 0 的原因是 D_aN 足够快地趋于 0。唯一不为 0 的一项是 $-\sqrt{h}D^a(Nv_a)$：

$$-\int_S Nv_a\hat{r}^a = -\int_S N\hat{r}^a h^{bc}(D_c(\delta h_{ab}) - D_a(\delta h_{bc}))$$

在 $r\to\infty$ 时，时移 $N\to\hat{N}$，$h^{bc}\to\delta^{bc}$，$D_c\to\partial_c$，以 $-\delta C$ 代表上式在 $r\to\infty$ 处的极限，则：

$$\delta C = \hat{N}\lim_{r\to\infty}\sum_{i,j}\int\left(\partial\left(\frac{\delta h_{ij}}{\delta x^j}\right) - \partial\left(\frac{\delta\delta h_{jj}}{\delta x^i}\right)\right)\hat{r}^i = \hat{N}\delta\left(\lim_{r\to\infty}\sum_{i,j}\int_S\left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{jj}}{\partial x^i}\right)\hat{r}^i\right)$$

之前，我们的哈氏量的变分是 $\delta H = \int_{\Sigma_t}(T_{ab}\delta\pi^{ab} - S^{ab}\delta h_{ab})$，那么现在显然应该是：

$$\delta H = \int_{\Sigma_t}(T_{ab}\delta\pi^{ab} - S^{ab}\delta h_{ab}) - \delta C$$

所以对这个哈氏量求变分，我们就不会得到和原来一样的运动方程了，但是我们知道我们原来给出的两个方程是与真空 Einstein 方程兼容的，所以我们其实必须修改我们的哈氏量才能导出正确的方程（也就是说，我们之前的推导过程是"歪打正着"了），我们应当把哈氏量改为：

$$H' = H + C = H + \hat{N}\lim_{r\to\infty}\sum_{i,j}\int_S\left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{jj}}{\partial x^i}\right)\hat{r}^i$$

所以，我们可以看到此时的哈氏量恰好等于渐进平直时空的 ADM 能量！