经典场论的哈氏理论

#General_Relativity

经典场论的哈氏理论需要 3+1 分解

在前文的讨论中，我们应当已经看出：拉氏理论是一个四维协变的理论，拉氏密度比拉氏量更重要，我们显然无需在使用拉氏理论时对时空进行 $3+1$ 分解。而哈氏理论却不是这样，要使用哈氏理论，我们首先需要对时空进行分层（通常选择单参数类空柯西面族 Σ_t 作为分层面），并且任意选择一个类时矢量场 t^a，其积分曲线与各个 Σ_t 之交点被视为同一个空间点。为了定义积分，首先需要指定一个体元。一般来说，计算 M 上函数的积分时通常使用与 g_{ab} 适配的体元 ϵ_{abcd}，而计算 Σ_t 上积分时通常使用与 h_{ab} 适配的 $\epsilon^{(3)} = n^a = \epsilon_{abcd}$ 。然而有一个问题是我们的时空往往不是稳态时空，这会导致 $\mathscr{L}_{t^a}\epsilon_{abcd} \neq 0$ 以及 $\mathscr{L}_{t^a}\epsilon^{(3)}_{abc} \neq 0$。最典型的例子包括不断膨胀或收缩的宇宙度规：

$$\epsilon_{abcd} = a^3(t)\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

由于空间张量场沿着 t^a 的 Lie 导数可以被解释为时间导数（考虑选择 t^a 的适配坐标系并考察 Lie 导数依赖于坐标系的表达式），从而这意味着观者测得的三维体元随着时间变化，这给讨论带来困难。因此我们仍然选择坐标体元：

$$e = \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \quad t^a e_{abcd} = \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3$$

显然有关系：$\epsilon = \sqrt{-g}e, \epsilon^{(3)} = \sqrt{h}e^{(3)}$。

拉氏场论到哈氏场论

之前，如果我们有一个时空张量场 ψ，我们允许其拉氏密度有如下形式：

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\psi, \nabla\psi, \cdots, \psi^K\psi)$$

首先进行 3+1 分解，此时我们只关心 ψ 场在每一个时刻的表现，记作 $q(t)$（它的具体意义是时空张量场 ψ），我们仅允许 $\mathscr{L}$ 含有 $q(t)$ 对时间的一阶导数和对空间的各阶导数，换言之：

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(q, \dot{q}, Dq, \cdots, D^K q)$$

我们将下式定义为与 q 共轭的动量密度 π（注意：我们只是形式化地写出，没有给出具体定义）：

$$\pi := \frac{\partial \mathscr{L}(q, \dot{q}, Dq, \cdots, D^K q)}{\partial \dot{q}}$$

若 q 是 (k,l) 张量，则按以上定义得到的 π 是 (l,k) 张量（严格来说，是空间张量密度场）。特别地，若 q_a 是对偶矢量场，则 π^a 是矢量密度场。记 q_i, π^i 分别为 q_a, π^a 在共动系的分量，那么有：

$$\pi^i = \frac{\partial L}{\partial q_i},\ i = 1, 2, 3$$

定义哈氏密度和时刻 t 的哈氏量：

$$\mathscr{H} = \pi \dot{q} - \mathscr{L} \quad H = \int_{\Sigma_t} \mathscr{H} e^{(3)}$$

这里的 $\mathscr{H}$ 是标量密度场。现在的 H 依赖于两个空间场 (q, π)，我们需把有限维哈氏理论推广至无穷维，这主要是把对有限元函数的偏导 $\frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{\partial H}{\partial q^i}$ 推广至无穷维。先设 H 是有限维相空间 Γ 上的函数，$q^i(\lambda), p^i(\lambda)$ 是 Γ 上的一条曲线，则将 H 的定义域限制在曲线上有：

$$\frac{\mathrm{d}H(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}|_{\lambda=0} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\mathrm{d}q^i(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\mathrm{d}p_i(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} \right)|_{\lambda=0}$$

在无限维的情形，q, π 可以看作是依赖参数 λ 的一族场，此时 H 的变分为：

$$\delta H = \frac{\mathrm{d}H(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}|_{\lambda=0} = \int_{\Sigma_t} e^{(3)} (\chi_q \delta q + \chi_\pi \delta \pi)$$

其中的泛函导数：

$$\frac{\delta H}{\delta q} = \chi_q \quad \frac{\delta H}{\delta \pi} = \chi_\pi$$

注意，这里我们并没有乘以一个 $\sqrt{h}$，因此积分号里面的东西应该已经是张量密度场。δq 是张量场，从而 χ_q 是密度场；$\delta \pi$ 是密度场，从而 χ_π 是张量场。
场论的哈氏理论也可以导出有约束、无约束两种情形。在无约束的情形下有：

$$\dot{q} = \mathscr{L}_{t^a} = \frac{\delta H}{\delta \pi} \quad \dot{\pi} = \mathscr{L}_{t^a} \pi = -\frac{\delta H}{\delta q}$$

这个演化方程恰好是有限维哈氏方程向无穷维的推广。下面以闵氏时空中 KG 场作为例子展示。选择场量 ϕ 在柯西面 Σ_t 上的值作为广义坐标 $q(t)$，其拉氏密度：

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= -\frac{1}{2}(\partial_a\phi\partial^a\phi + m^2\phi^2)\\ &= -\frac{1}{2}(-\dot{\phi}^2 + \partial_i\phi\partial^i\phi + m^2\phi^2)\end{aligned}$$

从而求出正则动量：

$$\pi(\phi, \partial_i\phi) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}} = \dot{\phi}$$

哈氏密度：

$$\mathscr{H}(\phi, \partial_i\phi, \pi) = \pi\dot{\phi} - \mathscr{L} = \pi^2 + \frac{1}{2}(-\pi^2 + \partial_i\phi\partial^i\phi + m^2\phi) = \frac{1}{2}(\pi^2 + \partial_i\phi\partial^i\phi + m^2\phi^2)$$

为了求出演化方程，需要求 H 的变分：

$$H[\phi, \pi] = \frac{1}{2}\int_{\Sigma_t}(\pi^2 + \partial_i\phi\partial^i\phi + m^2\phi^2)$$

$$\begin{aligned}\delta H &= \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\lambda}|_{\lambda=0}\\ &= \int_{\Sigma_t}(\pi\delta\pi + \partial_i\phi\partial^i(\delta\phi) + m^2\phi\delta\phi)\\ &= \int_{\Sigma_t}(\pi\delta\pi + \partial^i(\partial_i\phi(\delta\phi)) - \partial^i\partial_i\phi\delta\phi + m^2\phi\delta\phi)\end{aligned}$$

从而读出：

$$\dot{\phi} = \pi \quad \dot{\pi} = \partial^i\partial_i\phi - m^2\phi$$

第二个式子就是 KG 方程。

有约束系统的哈氏场论

我们举出闵氏时空中的麦氏系统作为有约束系统的哈氏场论的例子。借惯性系 $\{t, x_i\}$ 做 $3+1$ 分解，选择电磁 4-势为时空中的张量场。它应该有两个构型变量（作为柯西面上的空间张量场）：电势 V 和磁矢势 a_i。无源麦氏系统的拉氏密度为：

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= -\frac{1}{16}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\\ &= -\frac{1}{16}(2F^{0i}F_{0i} + F^{ij}F_{ij})\\ &= \frac{1}{16}(2(\dot{a}^i + \partial^i V)(\dot{a}_i + \partial_i V) - F^{ij}F_{ij})\end{aligned}$$

注意这里保留 F_{ij} 完全没问题，因为我们下面要计算正则动量，而 F_{ij} 中不含 V 或 a_i 对时间导数项。广义动量：

$$\pi_V = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{V}} = 0 \quad \pi^j = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{a}_j} = \frac{1}{4\pi}(\dot{a}^j + \partial^j V)$$

这里可以反解出 $\dot{a}^j$，然而 $\pi_V = 0$ 是一个初级约束。另一方面，计算电场：

$$E_j = -F_{0j} = -(\partial_0 A_j - \partial_j A_0) = -(\dot{a}_j + \partial_j V)$$

可以看出 $\vec{E}$ 正比于 $\vec{\pi}$。代入正则动量后得到：

$$\mathscr{L} = 2\pi\pi^i\pi_i - \frac{1}{16\pi}F_{ij}F^{ij} \Rightarrow \mathscr{H} = 2\pi\pi^i\pi_i + \frac{1}{16\pi}F_{ij}F^{ij} - \pi^i\partial_i V$$

用一次高斯定理得到哈密顿量：

$$H[V, a_i; \pi_V, \pi^i] = \int_{\Sigma_t}(2\pi\pi^i\pi_i + \frac{1}{16\pi}F_{ij}F^{ij} + V\partial_i\pi^i)$$

从而有电磁场的运动方程，方程中需要引入一个未定拉氏乘子：

$$\dot{V} = \lambda \quad \dot{\pi}_V = -\frac{\delta H}{\delta V} \quad \dot{a}_i = \frac{\delta H}{\delta \pi^i} \quad \dot{\pi}^i = -\frac{\delta H}{\delta a_i}$$

下面计算变分。设 a^i, V, π^i, π_V 均依赖于一个参数 μ，F_{ij} 又依赖于 a^i, V。计算变分得：

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\mu}|_{\mu=0} &= \int_{\Sigma_t}(4\pi\pi_i\delta\pi^i + \frac{1}{8\pi}F^{ij}\delta F_{ij} + (\partial_i\pi^i)\delta V + V\partial_i\delta\pi^i) \\
&= \int_{\Sigma_t}(4\pi\pi_i\delta\pi^i + \frac{1}{2\pi}(a^{[i}a^{j]})\partial_i\delta a_j + (\partial_i\pi^i)\delta V + V\partial_i\delta\pi^i) \\
&= \int_{\Sigma_t}(4\pi\pi_i\delta\pi^i + \frac{1}{2\pi}(\partial_i((\partial^{[i}a^{j]})\delta a_j) - (\partial_i\partial^{[i}a^{j]}\delta a_j)) + (\partial_i\pi^i)\delta V + \partial_i(V\delta\pi^i) - (\partial_i V) \\
&= \int_{\Sigma_t}((4\pi\pi_i - \partial_i V)\delta\pi^i - \frac{1}{2\pi}(\partial_i\partial^{[i}\partial^{j]})\delta a_j + (\partial_i\pi^i)\delta V)
\end{aligned}$$

写出哈氏方程，利用：

$$\begin{aligned}
(\vec{\nabla} \times \vec{B})^i &= [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times a)]^i \\
&= \partial^i\partial_j a^j - \partial_j\partial^j a^i \\
&= -2\partial_j\partial^{[j}a^{i]}
\end{aligned}$$

得到：

$$\frac{\delta H}{\delta V}=\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}\quad\frac{\delta H}{\delta\vec{\pi}}=4\pi\vec{\pi}-\vec{\nabla}V\quad\frac{\delta H}{\delta\vec{a}}=\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\times\vec{B}$$

利用前面看到的关系 $4\pi\vec{\pi}=-\vec{E}$ 以及 $B=\vec{\nabla}\times\vec{a}$，可以把 $\dot{\vec{a}},\dot{\vec{\pi}}$ 的演化方程写为：

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\vec{\nabla}\times\vec{E}\quad\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\vec{\nabla}\times\vec{B}$$

次级约束：

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}=0\Rightarrow\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$$

引入磁矢势时已经自动满足磁场无源。由于 $\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}=0$ 约束的存在，前面的哈氏量写为：

$$H=\int_{\Sigma_t}\left(2\pi\pi^i\pi_i+\frac{1}{16\pi}F_{ij}F^{ij}\right)=\int_{\Sigma_t}\frac{1}{8\pi}(E^2+B^2)$$

这正是电磁场的总能量。

对于有限自由度而言，约束是 Γ 中函数 $\phi(p,q)=0$。现在有无数个 p,q，因此约束应当为 $p(x,t),q(x,t)$ 的泛函（这里的 x 可以视作 p,q 原来的下标，约束应当是无限维的 Γ 上一点到 $\mathbb{R}$ 的映射）。然而，我们刚才给出的次级约束 $\nabla\cdot\pi=0$ 却是 Γ 上一点到 Σ_t 上标量场的映射，我们可以把这个约束修改一下使之更符合我们对约束的理解。令 χ 为 Σ_t 上任意满足适当边界条件，且与 t 无关的标量场，令：

$$C_\chi=\int_{\Sigma_t}\vec{\nabla}\cdot\vec{\pi}$$

这个 $C_\chi[V,a,\pi_V,\pi]$ 是符合我们理解的 $\Gamma\to\mathbb{R}$ 的约束。显然，一个 $\nabla\cdot\pi=0$ 可以制造出无穷多这样的约束，对于这一点也可以这样理解：在 Σ_t 上点点都要求 $\nabla\cdot\pi=0$，因此这本身就是无穷多个约束。下面可以检验我们做出的这个约束是否继续满足自洽性条件，容易求出 C_χ 对四个场的变分里面仅有一项不为 0：

$$\frac{\delta C_\chi}{\delta\pi^i}=-\partial_i\chi$$

从而：

$$\begin{aligned}\dot{C}_\chi &= -\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_t}(\partial_i\chi)\partial_j\partial^{[j}a^{i]} \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_t}-\chi\partial_{(i}\partial_{j)}\partial^{[j}a^{i]} \\ &= 0\end{aligned}$$

因此自洽性条件得到满足，不再产生新的约束了。最后，我们可以证明初级约束和次级约束都是第一类约束。考虑初级约束：

$$C_\xi = \int_{\Sigma_t}\xi\pi_V \Rightarrow \frac{\delta C_\xi}{\delta\pi_V} = \xi$$

之前的拉氏泊松括号是对有限个 q_i, p_i 求导，现在应该改写为泛函导数，举个例子：

$$\{C_\xi, C_{\xi'}\} = \int_{\Sigma_t}\left(\frac{\delta C_\xi}{\delta V}\frac{\delta C_{\xi'}}{\delta\pi_V} - \frac{\delta C_\xi}{\delta\pi_V}\frac{\delta C_{\xi'}}{\delta V} + \cdots\right) = 0$$

容易证明次级约束也和自己对易。最后，由于 H 对 V 的依赖是线性的，所以初级、次级约束对易。为简单期间，可以选 $\lambda = 0$ 使得 V 为常数。

选读：关于偏导数的定义

在拉氏经典场论中我们有 $\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi} - \partial_a\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi)} = 0$，在哈氏场论中也有 $\pi = \dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}}$。然而，这里分母上的东西不是一个自变量，而是“自变张量场”。因此张量场对张量场的偏导数的定义还需要澄清。

先考虑最简单的情形，设 ϕ 是闵氏时空标量场，则此时的拉氏密度：

$$\mathscr{L}|_p = \mathscr{L}(\phi|_p, \partial_a\phi|_p)$$

在分量语言中，偏导数的定义是清晰的。因为 $\partial_a\phi$ 是对偶矢量场，给定一个坐标系后自然可以拿到四个分量 $\partial_\mu\phi|_p$。此时 $\mathscr{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$ 是五元函数，每个变量均可独立变化，因此偏导数就是普通多元函数偏导数。然而在不依赖坐标的语言中我们不能这么做。首先将偏导数 $\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi)}$ 定义为 $\mathbb{R}^4$ 上矢量场，记作 Λ^a，而后要对每一 $p \in \mathbb{R}^4$ 确定 Λ^a 的值。$\mathscr{L}$ 可以视作有两个独立的槽位。我们引入一个标量场和一个对偶矢量场 α, β^a，且在 p 点引入一个单参族，以便我们使得 α, β^a 发生变化以定义偏导数。单参族满足三个条件：

- $\alpha(0) = \phi, \beta_a(0) = \partial_a\phi$
- $\alpha(\lambda)$ 与 λ 无关，只有 $\beta(\lambda)$ 与 λ 有关。这样我们才能定义偏导数

- 对 $\forall\lambda$，$\alpha(\lambda), \beta_a(\lambda)$ 均光滑，存在 $\delta\beta_\alpha|_p := \frac{\mathrm{d}\beta_a(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}|_{\lambda=0}$ 和
  $\delta\mathscr{L} = \frac{\mathrm{d}\mathscr{L}(\alpha(\lambda), \beta_a(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}|_{\lambda=0}$
  我们将满足如下定义的 Λ^a 称为 $\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi)}$：

  $$(\delta\mathscr{L})|_p = (\Lambda^a\delta\beta_a)|_p$$

  可以证明这个定义在分量式下恰好回到原有的定义。这个定义可以做三点推广：
- 闵氏时空推广为任意时空
- $\mathscr{L}$ 可推广为任意 M 上有限多个张量场的函数，比如说对于弯曲时空电磁场有
  $\mathscr{L} = -\frac{1}{4\pi}(\nabla^{[a}A^{b]})\nabla_a A_b$，它是 $A^b, \nabla_a A^b, g_{ab}$ 的函数
- 可以定义张量场对张量场的偏导数。按照以上定义推广，矢量对矢量的偏导数应当是 $(1,1)$ 张量。

在哈氏场论中会出现空间张量场对空间张量场的偏导数，而且，我们之前还没有下过 $\mathscr{L}$ 对一个自变场的偏导数的定义，例如 $\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}}$，现在我们对这类偏导数下一个比较一般的定义。考虑 Y 是 M 上任意空间张量场（例如哈氏密度），它依赖于 q 的时间导数 $\dot{q}$ 和对空间的各阶导数，可以写成：

$$Y|_p = Y(q|_p, \dot{q}|_p, Dq|_p, \cdots D^K q|_p)$$

虽然这里面的自变量可以分为三类，但是我们要下的这个定义对于这三类自变量是平权的，所以我们干脆记为：

$$Y = Y(X_1, \cdots, X_N)$$

仿照前面的定义，为了说明 Y 中的每个槽位可以独立地变，不妨在 p 点引入空间张量场族 $\{\alpha_1(\lambda), \cdots, \alpha_N(\lambda)\}$，并且有要求：

- $\alpha_1(0) = X_1, \alpha_N(0) = X_N$
- $\alpha_1(\lambda)|_p, \alpha_N(\lambda)$ 中只有 $\alpha_n(\lambda)|_p$ 与 λ 有关
- $\alpha_1, \cdots, \alpha_N(\lambda)$ 都对 λ 光滑，且 $\delta Y|_p$ 和 $(\delta X_n)|_p = \frac{\mathrm{d}\alpha_n(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}|_{\lambda=0}$
  我们把满足这种条件的单参族（其中的每一个元素都是空间张量场）。与前文中的定义类似：若 M 上存在空间张量场 Λ 使得对每一 B_p 类单参族有：

  $$(\delta Y)|_p = (\Lambda\delta X_n)|_p$$

则 Λ 定义为 Y 对 X 的偏导数。
有一个问题是 X_n 是对称张量场的情形。考虑最简单的例子：$Y = Y(X_{ab})$ 且有 $X_{(ab)} = X_{ab}$，那么根据定义有 $\delta Y = \Lambda^{ab}(\delta X)_{ab}$，这会将 Λ_{ab} 定义到差一个反对称张量的程度，因此我们强制要求 Λ_{ab} 是对称的；X_{ab} 是反称时要求类似。