# 引力能量的非定域性

#General_Relativity

引力的能量是非定域的，因而“没有意义”。在讨论引力的能量之前，我们先从电磁场的守恒律谈起。

## 电荷守恒律

从麦克斯韦方程出发，我们立刻可以推导出电荷守恒律：

$$\nabla_{[a}F_{bc]}=0\quad \nabla^a F_{ab}=-4\pi J_b$$

它可以被改写成外微分形式：

$$\mathrm{d}F=0\quad \mathrm{d}^\star F=4\pi^\star J$$

第二个方程两侧同时外微分，得到：

$$\mathrm{d}^\star J=0$$

可以证明，它的指标形式是：

$$(\nabla_e J^e)\epsilon_{abcd}=0\Rightarrow(\nabla_e J^e)=0$$

在闵氏时空中，这个式子的意义显然是电荷守恒。但是我们现在先要定义一下弯曲时空中的电荷是什么。考虑四维弯曲时空中的一个类空曲面 $\Sigma$，我们定义其中的电荷为：

$$Q(\Sigma)=\int_\Sigma {}^\star J$$

我们将 $\Sigma$ 的单位法矢视作瞬时观者，对 $J$ 做 3+1 分解：

$$J^a=\rho n^a+j^a$$

$${}^\star J_{abc}=J^d\epsilon_{dabc}=\rho n^d\epsilon_{dabc}+j^d\epsilon_{dabc}=\rho\epsilon_{abc}+j^d\epsilon_{dabc}$$

其中，有三个指标的 $\epsilon_{abc}$ 是与 $\Sigma$ 上诱导度规适配的体元。下面将 ${}^\star J$ 限制在 $\Sigma$ 上，第一项不变，而第二项为 0。取正交归一的 4-标架场：

$$(j^d\epsilon_{dabc})_\Sigma(e_1)^a(e_2)^b(e_3)^c=(j^d\epsilon_{dabc})(e_1)^a(e_2)^b(e_3)^c=j^0\epsilon_{0123}(e_1)^a(e_2)^b(e_3)^c$$

所以上面的积分化为：

$$Q(\Sigma) = \int_\Sigma \rho \epsilon_{abc}$$

现在，我们来看看这样的对电荷的定义配合上 Maxwell Eq. 为什么可以得到电荷守恒。对于闵氏时空的情形，上面的 $\nabla_e J^e = 0$ 中抽象指标换成具体指标可以直接导致连续性方程。现在我们考虑在弯曲时空中使用一种纯几何的证明方法。

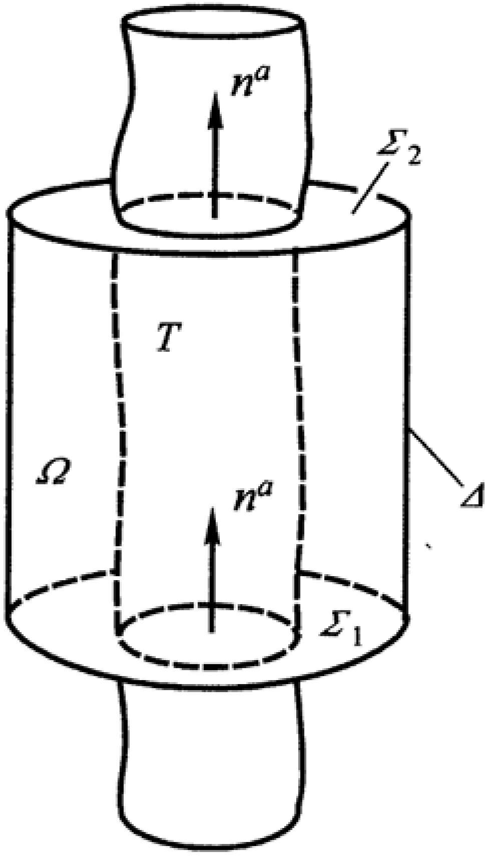


图 12-17　证明电荷守恒所用的时空图

设图中 $T$ 为所有带电粒子的世界线组成的世界"管"，先考虑最简单的情况：带电粒子只存在于空间的有限范围内，也就是说 $T$ 与 $\Omega$ 只交于 $\Sigma_1, \Sigma_2$，所以并没有任何电荷经过 $\Delta$。利用 Stokes 公式：

$$0 = \int_\Omega \mathrm{d}^\star J = \int_{\Sigma_1} {}^\star J + \int_{\Sigma_2} {}^\star J = -Q(\Sigma_1) + Q(\Sigma_2)$$

带电粒子从 $\Delta$ 上流出的情况也可类似讨论，可以证明电荷守恒。我们还可以把电荷的定义写成这样：

$$Q(\Sigma) = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma d^\star F = \frac{1}{4\pi} \int_S {}^\star F = \frac{1}{4\pi} \int_S E R^C N_C \epsilon_{ab} = \frac{1}{4\pi} \oint E \cdot N \mathrm{d}S$$

其中 $S$ 又是 $\Sigma$ 的边界。所以上式是闵氏时空高斯定理到弯曲时空的推广。

下面举出一些例子：我们考虑一个三维球面 $S^3$ 作为我们的 $\Sigma$，希望计算 $Q(\Sigma)$。在上面取一个二维球面将 $\Sigma$ 一分为二，两部分分别记作 $\Sigma_1, \Sigma_2$，则：

$$4\pi Q(\Sigma) = \int_{\Sigma_1} \mathrm{d}^\star F + \int_{\Sigma_2} \mathrm{d}^\star F = \oint_S {}^\star F - \oint_S {}^\star F$$

所以封闭宇宙的总电荷必为 $0$。

有一个可以谈的问题是磁单极子。众所周知，如果有磁荷存在，那么麦克斯韦方程应该被改写成：

$$\nabla \cdot B = 4\pi\hat{\rho},\ \nabla \times E = -4\pi\hat{j} - \frac{\partial B}{\partial t}$$

或者我们改写微分形式表述的麦氏方程：

$$\mathrm{d}\,{}^\star F = 4\pi\,{}^\star J \quad \mathrm{d}F = 4\pi\,{}^\star\hat{J}$$

我们引入一种被称作"对偶变换"的操作，它将 $(F, {}^\star F)$ 变成 $(F', {}^\star F')$，其实是一种 $U(1)$ 对称性的变换，对于无源电磁场：

$$F' = F\cos\alpha + {}^\star F\sin\alpha,\ {}^\star F' = -F\sin\alpha + {}^\star F\cos\alpha$$

这样的变换有性质：它将某一时空中的无源电磁场变成同一时空中的无源电磁场，此外，$T'_{ab} = T_{ab}$。所以你几乎可以将对偶变换前后的电磁场视作同一个电磁场。对于一个静态观者，假设变换前的电磁场是：$E = E_0, B = B_0$，那么变换后的电磁场是：

$$E' = E\cos\alpha - B\sin\alpha,\ B' = E'\sin\alpha + B\cos\alpha$$

所以假如原来磁场是 $0$，做一个 $U(1)$ 变换会得到磁场。在有源的情况下，我们也应当对源做变换：$(J, \hat{J}) \to (J', \hat{J}')$:

$$J = J\cos\alpha - \hat{J}\sin\alpha \quad \hat{J}' = J\sin\alpha + \hat{J}\cos\alpha$$

考虑带电粒子受到的洛伦兹力，现在我们应该补上"磁荷"受到的一部分：

$$f = q(E + u \times B) + q(B - u \times E)$$

它对应的四维形式是：

$$F^a = qF_b^a U^b - \hat{q}\,{}^\star F_b^a U^b$$

不难验证，在对偶变换下，粒子受到的洛伦兹力也是形式不变的。换言之，我们可以认为对偶变换前、后描述的是同一套电磁场。

所以，其实有磁荷不要紧，我们只需要做一个适当的 $U(1)$ 变换：$\tan\alpha = -\dfrac{\hat{\rho}}{\rho}$ 立刻能把有磁荷的情形变成没磁荷的情形。这个变换实质的要求是世界上所有的粒子的磁荷/电荷的值都相等，而磁单极子（只有磁荷没有电荷）违背了这一点。

类比电荷的定义，磁荷可以定义为：

$$\hat{Q}(\Sigma) = \int_\Sigma {}^\star J = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \mathrm{d}F = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Sigma} F$$

## 闵氏时空中的守恒量

前面我们讨论电荷守恒是借助 $\mathrm{d}\,{}^\star J = 0$，在闵氏时空中，有与 $J_a$ 相似的 1-形式。考虑 Killing 场 $\xi^a$，物质场的能动张量是 $T_{ab}$，定义：

$$L_a = -T_{ab}\xi^b$$

下面证明 $\mathrm{d}\,{}^\star L = 0$。首先不难证明 $d\,{}^\star L = (\partial^e L_e)\epsilon$，考虑：

$$\partial^a L_a = -T_{ab}\partial^a\xi^b = 0$$

其中利用了 $T_{ab}$ 是对称的和 $\partial^a\xi^b$ 是反对称的。考虑 $\Sigma$ 是闵氏时空的柯西面，定义：

$$P_\xi = \int_\Sigma {}^\star L$$

上面积分号里的部分应当理解为 ${}^\star L$ 在 $\Sigma$ 面上的限制，那么我们先将 $L$ 做 3+1 分解有：

$$h^d_e L^e = (\delta^d_e + n^d n_e)L^e = L^d + (n_e L^e)n^d$$

代入后得到：

$${}^\star L_{abc} = L^d\epsilon_{dabc} = -(n^e L_e)\epsilon_{abc} + (h^d_e L^e)\epsilon_{dabc}$$

由于 $h^d_e L^e$ 的空间性，第二项显然为 $0$。而

$$-n^a L_a = T_{ab}n^a\xi^b$$

从而：

$$P_\xi = \int_\Sigma T_{ab}n^a\xi^b$$

下面我们讨论 $\xi^b$ 选择不同的 Killing Field 的效果。若选择时间平移的 Killing Field，同时我们选择一个惯性坐标系：

$$P_\xi=\int_\Sigma T_{ab}n^a\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b=\int_\Sigma T_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b=\int\rho\mathrm{d}x^3$$

所以这个守恒量是物质的总能量。同理，选择空间平移的 Killing Field，有：

$$P_\xi=-\int_\Sigma w_i\mathrm{d}^3x$$

选择转动 Killing Fields，有：

$$T_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a\xi^b=x^2w_1-x^1w_2$$

所以它们给出角动量守恒。最后考虑 Boost，取 $\xi^a=t\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^b+x^i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b$，那么：

$$T_{ab}n^a\xi^b=tT_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^b+x^iT_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b=-tw_i+\rho x^i$$

所以它积分之后对应的是质心运动定理：与外界没有交互的场，其质心匀速直线运动。

下面我们考虑任意柯西面 $\Sigma'$：

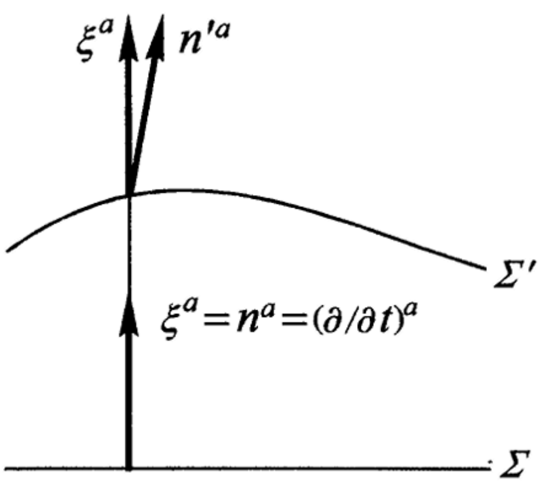


图 12-20　柯西面 $\Sigma$ 和 $\Sigma'$

则：

$$\int_\Sigma T_{ab}n^a\xi^b=\int_{\Sigma'}T_{ab}n'^a\xi^b$$

这个东西的正确性可以用高斯定理来理解。$\Sigma, \Sigma'$ 是时空的两个边界，因此 $\mathrm{d}\,{}^\star L = 0$ 直接导致 $\int_\Sigma {}^\star L + \int_{\Sigma'} {}^\star L = 0$。右边的这个东西解释为柯西面 $\Sigma'$ 的能量。一个特例是 $\Sigma'$ 取为另一个惯性系的同时面的情形，此时我们有：

$$\int_\Sigma T_{ab} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b = \int_{\Sigma'} T_{ab} \left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b$$

以及：

$$\int_\Sigma T_{ab} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^b = \int_{\Sigma'} T_{ab} \left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^b$$

但是上面这是借助两个不同的 Killing 矢量场定义出的两个不同的能量，它们互不相等。

以 $\mathscr{T}$ 代表闵氏时空 Killing 矢量场的集合，$\int_\Sigma T_{ab} n^a (\cdot)$ 是从 $\mathscr{T}$ 到 $\mathbb{R}$ 的线性映射，从而它是 $\mathscr{T}$ 上的对偶矢量。我们记 $P : \mathscr{T} \to \mathbb{R}$ ，称为该物质场的 4-动量，给它加抽象指标 $P_A$。上面的这两个积分还可以这样理解：我在 $\mathscr{T}$ 中选择了两组不同的基矢：$\mathscr{E} = P_A \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^A, \mathscr{E}' = P_A \left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^A$ ，所以显然这样定义出的能量是 Killing 场依赖的。上面两个式子左右相等反映了能量的守恒性，而它们本身不相等反映了能量是观者/Killing 场依赖的。

上面这种能量的定义方式依赖于 Killing 场的存在性，但是弯曲时空中很可能不存在 Killing 场。在流形上，我们说一个性质是“局域成立”的，意味着对于 $M$ 上任意一点 $p$ ，该性质在 $p$ 的一个邻域中成立（而**不是**在一个子流形上成立）。我们说引力场能量是无法局域化的，这意味着引力场的能量密度不能像电磁场一样被 $T_{ab}|_p$ 这种局域几何量表出。对于渐进平直时空，我们可以定义某一时刻全空间的总能量、总 3-动量。在历史上，人们试图寻找引力的能动张量 $t_{\mu\nu}$，但是人们找到的往往都是赝张量（分量在坐标变换中并不按照张量的坐标变换律变化的张量），人们可以找到不同的赝张量，但是它们对全空间积分的结果竟然相同。这启示我们找到全空间的引力场的能动量。从另一个角度来说，广相的牛顿极限给出：

$$\phi = -\frac{1}{2}(1 + g_{00})$$

因此，可以猜测引力场能量密度的最佳候选者与度规的一阶导数有关，而由度规分量的一阶导数无法组成非坐标依赖的张量。这进一步验证了引力场能量无法被局域化。

## 渐进平直时空的总能量、总动量

## Korma 质量

通过推广牛顿引力论中质量的概念，可以给出渐近平直稳态时空中的总能量。在牛顿力学中，利用高斯定理，立刻可以得到全空间的总质量：

$$M = \frac{1}{4\pi}\int (\nabla\phi)\cdot N \mathrm{d}S$$

显然，在物质存在的区域外，牛顿引力势能满足 $\nabla^2\phi = 0$，因此上面的积分与曲面的选择无关。它向广义相对论推广的结果是：

$$M = -\frac{1}{8\pi}\int \epsilon_{abcd}\nabla^c\xi^d(\star)$$

这个结果必须在渐进平直的稳态时空中进行，$\xi^a$ 是在无穷远处被归一化满足 $\xi^a\xi_a = -1$ 的 Killing 场。下面我们看一下这个推广是如何完成的。

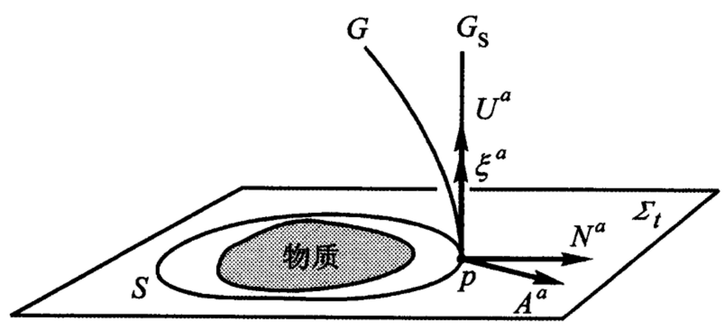


图 12-21　Komar 质量定义为包围全部物质的任一拓扑 2 球面 $S$ 上的积分. $G_S$ 和 $G$ 分别是静态和自由下落无自转观者

前面的 $-\nabla\phi = a^a$ 是自由落体观者相对于静态观者的 3-加速，它与 $G_s$ 的 4-加速 $A^a$ 的关系是：

$$a^a = -A^a - 2\epsilon^a_{bc}\omega^b u^c + 2(A_b u^b)u^a$$

但是 $G$ 在 $p$ 点的 3-速度为 0，从而 $a^a = -A^a$（你也可以从 $G_S$ 的 3-加速和 4-速的垂直性质知道这一点）。我们先尝试在无穷远处推广牛顿力学中的质量表达式，因为在无穷远处时空几乎是平直的，从而对于静态观者而言 $U^a = \xi^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$：

$$
\begin{aligned}
M &= \frac{1}{4\pi}\int_{S_\infty} N^d A_d \epsilon_{ab} \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{S_\infty} \epsilon_{ab} N_d U^c \nabla_c U^d \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{S_\infty} \epsilon_{ab} N_d \xi^c \nabla_c \xi^d
\end{aligned}
$$

现在我们想要收缩积分面，将其收缩到包含了所有质量的任意的 $S$，使得这个积分与 $S$ 的选择无关。可以证明以下结果是合理的：

$$
M = \frac{1}{4\pi}\int_S \epsilon_{ab}\chi^{-1} N_d \xi^c \nabla_c \xi^d (\star\star)
$$

我们先说明它和我们上面给出的形式是等价的。令 $\omega_{ab} = \epsilon_{abcd}\nabla^c\xi^d$，它在 $S$ 上的限制满足 $\tilde{\omega}_{ab} = K\epsilon_{ab}$。等号两侧缩并 $\epsilon^{ab}$。

$$
\epsilon_{ab} = N^c \epsilon_{cab} = U^f N^e \epsilon_{feab}
$$

缩并后（因为 $\epsilon_{ab}$ 已经被限制在 $S$ 上，所以它作用到 $\omega_{ab}$ 中不在 $S$ 上的部分的时候必定得到 $0$，因此我们可以移除 $\omega$ 上的限制符号）：

$$
\epsilon^{ab}\epsilon_{ab} = N_e U_f \epsilon^{feab}\epsilon_{abcd}\nabla^c\xi^d = -4N_e U_f \delta^f_{[c}\delta^e_{d]}\nabla^c\xi^d = 2K
$$

得到：

$$
K = -2N_d U_c \nabla^c \xi^d
$$

这样就证明了 $\star$ 和 $\star\star$ 的等价性。下面我们要检查是否 $\star$ 式的积分结果与 $S$ 的选取无关，也就是说希望证明：

$$
\int_{S'} \omega_{ab} - \int_S \omega_{ab} = \int_\sigma \mathrm{d}\omega
$$

$$
(\mathrm{d}\omega)_{eab} = 3\nabla_{[e}\omega_{ab]} = 3\epsilon_{cd[ab}\nabla_{e]}\nabla^c\xi^d
$$

两边缩并 $\epsilon^{feab}$ 得到一个矢量：

$$
\mathrm{d}\omega = -2\epsilon_{egcd}\nabla_f\nabla^f\xi^e = 2\epsilon_{egcd}R^e_a\xi^a = 0
$$

所以这就完成了证明。

这个东西只能在稳态时空中使用，是因为我们在推广的时候试图类比牛顿引力论中的 $\nabla\phi$ ，也就是经典力学中一个自由下落观者的加速度，那么谁能类比它呢？只有静态

观者的 4-加速 $A^a$。对于 RN 时空这种 $T_{ab}\to 0$ 的情形，也可以通过在无穷远处进行积分来得到 Korma 质量。

## ADM 4 - 动量

在非静态时空中，我们无法使用 Korma 质量，于是引入如下的 ADM 能量：

$$E=\frac{1}{16\pi}\lim_{r\to\infty}\int_S(\partial_j h_{ij}-\partial_i h_{jj})N^i\mathrm{d}S$$

其中 $S$ 仍然是一个类空柯西面上的拓扑球面。上面都使用了分量式，这些分量都是在**渐近笛卡尔系**中的分量，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。我们来举个例子，取施瓦西时空的一个等 $t$ 面，诱导线元：

$$(\mathrm{d}s)^2\approx\left(1+\frac{2M}{r}\right)((\mathrm{d}r)^2+r^2((\mathrm{d}\theta)^2+\sin^2\theta(\mathrm{d}\phi)^2)=\left(1+\frac{2M}{r}\right)(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)$$

所以对于施瓦西时空，有 $E=M$。在稳态时空中，若你选择了与 $\xi^a$ 正交的超曲面，则 ADM 能量回到 Korma 质量。对于上式，我们可以使用坐标语言的高斯定理加以改写，化成体积分：

$$E=\frac{1}{16\pi}\int_\Sigma(\partial_i\partial_j h_{ij}-\partial_i\partial_i h_{ij})\mathrm{d}^3x$$

但是里面这个东西是坐标依赖的，没有协变性。所以它并不是能量密度。下面我们对 ADM 动量的表述进行改造，使用几何语言表述之。首先介绍结论：几何上，ADM 4-动量是一个矢量，正如一个观者的 4-动量是一个矢量 $P^a\in V_p$，ADM 4-动量是 $V_{i_0}$ 的元素（即类空无限远点切空间中的矢量）。记 $P_a=\tilde{g}_{ab}P^a$，$\hat{n}^a$ 为 $\Sigma$ 在 $i_0$ 处指向未来的单位法矢，从而 $P^a=E\hat{n}^a+p^a$。对于一个时空，$P^a$ 是确定的，这说明 4-动量守恒。

接下来我们要研究张量趋于 $i^0$ 的性质，我们只考虑那些被称为"有正规方向依赖极限"的张量场。作为一个引导，我们首先介绍电磁场的渐进表现。我们至少要求：

$$F_{ab}(\eta)=\lim_{\to i^0}\Omega F_{ab}$$

这个依赖于方向（切矢） $\eta$ 的极限存在。有了这些依赖于方向 （也就是曲线在 $i^0$ 处的切矢）的极限，我们可以利用之前所说的正规线给 $V_{i^0}$ 中子集 $K$ 的每一点携带一个张量，我们将其记为 $\bar{F}_{ab}$，注意 $\bar{F}_{ab}$ 不一定切于 $K$。模仿标准情况下对电磁场的定义，我们可以定义：

$$\bar{E}_a=\bar{\eta}^b\bar{F}_{ab},\bar{B}_a=\bar{\eta}_b{}^\star\bar{F}_{ab}$$

不难验证 $\bar{E}_a, \bar{B}_a$ 都是“切于” $K$ 的对偶矢量。可以证明，如果我们有以上定义，那么我们可以完全使用 $\bar{E}_a, \bar{B}_a$ 来表出 $\bar{F}_{ab}$：

$$\bar{F}_{ab} = -2\bar{\eta}_{[a}\bar{E}_{b]} + \epsilon_{abcd}\bar{\eta}^c\bar{B}^d$$

我们知道，时空中的无源电磁场满足：

$$\nabla^a F_{ab} = 0, \nabla_{[a}F_{bc]} = 0$$

现在我们希望看看在 $i^0$ 处的表现，我们需要使用与 $\tilde{g}_{ab}$ 适配的导数算符。通过前面共形变换的结论，我们可以立刻得到：

$$\tilde{\nabla}^a F_{ab} = 0, \tilde{\nabla}_{[a}F_{bc]} = 0$$

利用这两个式子，可以推出：

$$D^a\bar{E}_a = 0, D_{[a}\bar{B}_{b]} = 0 \quad D^a\bar{B}_a = 0, D_{[a}\bar{E}_{b]} = 0$$

其中 $D$ 是与 $V_{i^0}$ 中的度规 $\eta_{ab}$ 在 $K$ 上诱导出的 $\bar{h}_{ab}$ 适配的导数算符。在时空中，我们这样定义电荷：

$$Q(\Sigma) = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \rho\epsilon_{abc} = \frac{1}{4\pi}\int E^c N_c \epsilon_{ab}$$

现在我们类比定义：从时空中沿着正规线向外走，走向类空方向，这样从每一点处出发的正规线都可以视作走到了 $K$ 上的一个截面，现在定义全时空的电荷：

$$Q(\Sigma) = \frac{1}{4\pi}\int_C \bar{E}^a\epsilon_{abc}$$

下面我们要验证电荷的守恒性。记 $\beta_{bc} = \bar{E}^a\epsilon_{abc}$，取两个截面 $C, C'$，我们要证明：

$$\int_{C'}\beta - \int_C \beta = \int_\sigma \mathrm{d}\beta = 0$$

由 $D_a\bar{E}^a = 0$ 不难直接得到 $\mathrm{d}\beta = 0$，从而上式得证。对于磁荷也是类似的：

$$\hat{Q}(\Sigma) = \frac{1}{4\pi}\int \bar{B}^a\epsilon_{abc}$$

下面考虑引力场。根据爱因斯坦场方程，在无穷远处 $R_{ab} = 0$，黎曼张量只剩下无迹部分，也就是 Weyl 张量 $C_{abc}{}^d$。与 $F_{ab}$ 的行为类似，$\Omega^{\frac{1}{2}}C$ 在 $i^0$ 处有方向依赖的极限，从而 $\Omega^{\frac{1}{2}}C$ 在 $K$ 上诱导出张量场 $\bar{C}$。然而，$\bar{C}_{abcd}$ 是不“切于” $K$ 的，因此我们也需要做些改造。令：

$$\bar{E}_{ab} = \bar{\eta}^c \bar{\eta}^d \bar{C}_{acbd}, \bar{B}_{ab} = \bar{\eta}^c \bar{\eta}^d \epsilon_{acef} \bar{C}_{bd}{}^{ef}$$

可以验证它们都是切于 $K$ 的。利用 Weyl 张量的性质可知 $\bar{E}_{ab}, \bar{B}_{ab}$ 都是对称的，由于 Weyl 张量的无迹性质可知 $\bar{E}, \bar{B}$ 都是无迹的（注意：$g_{ab}$ 在无穷远处非常接近 $\eta_{ab}$，而 $\tilde{g}_{ab}$ 只是乘了一个共形变换系数。而我们在 $V_{i^0}$ 处定义了闵氏度规，使用它缩并 $\bar{E}, \bar{B}$ 自然也能得到无迹的结果）。类似于前面推出的电磁场满足的方程，我们可以证明这里的 $\bar{E}, \bar{B}$ 满足的方程

首先，我们说明 ADM 4-动量是 $\mathscr{T}^\star_{SPI}$ 中的元素，定义：对于 $u^A \in \mathscr{T}_{SPI}$：

$$P_A u^A = \int \bar{\epsilon}_{acd} \bar{E}^{ab} D_b \bar{f}(\omega)$$

注意：一个 $u^A$ 是用 $f(\omega)$ 诱导出的，$f(\omega)$ 投影后就得到 $\bar{f}(\omega)$。记积分号里面的东西为 $\beta_{cd}$，我们仍然要证明的是 $\int_\Sigma \mathrm{d}\beta_{cd} = 0$，我们需要做一点准备：

$$D_b \bar{f}(\omega) = D_b(\bar{\omega}_a \bar{\eta}^a)$$

我们要找找 $D$ 和 $\partial$ 的关系，在 $K$ 上任取 $\bar{\mu}_a$，显然 $\partial_b \bar{\mu}_a$ 没意义，但是 $\bar{h}_b{}^c \partial_c \bar{\mu}_a$ 有意义，这相当于对导数算符做了个“投影”，然而这个结果不一定切于 $K$，可以证明以下结果一定是切于 $K$ 的：$\bar{h}_a{}^d \bar{h}_b{}^c \partial_c \bar{\mu}_d$（这个结果就是把 $\bar{\mu}_d$ 先延拓到整个流形上，而后将其协变导数向着子流形投影）。可以证明这个结果是 $D_a \bar{\mu}_b$（这相当于我们构造了 $K$ 上的协变导数算符，只需验证 $D_a \bar{h}_{bc} = 0$。）从而：

$$D_b \bar{f}(\omega) = D_b(\bar{\omega}_a \bar{\eta}^a) = \bar{h}_b{}^c \partial_c (\bar{\omega}_a \bar{\eta}^a) = \bar{h}_b{}^c \bar{\omega}_a \partial_c \bar{\eta}^a = \bar{h}_b{}^c \bar{\omega}_a \delta_c{}^a = \bar{h}_b{}^a \bar{\omega}_a$$

为了计算 $\mathrm{d}\beta$，下面计算：

$$\begin{aligned}
D_a D_b \bar{f}(\omega) &= D_a(\bar{h}_b{}^c \bar{\omega}_c) \\
&= \bar{h}_b{}^e \bar{h}_a{}^d \partial_d (\bar{h}_e{}^c \bar{\omega}_c) \\
&= \bar{h}_b{}^e \bar{h}_a{}^d \partial_d (\bar{\omega}_e - \bar{\eta}_e \bar{\eta}^c \bar{\omega}_c) \\
&= -\bar{\omega}_c \bar{h}_{be} \bar{h}_a{}^d \bar{\eta}^c \partial_d \eta^e \\
&= -\bar{f}(\omega) \bar{h}_{ab}
\end{aligned}$$

最后，在定义电荷的时候，我们推出的“渐近电磁场”满足四个方程（均无散、无旋），现在我们要对 $\bar{E}, \bar{B}$ 推出类似的方程。无穷远处，Weyl 张量满足恒等式：

$$\nabla_{[a} C_{bc]d}{}^e = 0 \Rightarrow D_{[a} \bar{E}_{b]c} = 0, D_{[a} \bar{B}_{b]c} = 0$$

利用 $\bar{h}_{ac}$ 与 $D_{[a} \bar{E}_{b]c} = 0$ 缩并，就得到 $D^c \bar{E}_{cb} = 0$，所以看似我们写出了两个方程，其实我们已经有了四个方程。下面证明 $\mathrm{d}\beta = 0$：

$$(\mathrm{d}\beta)_{ecd} = 3\bar{\epsilon}_{a[cd}D_{e]}\bar{E}^{ab}D_b\bar{f}(\omega)$$

考虑:

$$\begin{aligned}
3\bar{\epsilon}^{ecd}\bar{\epsilon}_{a[cd}D_{e]}\bar{E}^{ab}D_b\bar{f}(\omega) &= -6\delta^e_a D_e\bar{E}^{ab}D_b\bar{f}(\omega) \\
&= -6\bar{E}^{ab}D_a(D_b\bar{f}(\omega)) \\
&= -6\bar{E}^{ab}\bar{h}_{ab}\bar{f}(\omega) \\
&= 0
\end{aligned}$$

从而我们完成了证明：$P_Au^A$ 确实是一个不依赖于积分线 $C$ 的守恒量。注意：这个证明并不是说 $P_A$ 是一个常矢量场，而是说你把 $P_A$ 作用在对应于四个平移 Killing 场无限小超平移上提取出来的能量和动量是不依赖于柯西面 $\Sigma$ 的，也就是说整个时空的能动量是不变的。

下面，我们要说明 $P_A$ 同样也是 $V^\star_{i^0}$ 上的元素。取 $\omega \in V_{i^0}$，使得:
$\omega^a = \omega^\mu e_\mu = \omega^\mu\left(\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\right)$，$\partial_b\omega^\mu = 0$。考虑:

$$\begin{aligned}
P_Au^A &= \int_C \bar{\epsilon}_{acd}\bar{E}^{ab}D_b\bar{f}(\omega) \\
&= \int_C \bar{\epsilon}_{acd}\bar{E}^{ab}\bar{h}_b{}^e\bar{\omega}_e \\
&= \int_c \bar{\epsilon}_{acd}\bar{E}^a{}_e\bar{\omega}^e
\end{aligned}$$

显然这里的 $\bar{\omega}^a$ 和之前我们在构造 $\mathscr{T}_{SPI}$ 时使用的 $\bar{\omega}_a$ 是一一对应的，所以我们说 $P_A$ 其实也可以被作用在 $V_{i^0}$ 的元素上。

之前我们介绍过，对于闵氏时空有 $\mathscr{P}/\mathscr{T} = \mathscr{L}$；对于 SPI 或者 BMS 代数有 $\mathscr{G}/\mathscr{S} = \mathscr{L}$，这是不是意味着我们要通过 $\mathscr{G}/\mathscr{S}$ 定义角动量呢？注意：要判断 $\mathscr{P}$ 中的一个元素是否属于 $\mathscr{T}$ 中，这个问题是泾渭分明的；但是要从 $\mathscr{P}$ 中挑出 $\mathscr{L}$ 的方式则是有无穷多种:

$$\mathscr{L} = \{\xi^a \in \mathscr{P} | \xi^a|_p = 0\}$$

所以角动量这个东西是"原点依赖"的。而且，与闵氏时空中的 $\mathscr{T}$ 对应的是 $\mathscr{S}$，$\mathscr{T}$ 是四维的，所以角动量是依赖于 4 个参数，但是 $\mathscr{S}$ 却是无限维的，如果我们硬要去模仿定义，那么我们将会得到无限维的角动量！于是，在定义角动量的时候我们需要对超平移做些限制，以使得 SPI 的维数被减小到 10 维。这里需要附加的限制大概是由 Weyl 张量定义的 $B_{ab}$ 的衰减需要比 $E_{ab}$ 快一个数量级。

## Bondi 4-动量

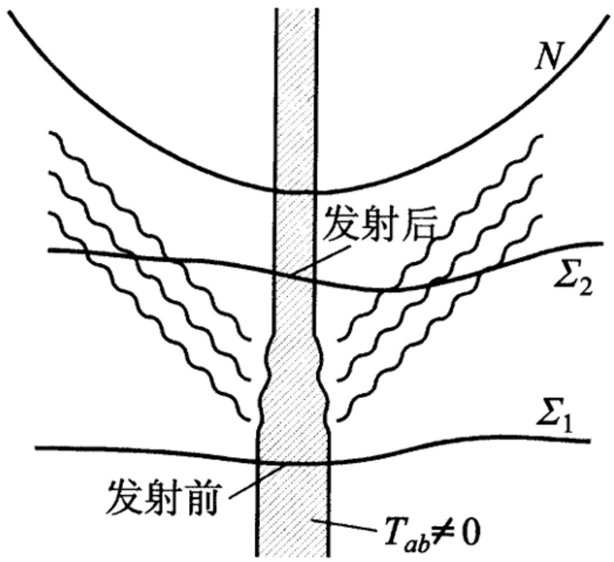


图 12-23　类空超曲面 $\Sigma_2$ 截获所有引力波，因而能量与 $\Sigma_1$ 的能量相等. 要讨论引力波带走的能量应考虑渐近类光超曲面 $N$

现在我们要考虑被引力波带走的能量。由于 ADM 4-动量守恒，所以我们不可以使用上面定义的 $P_A$ 来讨论引力波带走的能量。那么我们也应该取一个无穷远来研究，但是我们需要取一个引力波永远追不上的面！由于引力波以光速传播，所以自然想到我们应当研究类光超曲面，或者至少是渐进类光的超曲面。

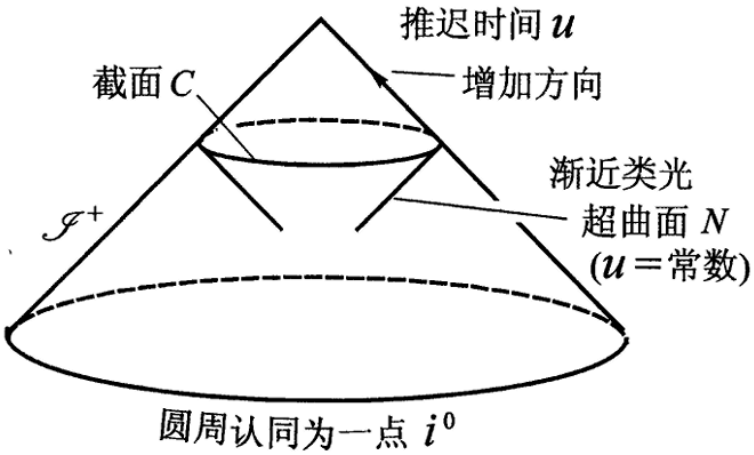


图 12-24　渐近类光超曲面 $N$ 在 $\mathscr{I}^+$ 上形成截面 $C$

由于每一个类光超曲面都在 $\mathscr{I}^+$ 上形成一个截面，因此我们可以使用图中沿着锥面的

母线逐渐增加的 $u$ 来标记一个类光超曲面。有人使用坐标语言定义了类光超曲面的能量 $E(u)$，可以证明，随着 $u$ 逐渐增大，$E(u)$ 是逐渐减少的。

我们回顾一下前面的 Korma 质量，我们是在稳态时空中通过类比牛顿力学中对质量的定义获得 Korma 质量的：

$$M=\frac{1}{4\pi}\int_{S^\infty}N_dA^d\epsilon_{ab}=-\frac{1}{8\pi}\int_{S^\infty}\epsilon_{abcd}\nabla^c\xi^d$$

这个东西依赖于 Killing 场 $\xi^a$，因而只能研究稳态时空的质量。现在我们要研究渐进平直时空的总质量，应当把 $\xi^d$ 处换成渐进平直时空中的渐进对称性。渐进平直时空中的对称性有两种，前面，我们已经利用类空无限远点处与闵氏时空中四个平移 Killing 矢量场同构的无限小超平移 $\mathscr{T}_{SPI}$ 构造了 ADM 4-动量，但是类光无限远处的对称性我们还没有用。所以我们同样考虑类光无限远上与平移 Killing 场同构的 Lie 代数 $\mathscr{T}_{BMS}$。我们先考虑把 Korma 质量做个迁移，所以我们显然希望使用时间平移对称性。设 $\hat{\xi}^a\in\mathscr{T}_{BMS}$ 是 $\mathscr{I}^+$ 上的无穷小时间平移对称性，而 $\xi^a$ 则是 $(M,g_{ab})$ 上与 $\hat{\xi}^a$ 对应的渐进对称性，于是我们将积分中对应于稳态观者的 Killing 场改成渐进对称性。因为现在 $\xi^a$ 毕竟不是 Killing 场，所以积分的结果必然与 $S$ 的选取有关，但是我们期望随着 $\xi^a$ 越来越接近 Killing 场，积分对截面 $S$ 的依赖必然越来越弱，因此我们希望这个积分在无穷远处有不依赖于 $S$ 的极限。设 $C$ 是 $\mathscr{I}^+$ 上的拓扑 2-球面，可以证明以下极限存在：

$$E:=-\lim_{S_\alpha\to C}\frac{1}{8\pi}\int_{S_\alpha}\epsilon_{abcd}\nabla^c\xi^d$$

但是，一个困难是：不同的 $\xi^a$ 光滑延拓到 $\mathscr{I}^+$ 上时可对应同一个 $\hat{\xi}^a$，但是不同的 $\xi^a$ 代入上式计算对应的结果却不同。满足以下条件的 $\xi^a$ 代入后求得的 $E$ 相同：

$$\lim_{\to\mathscr{I}^+}\Omega^{-1}\nabla_a\xi^a=0$$

你可以直观地看出这个条件是不希望 $\nabla_a\xi^a$ 差太远，或者说，对于等价的 $\xi^a$ 而言，$\nabla_a\xi^a$ 衰减的速度至少要比 $\Omega$ 快。对于稳态时空而言，这个条件是自动满足的，这是因为：

$$\nabla_a\xi^a=g_{ab}\nabla^b\xi^a=g_{ab}\nabla^{[b}\xi^{a]}=0$$

所以，我们发现上面对 $E$ 的重定义是一个将 $\mathscr{T}_{BMS}$ 中时间平移元素映射到实数的线性映射，我们自然可将其推广为 $\mathscr{T}^\star_{BMS}$ 上的一个元素 $P_A$。之前，我们研究的 ADM 4-动量与 $i^0$ 上的截面有关，无论你选择了 $i^0$ 吹胀后的“旋转双曲面”上的哪个截面做积分，得到的 ADM-4 动量都是相同的。但是，我们研究 Bondi 动量的一个目的就是想看引

力波带走了多少能量，所以我们会研究永远不会“截获”引力波的超曲面，也就是类光或者渐进类光超曲面。不同的渐进类光超曲面和 $\mathscr{I}^+$ 有不同的交线 $C$，因此 $P_A$ 与截面 $C$ 的选择有关，记作 $P_A(C)$。
对 ADM 4-动量的定义涉及两个特殊矢量，一个是 $\xi^a$，一个是 $\eta^a$。有了对称性才有守恒量，因此 $\xi^a$ 是定义中必要的，而 $\eta^a$ 则用于标识我们研究的是哪个类空超曲面。
ADM 4-动量可以做 3+1 分解，由于它既是 $\mathscr{T}^\star_{SPI}$ 中的元素，又是 $V^\star_{i^0}$ 中的元素，因此对它的 $3+1$ 分解可借类空超曲面在 $i^0$ 处的法矢进行，$P_a n^a$ 即为分解出的能量部分（注意：前面我们其实已经证明了 $\mathscr{T}_{SPI}$ 和 $V_{i^0}$ 有一个同构，所以这里利用 $n^a$ 对 $P_a$ 做 3+1 分解也可以被视为使用 $\mathscr{T}_{SPI}$ 中对应时间平移的 $\xi^a$ 进行分解）。这可以理解为：当我指定了类空超曲面 $\Sigma$，我相当于找到了一组特殊的观者：他们的世界线处处与 $\Sigma$ 垂直。这些观者在无穷远处的四速度就是法矢 $n^a$，所以我们可以说这样分解出来的 ADM 能量是这组特殊观者观测到的时空总能量（或者说：由时间平移对称性生成的守恒量就是总能量）。而对于 Bondi 动量我们不能这么说，因为类光超曲面在无穷远处的法矢是类光的，并且法矢在无穷远处的极限并非躺在 $\mathscr{I}$ 上的 $\hat{\xi}^a$。所以我们在定义 Bondi 能量时也要指定两个东西：一个是无穷小平移对称性 $\xi^a$，有个是截面 $C$。取定 $\hat{\xi}^a \in \mathscr{T}_{BMS}$，并设两个超曲面 $N_1, N_2$ 对应的截面是 $C_1, C_2$（“推迟时间” $u_2 > u_1$
），那么必有

$$E_{\hat{\xi}}(C_1) - E_{\hat{\xi}}(C_2) = \int_V f$$

其中 $V$ 是 $\mathscr{I}^+$ 上介于 $C_1, C_2$ 之间的三维开域，$f$ 是恒正的函数。这确保了引力波带走的能量一定为正。最后，可以证明 $\mathscr{T}_{BMS}$ 和 $V_{i^0}$ 有一个同构，设 $\hat{\xi}^a$ 和 $\hat{n}^a$ 可以通过这个同构联系起来，设 $V_1$ 是 $\mathscr{I}^+$ 上介于截面 $C_1$ 与 $i^0$ 间的三维开域，那么有：

$$E_{\hat{\xi}}(C_1) - E_{\hat{n}} = -\int_{V_1} f$$

这进一步验证了我们的想法：Bondi 动量确实去除了那些被引力波带走，从而世界线再也“追不上”类光曲面的能量。换言之，如果我们能将 $C_1$ 逐渐趋近于 $i_0$，则 Bondi 能量会逐渐趋近于 ADM 能量。

## 正能定理

在牛顿引力论中，引力系统的总能量必定为负。然而，按照广义相对论的结果，若体系有负的能量，则系统内的物体间将相互排斥，而且这似乎意味着系统的能量没有下界，人们可以从其中无穷无尽地获取能量，所以这使得人们猜测广义相对论中孤立体

系的能量必定为正。在满足某些条件时（时空没有奇性；主能量条件，大致可以说是所有观者观测到的物质场的能量都非负）时，这一定理成立（正能定理）。