它有性质: $K([A,B],C)=K(A,[B,C])$. 此外, 它显然是对称的, 双线性映射. 它给出可能成为 $\mathfrak{g}$ 上度规. "Cartan度规". *但非退化需要 $\mathfrak{g}$ 为半单Lie代数.

可使用结构张量表出K: $K_{ab}A^aB^b = A^aC^c{}_{ab}\, B^bC^d{}_{bc}$ $\Rightarrow K_{ab}= C^c{}_{ad}C^d{}_{bc}$

Cartan度规的一个作用是给结构tensor降指标.

Thm. 6-8-7. $C_{\rho\mu\nu}=C_{[\rho\mu\nu]}$.

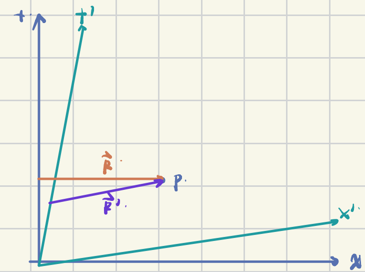
Pf. 结构常数本身对后两个下标反称. 从而只需证明 $C_{\rho\mu\nu}=-C_{\mu\rho\nu}$.

$$C_{\rho\mu\nu}=K_{\rho\sigma}C^\sigma{}_{\mu\nu}=K[E_\rho,E_\sigma]\,C^\sigma{}_{\mu\nu}=K[E_\rho,\ C^\sigma{}_{\mu\nu}E_\sigma]=K[E_\rho,[E_\mu,E_\nu]].$$

从而只需证: $K(E_\rho,[E_\mu,E_\nu])=-K(E_\mu,[E_\rho,E_\nu])$

$$=K(E_\mu,[E_\nu,E_\rho])=K([E_\mu,E_\nu],E_\rho).\quad\square$$

The Proper Lorentz Group & The Lorentz Algebra



下面考虑简单的Lorentz变换 (约定 $t=t'=0$ 时, 两坐标系原点重合).

$$\begin{cases} t'=\gamma(t-vx), \\ x'=\gamma(x-vt), \\ y'=y,\quad z'=z. \end{cases}\qquad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

容易将Lorentz变换写成矩阵形式: 令 $v=\tanh\lambda$.

$$\Rightarrow B_x(\lambda)=\begin{bmatrix} \mathrm{ch}\lambda & -\mathrm{sh}\lambda & & \\ -\mathrm{sh}\lambda & \mathrm{ch}\lambda & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

下面我们考虑放宽限制, 不要求相对速度沿x方向. 以 e_1, e_2, e_3, e_1', e_2', e_3' 分别代表两个坐标系的空间标架基矢. 从而有:

$\vec r=x\vec e_1+y\vec e_2+z\vec e_3$. $\vec r'=x'\vec e_1'+y'\vec e_2'+z'\vec e_3'$ $\vec r$与$\vec r'$分别处于不同坐标系的空间, 因此不好直接比较. 为解决这一点, 可以构造一个3D抽象的矢量空间 V, 以 $\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3$ 作为 V 内的正交归一基矢, 重新记 $\vec r=x\vec e_1+y\vec e_2+z\vec e_3$, $\vec r'=x'\vec e_1+y'\vec e_2+z'\vec e_3$.

同样地, 在x系中测得的x'系的速度也表示在 V 中: $\vec v=v\,\vec e_1$. 利用处于同一抽象空间中的 $\vec r$, $\vec r'$, $\vec v$ 可以将Lorentz变换改写为:

$$\begin{cases} t'=\gamma(t-\vec v\cdot\vec r). \\ \vec r'=\vec r+\vec v\left[\dfrac{(\gamma-1)(\vec v\cdot\vec r)}{v^2}-\gamma t\right]. \end{cases}$$

为了作此推广，(保证速度并不指向 x、x' 系的 x 轴)，只需对 x、x' 系作相同的转动。从而 r、r'、v 都受 1 个正交变换，这相当于 r、r'、v 也都做了一个正交变换。

然而转动的保内积性使 $\vec r\cdot\vec r$、v^2 等都不变。因此这时用矢量表述的 Lorentz 变换仍成立。注意此时 $v = v_1\vec{e_1} + v_2\vec{e_2} + v_3\vec{e_3}$。

以上并非"完全版的"/"最复杂的" Lorentz 变换，还可以放松其他约束，e.g. 使两系之间的轴并不平行。这只需要将 x 系的轴绕过原点任意轴旋转任意角。从而只需要多乘一个转动阵。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boxed{\hat R \in SO(3)} \end{bmatrix}$$

此外，不满足两系原点在 $t=t'=0$ 重合的洛变称为非齐次洛变。所有洛变同构于 Lorentz Group $L=O(1,3)$，而齐次+非齐次洛变组成 Poincaré 群。

可利用矩阵对以上推广过程作一个简单描述。设 x、x' 系本由简单 boost 联系，$x' = B_x(v)\cdot x$。而现在对两个系进行相同转动，使 $\tilde x = Rx$，$\tilde x' = Rx'$。

从而直接得出 $B(\vec v) = R\cdot B_x(v)\cdot R^{-1}$。

在本节中，我们只讨论齐次洛变中不包含反射、反演的部分。换言之我们只关心固有洛群 $L_+^\uparrow$。全体转动 $ZD \subset L_+^\uparrow$ 为群，而全体 boost $WZ \subset L_+^\uparrow$ 并非子群。

然而 $WZ_x = \{B_x(\lambda)\} \subset L_+^\uparrow$ 为子群。

Thm G-9-1.

a). $B_x(v) \in WZ_x$，$R \in ZD$ $\Rightarrow$ $R^{-1}B_x(v)R \in WZ$

b). $B(\vec v) \in WZ \Leftrightarrow \exists R \in ZD$，使 $B(\vec v) = R^{-1}B_x(v)R$，$|v| = |\vec v|$。

Thm. G-9-2. 若 x、x' 有伪转动联系，则 $\tilde x = Rx$ 与 $\tilde x' = Rx'$ 之间也有伪转动联系。

Pf. 由于 x、x' 之间有伪转动联系，从而有 $x' = B(\vec v)\cdot x = R_0^{-1}B_x(v)R_0 x$。

$$\tilde x' = RR_0^{-1}B_x(v)R_0 x = (RR_0^{-1})B_x(v)(R_0R^{-1})\tilde x \qquad \square$$

Thm. G-9-3. $\forall B(\vec v) \in WZ$，$R \in ZD$ 有：$B(\hat R\vec v) = RB(\vec v)R^{-1}$。注：$\hat R$ 指 3×3 旋转矩阵，R 指 $\begin{bmatrix}1 & \\ & \hat R\end{bmatrix}$。

证：设 x、x' 为两个惯性系中的坐标分量，它们有伪转动联系：$x' = B(\vec v)\cdot x$。若现在将两个坐标系同转一下，$\tilde x = Rx$，$\tilde x' = Rx'$。

在转后，$\vec v$ 应使用 $\tilde x$ 系的空间坐标基底展开，从而分量会发生变化。此时 $\tilde x$、$\tilde x'$ 之间的联系应写为：$\tilde x' = B(\tilde{\vec v})\cdot\tilde x$

而坐标系发生变换后，矢量分量的变换关系为 $\tilde{\vec v} = \hat R\vec v$ $\Rightarrow$ $\tilde x' = B(\hat R\vec v)\cdot\tilde x$ $\Rightarrow$ $B(\hat R\vec v) = RB(\vec v)R^{-1}$。

Thm. G-9-4 (分解定理)。$\forall \Lambda \in L_+^\uparrow$，$\exists$ 唯一的 $B(\vec v) \in WZ$，$R \in ZD$，使 $\Lambda = B(\vec v)\cdot R$。

Pf. 对于洛伦兹群的群元，由其保闵氏度规的性质有: $\eta_{\sigma\rho} = (\Lambda^T)_\sigma{}^\mu \eta_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\rho = \Lambda^\mu{}_\sigma \eta_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\rho$

$$\begin{cases} \text{令 } \sigma=\rho=0 \Rightarrow (\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_i (\Lambda^i{}_0)^2 = 1. \\ \text{令 } \sigma=0,\ \rho=i \Rightarrow \Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_i - \sum_j \Lambda^j{}_0\Lambda^j{}_i = 0. \\ \text{令 } \sigma=i,\ \rho=k \Rightarrow -\Lambda^0{}_i\Lambda^0{}_k + \sum_j \Lambda^j{}_i\Lambda^j{}_k = \delta_{ik}. \quad (*) \end{cases}$$

特别地若 $\Lambda\in WZ$. 则只需 $B(\vec v)=\Lambda$. $R=I$. 利用洛变矩阵形式. 此时有 $\Lambda^0{}_0=\gamma$. $\Lambda^i{}_0=-\gamma v^i$ $\Rightarrow$ 推出, $v^i = -\Lambda^i{}_0/\Lambda^0{}_0$.

再考虑. 若 $\Lambda\notin WZ$. 构造相应的 $B(\vec v)$. 仍与以上推导情形相同. $\|v\|^2 = \dfrac{\sum(\Lambda^i{}_0)^2}{(\Lambda^0{}_0)^2} < 1$. 这也是一个保证满足速度条件. $\Rightarrow R = B^{-1}(\vec v)\cdot\Lambda = B(-\vec v)\cdot\Lambda$.

使用矩阵运算，容易直接验证 $R=\begin{bmatrix}1&\\&\tilde R\end{bmatrix}$ 为转动阵. 最主要关系验证 $\sum_j R^j{}_i R^j{}_k = \delta^i_k$. 由于 $R=B(-\vec v)\cdot\Lambda$. 从而R为洛群元. $R^0{}_i = R^i{}_0 = 0$ 是容易直接验证的，

由(*)式立刻看出R为转动阵.

以上完成了构造. 下证唯一性. 设 $\Lambda = B(\vec v)\cdot R = B(\vec v')\cdot R'$. 应证 $\vec v=\vec v'$. $R=R'$.

$$\Rightarrow B(\vec v') = B(\vec v)\cdot R\cdot R'^{-1} = B(\vec v)\cdot\bar R \qquad B^0{}_0(\vec v') = B^0{}_0(\vec v)\cdot\bar R^0{}_0 + \sum_i \cancel{B^0{}_i(\vec v)\cdot\underbrace{\bar R^i{}_0}_{=0}} = B^0{}_0(\vec v) \Rightarrow \gamma=\gamma'.$$

$$B^i{}_0(\vec v') = B^i{}_0(\vec v)\cdot\bar R^0{}_0 + \sum_j B^i{}_j(\vec v)\cdot\bar R^j{}_0 = B^i{}_0(\vec v) \Rightarrow -\gamma' v'^i = -\gamma v^i \Rightarrow v'^i = v^i \Rightarrow B(\vec v) = B(\vec v').$$ 自然有 $R=R'$. $\square$

Thm. G-9-4* (分解定理之另一形式). $\forall\Lambda\in L_+^\uparrow$. $\exists$唯一的 $\tilde R\in ZD$. $B(\vec w)\in WZ$. 使 $\Lambda=\tilde R\, B(\vec w)$. (这一定理与上一定理顺序相反.

并且有. $\tilde R = R$. $\vec v = R\vec w$.

Pf. 我们利用与(G-9-4)不同的证明方式. 由于 $\Lambda\in L_+^\uparrow \Rightarrow \Lambda^{-1}\in L_+^\uparrow$. 由Thm. G-9-4. $\exists$唯一 $\tilde R\in ZD$. $B(-\vec w)\in WZ$. 使 $\Lambda^{-1} = B(-\vec w)\cdot\tilde R^{-1} \Rightarrow \Lambda = \tilde R\, B(\vec w)$.

而 $\Lambda = B(\vec v)\cdot R = \tilde R\cdot B(\vec w) \Rightarrow B(\vec v) = \tilde R\cdot B(\vec w)\cdot R^{-1} = \tilde R\cdot B(\vec w)\cdot\tilde R^{-1}\cdot\tilde R\cdot R^{-1} = \tilde R\cdot B(\vec w)\cdot\tilde R^{-1}\cdot R_1 = B(R\vec w)\cdot R_1$.

这可以视为洛变 $B(\vec v)$ 有两种分解. $B(\vec v) = B(\vec v)\cdot I = B(R\vec w)\cdot R_1$. $\Rightarrow \vec v = R\vec w$, $R_1 = I\ (\tilde R = R)$.

最后. 若 $\Lambda\in L_+^\uparrow$ 有两个不同分解. $\Lambda = RB(\vec w) = R'B(\vec w')$. 则必导致, $\Lambda^{-1} = B(-\vec w)\cdot R^{-1} = B(-\vec w')R'^{-1}$. 这与G-9-4矛盾. $\square$.

Thm. G-9-5. (伪转动何时可构成群). 设 $B(\vec v)\cdot B(\vec u)\in WZ$. 且 $\vec u\neq 0$. $\vec v\neq 0$. 则: $B(\vec v)\cdot B(\vec u)\in WZ \Leftrightarrow \vec v$ 与 $\vec u$ 平行.

Pf. 由前面的讨论可知. $B(\vec v) = R_1^{-1}B_x(v)\cdot R_1$. $B(\vec u) = R_2^{-1}B_x(u)\cdot R_2$

$\Rightarrow \vec v = |\vec v|\cdot R_1^{-1}\vec e_1$. $\vec u = |\vec u|\cdot R_2^{-1}\vec e_1$ 由于 $\vec u\parallel\vec v$ $\Rightarrow$. 可令 $\vec u = \alpha\vec v$.

$\alpha\vec v = |\vec u|\cdot R_2^{-1}\vec e_1 \Rightarrow \alpha\cdot|\vec v|\cdot R_1^{-1}\cdot\vec e_1 = |\vec u|\cdot R_2^{-1}\cdot\vec e_1$. 从而: $R\vec e_1 = \alpha\frac{v}{u}\vec e_1$. $R = R_1R_2^{-1}$

由于转动阵R的保长度特性. $\alpha\cdot v/u = \pm1$.

$B(\vec v)\cdot B(\vec u) = R_1^{-1}\cdot B_x(v)\cdot R_1R_2^{-1}\cdot B_x(u)\cdot R_2 = R_1^{-1}\cdot B_x(v)\cdot R\cdot B_x(u)\cdot R_2 = R_1^{-1}B_x(v)\cdot R\cdot B_x(u)\cdot R^{-1}\cdot R_1 = R_1^{-1}\cdot \underline{B_x(v)\cdot B_x(u\cdot R\cdot\vec e_1)}\cdot R_1 = R_1^{-1}\cdot B_x(v)\cdot B_x(\pm u)\cdot R_1 = R_1^{-1}\cdot B_x(\pm w)\cdot R_1\in WZ$.

下面讨论 Lorentz 代数。在前文讨论过，Lorentz Group 的 Lie Alg 应满足 $A^T = -\eta \cdot A \eta$ $\Rightarrow \eta A$ 为反对称阵。

以 $\mathcal{R}$ 代表形如 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^1{}_2 & r^1{}_3 \\ 0 & -r^1{}_2 & 0 & r^2{}_3 \\ 0 & -r^1{}_3 & -r^2{}_3 & 0 \end{bmatrix}$ 这样的矩阵。

以 $\mathcal{B}$ 代表形如 $\begin{bmatrix} 0 & b^0{}_1 & b^0{}_2 & b^0{}_3 \\ b^0{}_1 & & & \\ b^0{}_2 & & 0 & \\ b^0{}_3 & & & \end{bmatrix}$ 这样的矩阵。

不难看出 $\mathcal{R}$ 与 $\mathcal{B}$ 均为 $\mathcal{O}(1,3)$ 的子空间。进而有一结论，$[r_i, r_j] = \varepsilon^k{}_{ij} r_k$。从而 $\mathcal{R}$ 为 $\mathcal{O}(1,3)$ 的 sub-Lie Alg。而 $\mathcal{B}$ 并非。

从命名上我们不难看出，cal(R) 应生成 ZD，而 cal(B) 生成 WZ。有下列定理。

Thm. G-9-6. $\mathcal{R}$ 为 ZD 的 Lie Alg.

Pf. 首先，$\dim \mathcal{R} = 3$，$\dim ZD = 3$。

其次，证对于 $\forall r \in \mathcal{R}$，$\exists$ ZD 中过 e 的曲线，其在 e 处的切矢为 r。

$r \in \mathcal{R}$ 保证 r 可写成分块矩阵，$r = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{r} \end{bmatrix}$，其中 $\hat{r} \in \mathcal{O}(3)$。又根据矩阵指数的定义，可验证 $Exp(tr) = \begin{bmatrix} 1 & \\ & Exp(\hat{r}) \end{bmatrix}$ $\Rightarrow Exp(tr) \in ZD$.

还需证明 $\forall$ ZD 中过 e 的单参子群，其在 e 处切矢均在 $\mathcal{R}$ 中，这是容易证明的。

Thm.（补）$b_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$ 是 $B_x(\lambda) \in WZ$ 这一单参子群的生成元。换言之，$B_x(\lambda) = Exp(\lambda \cdot b_1)$.

Pf. $Exp(\lambda b_1) = I + \lambda b_1 + \frac{1}{2!}(\lambda b_1)^2 + \frac{1}{3!}(\lambda b_1)^3 + \frac{1}{4!}(\lambda b_1)^4 + \cdots = I + \begin{bmatrix} & -\lambda \\ -\lambda & \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} \lambda^2 & \\ & \lambda^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{bmatrix} & -\lambda^3 \\ -\lambda^3 & \end{bmatrix} + \frac{1}{4!}\begin{bmatrix} \lambda^4 & \\ & \lambda^4 \end{bmatrix} + \cdots = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}$

$p = 1 + \frac{1}{2!}\lambda^2 + \frac{1}{4!}\lambda^4 + \cdots = ch\lambda$. $q = -\lambda - \frac{1}{3!}\lambda^3 - \frac{1}{5!}\lambda^5 = -sh\lambda$. □

Thm. G-9-8. $\forall r \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \exists R \in ZD$，$r \in \mathbb{R}$，使得 $r = \gamma \cdot R^{-1} \cdot r_3 \cdot R$. *在正常情形下，群元 x 代数元是无意义的，这里可以这样操作是由于我们面对的是矩阵群。

*：$r_3 \to r_1 / r_2$ 仍成立。

Pf. 首先从右向左，直接进行矩阵计算有，$r = r \cdot R^{-1} \cdot r_3 \cdot R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\alpha & 0 & 6 \\ 0 & -\beta & -6 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}$.

其次从左向右，令 $r = r_1 r_1 + r_2 r_2 + r_3 r_3$。取 $r = (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^{1/2}$，并令
$$\begin{cases} r_1 = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ r_2 = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ r_3 = r \cos\theta \end{cases}$$
（类似于直角坐标转球坐标）。取 $R = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & c\theta c\varphi & -s\varphi & s\theta c\varphi \\ & c\theta s\varphi & c\varphi & s\theta s\varphi \\ & -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix}^{-1}$.

由矩阵乘法可直接验证，$r = r \cdot R^{-1} \cdot r_3 \cdot R$.

Thm. G-9-8'. $\forall b \in \mathscr{B}$, $\Leftrightarrow \exists R \in ZD$, $\nu \in \mathbb{R}$. 使 $b = \nu R^{-1} b_1 \cdot R$ * $b_1 \to$ b_2/b_3、仍成立、

对于小的问题、直接矩阵乘法即可. 对于从左向右、仍是构造对应的旋转矩阵. 记 $b = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3$. 令 $\mu = (\beta_1^2 + \beta_2^2)^{1/2}$. $r = (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)^{1/2}$. 则 $\mu r \neq 0$.

容易直接验证

$$R = \begin{bmatrix} \mu r & & & \\ & r\beta_1 & r\beta_2 & r\beta_3 \\ & r\beta_2 & -r\beta_1 & 0 \\ & \beta_1\beta_3 & \beta_2\beta_3 & -\mu^2 \end{bmatrix} \in ZD.$$

以及 $b = \nu R^{-1} b_1 R$.

Thm. G-9-7. $R \in ZD \Leftrightarrow \exists r \in \mathscr{R}$ 使得 $R = \mathrm{Exp}(r)$.

($\Leftarrow$) 在前面我们已讨论过, ZD 的 Lie. Alg 为 $\mathscr{R}$. 从而这一方向一定正确.

($\Rightarrow$) ZD 同构于 SO(3). 保证 ZD 为紧致的连通流形. 这保证其 Exp(·) 是满射上的

Thm. G-9-7'. $B \in WZ \Leftrightarrow \exists b \in \mathscr{B}$ 使 $B = \mathrm{Exp}(b)$.

($\Rightarrow$). $B \in WZ$ 又等价于. $B = R^{-1} B_x \cdot R = R^{-1} \cdot \mathrm{Exp}(\nu b_1) \cdot R = \mathrm{Exp}(\nu R^{-1} b_1 R)$. 只需验证 $\nu R^{-1} \cdot b_1 \cdot R$ 总有 $\in \mathscr{B}$. 而这已在 G-9-8' 中验证过.

($\Leftarrow$). 由 G-9-8'. $B = \mathrm{Exp}(b) = \mathrm{Exp}(\nu R^{-1} b_1 R)$. 这蕴含了 $B \in WZ$.

下面, 我们借用 Killing 场讨论李代数. Poincare 群的 Lie. Alg. $\mathscr{P}$ 同构于 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 上全体 Killing 场集合 $\mathscr{K}$. 此时我们仅讨论固有 Lorentz 群. 因此只考虑由 6 个基矢 ξ_{b_i}. ξ_{r_i} 生成的子空间 $\mathscr{K}_L$. 它在 Lie bracket 下封闭. 从而 $\mathscr{K}_L$ 是 sub-Lie Alg.

以 $b_i \to \xi_{b_i}$. $r_i \to \xi_{r_i}$ 定义线性映射 $\psi: \mathcal{O}(1,3) \to \mathscr{K}_L$. 则 ψ 为 Lie-Alg 同构.

Thm. G-9-10. 以 X, $\partial/\partial x$ 代表由 $\{t, x, y, z\}$ 的 4 个坐标和 4 个坐标基矢排列而成的列矢量. 则:

$\xi_{r_i} = -X^T \cdot r_i^T \frac{\partial}{\partial x}$. $\xi_{b_i} = -X^T b_i^T \frac{\partial}{\partial x}$.

Pf. 证明是简单的. 直接计算验证即可: $-X^T r_1^T \frac{\partial}{\partial x} = -y \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial y} = \xi_{r_1}$.

使用 $\mathscr{K}_r$, $\mathscr{K}_b$ 分别代表以 $\{\xi_{r_i}\}$, $\{\xi_{b_i}\}$ 张成的子空间. $\mathscr{K}_r$ 是 $\mathscr{K}_L$ 的 sub-Lie-Alg. 而 $\mathscr{K}_b$ 则并非.

Thm. G-9-11. 设 $\mathscr{K}_r$ 是借助惯性 $X = \{t, x, y, z\}$ 定义. 则 $\forall \xi \in \mathscr{K}_r$. $\exists r \in \mathbb{R}$. 以及与 x 同属一个惯性参考系的惯性系 $\tilde{x} = \{\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\}$. 使得 $\xi = r(\tilde{y} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} - \tilde{z} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}})$

Pf. 对 $\xi \in \mathscr{K}_r \Rightarrow \exists \rho$. 使 $\xi = \rho^i \xi_{r_i}$ $\Rightarrow \xi = \rho^i X^T r_i^T \frac{\partial}{\partial x} = X^T (\underbrace{\rho^i r_i}_{r})^T \frac{\partial}{\partial x} = X^T (r R^{-1} r_3 R) \frac{\partial}{\partial x} = r (X^T R^{-1}) r_3 (R \frac{\partial}{\partial x}) = r (RX)^T r_3 (R \frac{\partial}{\partial x})$ *坐标基矢变换与坐标变换互逆, 已在前面讨论过

$= r \tilde{X}^T r_3 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = r \xi_{r_3} = r(\tilde{y} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} - \tilde{z} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}})$. □

Thm. G-9-11'. 上面讨论了 $\mathscr{K}_r$ 中的元素, 对于 $\mathscr{K}_b$ 中的元素也有类似的结论.

— — The End — —