Poincaré Group / $P(n)$ Group

$(\mathbb{R}^n, \eta_{ab})$ 之等度规群.

Structure Constant of Lie Algebra.

Lie bracket 是 $\mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ 的双线性映射. 从而它可用 $\mathcal{V}$ 上 $(1,2)$ 型张量表达. 下面我们记 $[v,u]^c = C^c{}_{ab}v^a u^b$. $C^c{}_{ab}$ 称为结构张量.

Thm. G-6-1. 结构张量有如下性质:

a). $C^c{}_{ab} = -C^c{}_{ba}$

b). (用Jacobi 恒等证明). $C^c{}_{a[b}C^a{}_{de]}=0$.

若在 $\mathcal{V}$ 上选择一组基底, 我们有 $[(e_\mu)^a, (e_\nu)^a] = C^\sigma{}_{\mu\nu}(e_\sigma)^a$. $C^\sigma{}_{\mu\nu}$ 称为结构常数. 它与基底选择有关. 可证明. 给定一组合适的数. 必存在 Lie Group. 使这组数为其结构常数.

e.g. Lie Group 为加法群 $\mathbb{R}^2$. $(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$, 对于此群 不难证明:

1). 过 e 的直线为单参子群. 反之亦然.

2). $\mathbb{R}^2$ 上任一左不变矢场. $\bar{A}$ 满足 $\partial_a\bar{A}^b=0$. 从而 $[\bar{A},\bar{B}]=0$. $\to C^c{}_{ab}=0$

e.g. $\mathscr{g}\mathcal{O}(3)$. 3个最简单的单参子群为绕 x, y, z 轴转某角. $Z_x(\alpha)$. $Z_y(\alpha)$. $Z_z(\alpha)$. 它们对应的切矢. A_1 A_2, A_3 有关系. $[A_i, A_j] = \epsilon^k{}_{ij}A_k$.

e.g. $\mathcal{O}(1,3)$. 可给出其6个最简单的单参子群: 三个转动群. 三个 boost. 有对易关系: $[r_i, r_j] = \epsilon^k{}_{ij}r_k$. $[b_i, r_j] = \epsilon^k{}_{ij}b_k$. $[b_i, b_j] = -\epsilon^k{}_{ij}r_k$.

e.g. $\mathscr{g}U(2)$. 它是三维的. 只需找3个基(反厄米无迹矩阵). 处理 1/2 自旋粒子时我们有3个 Pauli 阵. $\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\tau_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ $\tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. 3个均为厄米阵.

记 $E_i = -\frac{i}{2}\tau_i$. 有 Lie 括号. $[E_i, E_j] = \epsilon^k{}_{ij}E_k$. 从而令线性映射 ψ: $\mathscr{g}U(2)\to\mathscr{g}\mathcal{O}(3)$. 满足 $\psi(E_i)=A_i$. 不难验证 ψ 保持 Lie 括号. 从而 $\mathscr{g}U(2) \cong \mathscr{g}\mathcal{O}(3)$.

但并不意味着 SU(2) 与 SO(3) 的同构. 实际上 这样的同构不存在. 但存在 π: $SU(2)\to SO(3)$ 2-1 投影映射 使 SU(2) 中 2个 $\to$ SO(3) 中 1个. 下面对比二者.

* 还有类似例子: $SL(2,\mathbb{C})$ 与 $L_+^\uparrow$ 有相同 Lie Alg. 但两者不等. 只有 2→1. 的投影映射. $SL(2,\mathbb{C}) \to L_+^\uparrow$

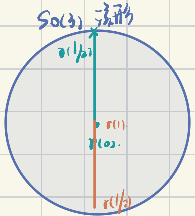
下面研究 SU(2) 流形. 考虑 $U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. 由于 $U^\dagger U = I$. $\det(U)=1$. U 可写为 $\begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$. s.t. $a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2=1$. 从而 SU(2) 的流形是 $\mathbb{R}^4$ 中 3D 球面

而前文已提过. SO(3) 可视作"绕某轴转某角". 其流形为半径为 π 的 3D 实心球体.

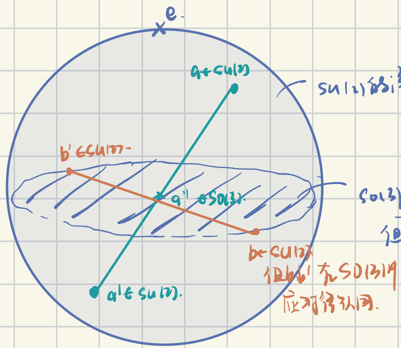
不难注意到. SU(2) 是单连通. (任一曲线可通过连续变形缩为一点). 而 SO(3) 并非

一个流形上有两条曲线. 若一条曲线可以经由连续变形成为另一条. 则称这两条曲线同伦.

显然. 单连通流形只有一个同伦类.



这条曲线不可缩至一点. 不能连续变到它与竖线同伦.



SU(2)的流形. 由于$S^3 = S^2 \times S^1$. 故我们只画S^2.
其上每一点均为是S^1(一个圆环)

SO(3)的流形. 同样仅可看到一个球
但要作对径认同.

从图中可以直接看出"二对一"的映射关系.

Lie Groups of Transformation. Killing Vector Field.

Lie 变换群是对单参群的推广. 所以先复习单参群. $\phi: \mathbb{R}\times M \to M$. 为单参群. 则:

a). $\forall t$ ϕ_t为微分同胚.

b). $\forall t, s \in \mathbb{R}$. $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$.

$\forall p \in M$. $\phi_\cdot(p)$ 是 $\mathbb{R}^1 \to M$ 映射, 即为一条曲线, 并且还是可以任意延拓的完备曲线. 一个单参群(因此诱导出)自然诱导出一个光滑矢量场. 同样地, 一个光滑完备矢量场诱导一个单参群.
对不完备的可诱导出单参局部群.

Def 2.2 设G为Lie群, M为流形, C^∞映射: $G\times M \to M$. 称作M上Lie变换群, 若:

a). $\forall g \in G$. $\sigma_g: M \to M$为微分同胚.

b). $\sigma_{gh} = \sigma_g \circ \sigma_h$. $\forall g, h \in G$. 这意味着G与$\{\sigma_g: M\to M \mid g \in G\}$有群同态.

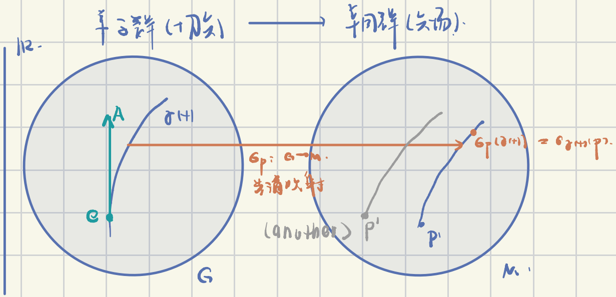
从而称 $G \to \{\sigma_g\}$ 的群同态为 G(在M上的)实现(Realization). 若此同态为同构, 则称这一实现是忠实(faithful)实现.

e.g. 每一个 $g \in G$. 都对应一个左平移 $L_g: G \to G$. / $\{\sigma_g: M \to M, M = G, g \in G\}$. 从而 $G \to \{L_g \mid g \in G\}$ 是G的忠实实现.

Def. 李群的表示(representation)是一种特殊的实现. 若M是矢量空间. Lie变换群为线性变换. 此时称M为表示空间. 特别地, 忠实实现 → 忠实表示.

下面设 $\gamma: \mathbb{R} \to G$ 为 G中由$\exp(tA)$给出的单参子群. 将变换群: $\{\sigma_g \mid g \in G\}$ 中g的取值范围作一限制. $\longrightarrow$ $\{\sigma_{\gamma(t)} \mid t \in \mathbb{R}\}$. 它为M上单参群
在M上有单参群, 则必可诱生M上矢量场. 下面找它与A的关系.

$\xi_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \sigma_p(\gamma(t)) = \sigma_{p*} \frac{d}{dt}\gamma(t) = \sigma_{p*} A$ (σ_p为该群 $G \to$ 流形M 之映射). 从而, 只需给定Lie变换群 $G\times M \to M$. 即可指定 V_e到M上矢量场的映射.



下面举一个例子：设 M 是带有度规 g_{ab} 的流形，G 为 (M, g_{ab}) 的等度规群（G 中的每一个元都是 M 上的一个 Isometry）。

定义 Lie 变换群 $\sigma_g = g$，$\forall g\in G$。则 $\sigma_g: M\to M$ 为 Isometry。

G 的每一单子群 $\gamma(t)$ 诱导的单同群 $\{\sigma_{\gamma(t)} \mid t\in\mathbb{R}\}$ 成为 M 上的单参等度规群，it 对应 (M, g_{ab}) 上 Killing 场。

从而 χ 的映射应视作 $V_e\to \mathcal{K}$，由于 Lie 括号保持 Killing 场的，从而 $\mathcal{K}$ 为 Lie 代数。

可以证明有如下关系：$\chi([A,B]) = -[\chi(A), \chi(B)]$。定义 $\psi(A) = -\chi(A)$，从而立刻有 $\psi([A,B]) = [\psi(A), \psi(B)]$，$\psi$ 为 Lie Alg. 同态。

特别地，若 M 上的每个 Killing 场都为完备 Killing 场，则每一个 Killing 场都对应一个单参等度规群，从而 $\psi: V_e\to\mathcal{K}$ 为同构。

反之，不完备 Killing 场的单参等度规局部群也有 但这不一定能被 为等度规群 (这也好对比，总有 $p\in M$ 使 p 不存在下去像)，从而 $\dim G$ 减少，$\dim\mathcal{K}$ 不变，二者不同构。

e.g. 考虑 $(\mathbb{R}^2, \delta_{ab})$ 的 $y>0$ 部分构成，则 $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a$，$y\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a - x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a$ 均不完备，从而 $\dim G = 1$。这一结果可以如下表述：

Thm. G-7-2. (M, g_{ab}) 的等度规群的 Lie Alg. 同构于其上全体 Killing 场 $\mathcal{K}$ 的子 Lie Alg.。特别地，在每一个 Killing 场均完备时有 $V_e = \mathcal{K}$

从而，利用 Killing 场的对易子，可直接计算与之同构的 Lie Alg 的结构常数，下举例。

Eg. 计算 $SO(3)$ 的 Lie Alg. 的结构常数。显然，我们已知 $(\mathbb{R}^3, \delta_{ab})$ 中嵌入的球面 (S^2, h_{ab}) 的等度规群为 $SO(3)$。由于其 Lie Alg. 与球面上 Killing 场同构，因此全找到三个独立的 Killing 矢量场（纬出 y 轴作为例）。

$$\begin{cases}\xi_1 = \sin\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^a + \cot\theta\cos\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^a \\ \xi_2 = -\cos\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^a + \cot\theta\cdot\sin\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^a \\ \xi_3 = \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^a\end{cases}$$

直接计算对易子有：$[\xi_i, \xi_j] = \epsilon_{ijk}\xi_k$。

从而不难得出，只需 $V_e\to\{\xi\}$ 的映射 ψ。

Eg. 2D Euclidean Space 上等度规群

$\xi_{t_1} = -\partial/\partial x$，$\xi_{t_2} = -\frac{\partial}{\partial y}$，$\xi_r = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$，非常容易给出它们的对易子：$[\xi_{t_1}, \xi_{t_2}]=0$，$[\xi_r, \xi_{t_1}] = \xi_{t_2}$，$[\xi_r, \xi_{t_2}] = -\xi_{t_1}$、

Eg. 4D 闵氏上的等度规群（Poincaré 群）。

$$\begin{cases}\xi_{t_0} = -\frac{\partial}{\partial t}, & \xi_{t_1} = -\frac{\partial}{\partial x}, & \xi_{t_2} = -\frac{\partial}{\partial y}, & \xi_{t_3} = -\frac{\partial}{\partial z}, \\ \xi_{r_1} = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}, & \xi_{r_2} = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}, & \xi_{r_3} = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} \\ \xi_{b_1} = t\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial t}, & \xi_{b_2} = t\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial t}, & \xi_{b_3} = t\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial t},\end{cases}$$

自然计算所有对易子有： ....

Joint Representations & Killing Form.

设 V 为考虑实矢空间 m. $\dim V = m$. 记 V 上线性映射 $\mathcal{L}(V) = \{$线性映射 $\psi: V \to V\} = \{V$ 上 (1,1) 型 Tensor $\psi^a{}_b\}$. 显然 $\mathcal{L}(V) = \mathscr{GL}(m, \mathbb{R})$. 复合映射作为 $\mathcal{L}(V)$ 的乘法.

并且可以在上面定义 Lie bracket. $[\psi, \varphi] = \psi\varphi - \varphi\psi$.

Def. 1 称 Lie Alg. 的同态映射： $\beta: \mathscr{G} \to \mathcal{L}(V)$ 为 $\mathscr{G}$ 的表示.

在前面我们讨论过一般群上的伴随同构. $I_g(h) = ghg^{-1}$. 不难看出 $I_g(e) = e$. $I_{g*}: V_e \to V_e$. 下面以 Ad_g 代表由伴随同构诱导的 $V_e \to V_e$ 推前映射. ($\mathscr{G} \to \mathscr{G}$)

注： $Ad_g(A)$ 一般不等于 A.

Thm. G—8-2. $\mathscr{G}$ 为 G 的 Lie Alg. 则 $\forall g \in G$. $A \in \mathscr{G}$ 有： $\exp(t \cdot Ad_g(A)) = g \cdot \exp(tA) g^{-1}$.

Pf. 不难看出 $\exp(t \cdot Ad_g(A))$ 与 $g \cdot \exp(tA) \cdot g^{-1}$ 均为 G 的单参子群. 下只需证它们在原点处有相同切矢.

右侧切矢 $= \frac{d}{dt}[g \cdot \exp(tA) \cdot g^{-1}] = \frac{d}{dt}[I_g \cdot \exp(tA)] = I_{g*}\left[\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tA)\right] = Ad_g(A)$. □

不难验证 $Ad_g(\mathscr{G}) \in \mathcal{L}(\mathscr{G})$. 从而 $Ad: G \to \mathscr{G}$ 上线性映. ($= GL(m, \mathbb{R})$) ※ 由于 φ 为微分同胚，从而 ϕ_* 为线性同构.

我们想证明 Ad 是同态映射 从而 Ad 是 Lie 群的一种表示. 这种表示称作伴随表示.

Pf. $Ad_{gh} = I_{gh*} = (I_g \circ I_h)_* = I_{g*} \circ I_{h*} = Ad_g \circ Ad_h$. □

下面继续介绍与伴随有关的映射.

· 定义 $ad_A: \mathscr{G} \to \mathscr{G}$, $A \in \mathscr{G}$. $ad_A(B) = [A, B]$. 它也是线性映射. 而且还有性质： $ad_{\alpha A_1 + \beta A_2} = \alpha\, ad_{A_1} + \beta\, ad_{A_2}$.

可以用抽象指标表示. $(ad_A)^c{}_b B^b = [A, B]^c = C^c{}_{ab} A^a B^b$. 换言之 $(ad_A)^c{}_b = A^a C^c{}_{ab}$.

类似地. $ad: \mathscr{G} \to \mathcal{L}(\mathscr{G})$. 这显然映射是线性的.

A, B 均为 $\mathcal{L}(\mathscr{G})$ 中元素. 从而按上面定义计算 Lie 括号. $ad([A,B])(C) = [[A,B],C]$.

$ad_A(ad_B(C)) - ad_B(ad_A(C)) = [A,[B,C]] - [B,[A,C]]$， 由 Jacobi 恒等式知以上二者相等.

从而 ad 是个 Lie 代数同态. 从而称 ad 为 Lie 代数的伴随表示.

考虑到这一空间上的度规为 (0,2) Tensor. 下面我们在 $\mathscr{G}$ 上也定义一个 (0,2) Tensor. let $K: \mathscr{G} \times \mathscr{G} \to \mathbb{R}$. $K(A, B) = tr(ad_A\, ad_B) = ad^a{}_b\, ad^b{}_a$.