常用 Lie Group 与 Lie Alg.

General Linear Group

给定实线性空间 V，我们考虑线性映射 $T: V \to V$。定义 $GL(m)$ 为 $V\to V$ 全体可逆线性映射之集合。群乘法是自然的，即映射之复合。

在 V 上可以选 m 个基底，m 个对偶基底。T 为 V 上 $(1,1)$ 型张量 $T^a{}_b \in \mathscr{T}_V(1,1)$。从而 $T^a{}_b$ 的表示是个 $m\times m$ 的矩阵。不难看出，上面定义的 $GL(m)$ 与下面定义的群同构：

$GL(m) := \{m\times m \text{ 实矩阵 } T \mid \det(T)\neq 0\} \subset \mathbb{R}^{m\times m}$ 取行列式的操作相当于 $\mathbb{R}^{m\times m}$ 上的一个标量场，从而 $GL(m) = \det^{-1}(-\infty,0)\cup \det^{-1}(0,+\infty)\subset \mathbb{R}^{m\times m}$.

在前面我们说一个拓扑空间 X 是连通的，则它应只有两个既开又闭的子集：X 与 $\varnothing$。否则它是不连通的。下面我们证明 $X = GL(m)$ 中既开又闭的子集超过 2 个。

将 det 映射记作 $f:\mathbb{R}^{m^2}\to\mathbb{R}$。从而 $X = f^{-1}[(-\infty,0)\cup(0,+\infty)] = f^{-1}[\underbrace{(-\infty,0)}_{A}]\cup f^{-1}[\underbrace{(0,+\infty)}_{B}]$。$A,B$ 作为 $\mathbb{R}$ 的子集为开，而 f 为多项式 C^0 的连续映射，从而 f 会将开→开。

$\Rightarrow f^{-1}[A]$，$f^{-1}[B]$ 均为 $\mathbb{R}^{m^2}$ 之开子集。(1) 开子集之并仍开，从而 X 为 $\mathbb{R}^{m^2}$ 之开集。

(2) 由诱导拓扑，$f^{-1}[A]$，$f^{-1}[B]$ 均为 $GL(m)$ 之开集。

而 X 全集为 $GL(m)$，则 $f^{-1}[A]$、$f^{-1}[B]$ 互为补集。(3) 从而 $f^{-1}[A]$、$f^{-1}[B]$ 均为 $GL(m)$ 之闭子集。从而易知 $GL(m)$ 上有大于 2 个既开又闭的集合。

所以，$GL(m)$ 是有两个连通分支的非连通流形。

$GL(m)$ 自然诱导 Lie Alg. $\mathfrak{gl}(m)$。结论是它同构于 $\overset{\mathscr{U}=}{\{m\times m \text{ 实矩阵}\}}$ 这一集合。

Pf. 首先，$GL(m)$ 中每一元由 m^2 个实数决定，从而 e 处的切空间为 m^2 维。换言之，G 中 e 之处的一个矢量就对应一个 $m\times m$ 阵。

而给出一个 $m\times m$ 阵，我们可以将 $m\times m$ 阵认作为 e 处切空间之矢量。

还有另外一种方式对其进行推导。设 $A\in\mathbb{R}^{m\times m}$。考虑阵 $\gamma(t) = I + tA$。则 t 足够小时，$\gamma(t)$ 可逆。从而 $\gamma(t)\in GL(m)$，且 $t=0$ 处为恒等元 e。

$\frac{d}{dt}\gamma(t)\big|_{t=0} = A$。从而任一 $m\times m$ 阵 A 都为 $\mathfrak{gl}(m)$ 中的一个元素。

对于这一点，可以将其推广为，$\mathfrak{gl}(m)$ 与 $\mathscr{U} = \{m\times m \text{ 实矩阵}\}$ 有 Lie Alg. 同构。其中 $\mathfrak{gl}(m)$ 上对易子定义为 $[A,B] = [\tilde{A},\tilde{B}]_e$，而 $\mathscr{U}$ 对易子为 $[A,B]$。

下面讨论 $GL(m)$ 上的指数映射。对于任意 $\mathbb{R}^{m\times m}$ 引入符号：$\mathrm{Exp}(A) = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots$ 可证明若 $[A,B]=0$，则 $\mathrm{Exp}(A)\cdot\mathrm{Exp}(B) = \mathrm{Exp}(A+B)$。也称为矩阵指数映射。

Thm. G-5-2. $\forall A\in\mathfrak{gl}(m)$. $\mathrm{Exp}(A) = \exp(A)$.

Pf. 不妨证 $\mathrm{Exp}(tA) = \exp(tA)$。由 $\exp(tA) = \gamma_A(t)$ 可知，只需证明 $\mathrm{Exp}(tA)$ 为由 A 生成的单参子群

由 $Exp[(s+t)A] = Exp(sA)\cdot Exp(tA)$. 取 $s=1$ $t=-1$. 可知 $Exp(A)$ 必有逆，且逆为 $Exp(-A)$. $\Rightarrow Exp(A) \in GL(m)$.

↓ 特别 $Exp(tA)$ 为 $GL(m)$ 上单参子群.

$\frac{d}{dt}\big|_0 Exp(tA) = ((I+tA+\cdots)-I)/t = A$. □

Orthogonal Group

$GL(m)$ 群为 $T: V\to V$，线性可逆。加一些其他限制可得 $GL(m)$ 的一些子群。设 (V, g_{ab}) 为带度规矢量空间，其中 g_{ab} 为一个正定度规。称线性映射 $Z: V\to V$ 保度规，若

$g_{ab}(Z^a{}_c v^c)(Z^b{}_d u^d) = g_{ab} v^c u^d$. 特别地 $u^a=v^b$ 则可看出保度规，以保长度。将所有满足 $g_{ab}Z^a{}_c Z^b{}_d = g_{cd}$ 的 $Z^a{}_b$ 集合记作 $O(m)$.

不难看出若以复合映射为群乘则它为群，且它为 $GL(m)$ 之子群。特别地，取一组正交归一基后，可将保度规条件化写作矩阵形式. $I = Z^T I Z = Z^T Z$. 从而 Z 称为正交阵.

且由于 $\det Z = \det Z^T$，从而 $1=(\det Z)^2 \Rightarrow \det Z = \pm 1$. 从而 $O(m)$ 群必为非连通的.

e.g. 二维情况 $O(2)$. 不难注意到其中必有两个元素 $\vec v = v$ 和 $\vec v = -\vec v$.

$O(2)$ 中它含有两类元素. 一类为刚体旋转 $Z(\alpha) = \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$. 但还有下面一类, $Z'(\alpha) = \begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{bmatrix}$. $Z'(\alpha)$ 代表对某轴的反射.

↳ 这个连通分支含有恒等元 I. 从而它构成 $O(m)$ 的 Lie 子群. 被称为 $SO(m)$ 群

不难想象 $SO(3)$ 是保持原点的任一旋转（绕过原点的某轴转某角的映射）. 其集合可称为 3D 刚体转体. 但每一对 对径点认同.

下面讨论 $O(m)$ 与 $SO(m)$ 的 Lie 代数. $\mathcal{O}(m)$ $\mathcal{SO}(m)$.

Thm G-5-4. $\mathcal{O}(m) = \mathcal{SO}(m) = \{A\in\mathbb{R}^{m\times m} \mid A^T=-A\}$.

Pf. 易知 $\mathcal{SO}(m)\subset\mathcal{O}(m)$. 下证另一侧包含. 取 $\forall A\in\mathcal{O}(m)$, $Exp(tA) \subset O(m)$. $\det(Exp(0A)) = +1$, 而 $\det(\cdot)$ 必须随 t 连续变化. 从而 $\det(Exp(tA)) \equiv 1$.

$\Rightarrow Exp(tA) \subset SO(m) \Rightarrow A \in \mathcal{SO}(m)$.

先证 $A \in \mathcal{O}(m)$ 可认同为一个反称阵. 考虑曲线 $Z(t) \subset O(m)$. $Z(0)=I$. $\frac{d}{dt} Z(t)\big|_0 = A$.

$0 = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}(Z^T(t)Z(t)) = [Z^T(t)\frac{dZ(t)}{dt}]\big|_{t=0} + [\frac{dZ^T(t)}{dt}\cdot Z(t)]\big|_{t=0} = Z^T(0)\cdot A + \frac{d}{dt}Z^T(t)\, Z(0)$, 由于 $Z(0)=I$. $\frac{d}{dt}Z^T(t) = A^T$. 从而 $0=A+A^T$.

而一个单参子群总是过原点的，切矢为 A 的积分曲线. 从而 $\mathcal{O}(m)$ 之元必为反称阵.

再证一个反称阵 A 确实生成 $O(m)$ 之群元. $[Exp(A)]^T[Exp(A)]$.

由于 $(A^2)^T = (A^T)^2$, $(A^3)^T=(A^T)^3$, …… 可导出 $[Exp(A)]^T = Exp(A^T)$. $\Rightarrow [Exp(A)]^T[Exp(A)] = Exp(A^T+A) = Exp(0) = I$. 并且 $\frac{d}{dt}Exp(tA)\big|_{t=0} = A$. □

Lie 群之维数 = 恒等元切空间维数 = Lie Alg 维数. 从而得知 $\dim GL(m) = \dim \mathcal{gl}(m) = m^2$.

$\dim O(m) = \dim SO(m) = \dim \mathcal{O}(m) = \dim \mathcal{SO}(m) = \frac{1}{2}(m^2-m)$.

Lorentz Group.

上面定义正交群时，约定在 V 上配备了正定度规。现在，设 g_{ab} 在正交归一基底下有 m' 个 -1，m'' 个 $+1$ 对角元，则定义保度规群

$O(m', m'') := \{ \Lambda^a{}_b \in \mathcal{T}_V(1,1) \mid \Lambda^a{}_c \Lambda^b{}_d g_{ab} = g_{cd} \}$.　为研究相对论，我们只研究 $O(1,3)$ 群 / Lorentz 群。

如同在研究同伦时，我们使用简化版二维 $\{R^2\}$ 一样，我们先研究 $O(1,1)$ 群。此时，保度规条件写成矩阵形式为 $\eta = \Lambda^T \cdot \eta \cdot \Lambda$（选了正交归一基底）。

行列式：$(-1) = (\det \Lambda)^2 (-1) \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1$.　从而 $O(1,1)$ 群群元的行列式也为 $+1/-1$。从而 $O(1,1)$ 也是非连通的。

注意速度为洛伦兹变换的群元。取 $v = \tanh\lambda$，$\Rightarrow \gamma = (1-v^2)^{-1/2} = \cosh\lambda$。从而以下洛伦兹变换为 $O(1,1)$ 群元：$\begin{bmatrix} ch\lambda & -sh\lambda \\ -sh\lambda & ch\lambda \end{bmatrix}$，但其行列式为 $+1$。

将保度规条件两侧与 $(e_0)^c (e_0)^d$ 作缩并，$\eta_{00} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_0 \Lambda^\nu{}_0 \Rightarrow -(\Lambda^0{}_0)^2 + (\Lambda^1{}_0)^2 = -1$。从而可以说 $(\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1$，$\Rightarrow \Lambda^0{}_0 \begin{cases} \geq +1 \\ \leq -1 \end{cases}$

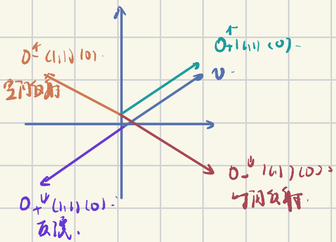
这与对行列式的限制结合，从而生成 4 个连通分支。

$O_+^\uparrow(1,1)$：$\Lambda(\lambda) = \begin{bmatrix} ch\lambda & -sh\lambda \\ -sh\lambda & ch\lambda \end{bmatrix}$.　　$O_-^\downarrow(1,1)$：$\Lambda(\lambda) = \begin{bmatrix} - & + \\ - & + \end{bmatrix}$

$O_-^\uparrow(1,1)$：$\Lambda(\lambda) = \begin{bmatrix} ch\lambda & -sh\lambda \\ sh\lambda & -ch\lambda \end{bmatrix}$.　　$O_+^\downarrow(1,1)$：$\Lambda(\lambda) = \begin{bmatrix} -ch\lambda & sh\lambda \\ sh\lambda & ch\lambda \end{bmatrix}$.

$\uparrow/\downarrow$ 代表 $\Lambda^0{}_0$ 的正负。
而 $+/-$ 代表行列式。

下面看一下这四个分支分别起什么作用。



$O(1,1)$ 的流形为 4 条直线。因为其每个连通分支上，λ 都可取遍 $(-\infty, +\infty)$。但注：$O(n)$ 是紧的，而 $O(1,1)$ 非紧。

$\mathbb{R}^3 \times SO(3)$.

为讨论相对论，我们考虑 $O(1,3)$ Group。它是由 4 个连通分支组成的 6D 非连通流形。根据 $\det\Lambda$ 和 $\Lambda^0{}_0$，仍可像前一样分为 4 个连通分支：$L_+^\uparrow$　$L_-^\uparrow$　$L_-^\downarrow$　$L_+^\downarrow$

$r_s \in L_-^\uparrow$，$r_t \in L_-^\downarrow$，$i_{ts} \in L_+^\downarrow$　分别为 L 的空反，时反，全反演。四个分支中只有 $L_+^\uparrow$ 含恒等元，不难验证它是子群。剩下三个分支是其陪集。

$L_-^\uparrow = r_s L_+^\uparrow$　$L_-^\downarrow = r_t L_+^\uparrow$　$L_+^\downarrow = i_{ts} L_+^\uparrow$。矩阵表示分别为 $[1,1,1,1]$，$[1,-1,-1,-1]$，$[-1,1,1,1]$，$[-1,-1,-1,-1]$.

Thm. G-5-5. $\mathcal{O}(1,3) = \{ 4\times4 \text{ 实矩阵} \mid A^T = -\eta \cdot A \cdot \eta \}$.

Pf. 与讨论 $\mathcal{O}(m)$ 群类似，证所有单参子群在 I 处切矢 $\in \mathcal{O}(1,3)$，再证 $\mathcal{O}(1,3)$ 所有元素 $\in$ 单参子群切矢。

a)、$\forall A \in \mathcal{O}(1,3)$，考虑 $O(1,3)$ 中 $\Lambda(0) = I$，$\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \Lambda(t) = A$ 的曲线。

$\frac{d}{dt}\big|_0 [A^T(t)\cdot\eta\cdot A(t)] = \frac{d}{dt}[A^T(t)]\eta\cdot A(t) + A^T(t)\cdot\eta\cdot\frac{d}{dt}A(t) = A^T\cdot\eta\cdot I + I\cdot\eta\cdot A \Rightarrow A^T=-\eta\cdot A\cdot\eta$

B). 我们取满足 $A^T=-\eta\cdot A\cdot\eta$ 的阵 A. 从而计算 $[\mathrm{Exp}(A)]^T\cdot\eta\cdot[\mathrm{Exp}(A)]$.

不难注意到, $N^{-1}\cdot\mathrm{Exp}(M)N = N^{-1}\left(I+M+\frac{1}{2!}M^2+\cdots\right)$.

$$= I+N^{-1}\cdot M\cdot N + \frac{1}{2!}(N^{-1}\cdot M\cdot N)(N^{-1}M\cdot N)+\cdots = \mathrm{Exp}(N^{-1}\cdot M\cdot N).$$

取 $N=\eta$. $M=A$. 有 $\eta\cdot\mathrm{Exp}(A)\cdot\eta=\mathrm{Exp}(\eta\cdot A\cdot\eta)$.

从而 $(\mathrm{Exp}A)^T\eta(\mathrm{Exp}A)\eta = (\mathrm{Exp}A^T)\cdot\eta\cdot(\mathrm{Exp}A)\eta = (\mathrm{Exp}A^T)(\mathrm{Exp}(\eta\cdot A\cdot\eta)) = \mathrm{Exp}[A^T+\eta A\eta] = I$, 或 $(\mathrm{Exp}A)^T\eta(\mathrm{Exp}A)=\eta$. 从而 $A\in\mathfrak{o}(1,3)$ 生成 $\mathrm{Exp}(tA)\in O(1,3)$.

下借用 $\mathfrak{o}(1,3)$ 计算 $O(1,3)$ 之维度, 取 $A\in\mathfrak{o}(1,3)$, $A^T=-\eta A\eta$. 取 $B=\eta A \Rightarrow B^T=-B$. 从而 $B\in\mathfrak{o}(4)$. 我们构建了 $\mathfrak{o}(1,3)\to\mathfrak{o}(4)$ 的映射. 不难看出这一映射是线性同构.

$\Rightarrow \dim\mathfrak{o}(1,3)=\dim\mathfrak{o}(4)$.

U(m) Group / Unitary Group

前面我们的所有矩阵群都是在m维实空间中定义的. 现在考虑复矢量空间上的矩阵群 $GL(m,\mathbb{C})$, 并介绍其一个子群——酉群 $U(m)$.

下面介绍一些复矢空间的内容. 复矢空间上有内积 $\langle\,,\rangle\to\mathbb{C}$. 满足:

a). $\langle f, g+h\rangle = \langle f,g\rangle+\langle f,h\rangle$

b). $\langle f, cg\rangle = c\langle f,g\rangle$

c). $\langle f,g\rangle = \overline{\langle g,f\rangle}$ 从而 $\langle f+g,h\rangle = \overline{\langle h,f+g\rangle} = \overline{\langle h,f\rangle}+\overline{\langle h,g\rangle} = \langle f,h\rangle+\langle g,h\rangle$.

$\langle cf,g\rangle = \overline{\langle g,cf\rangle} = \overline{c\langle g,f\rangle} = \bar{c}\langle f,g\rangle$. 从而说内积对第一个位置反线性.

d). $\langle f,f\rangle\geq 0$. $\langle f,f\rangle=0$ 当且仅当 $f=0$. 内积能够导出 A 的伴随. $\langle A^\dagger f,g\rangle=\langle f,Ag\rangle$.

复矢空间上线性映射的等价. 称有 U 保内积若 $\langle Uf,Ug\rangle=\langle f,g\rangle$.

$\langle Uf,Ug\rangle=\langle U^\dagger Uf,g\rangle=\langle f,g\rangle \Leftrightarrow U^\dagger U=I$.

取定V上正交归一基后, 可将算符用矩阵表示. $A_{ij}=\langle e_i|A|e_j\rangle$.

$$A_{ij}=\langle A^\dagger e_i|e_j\rangle=\overline{\langle e_j|A^\dagger|e_i\rangle}=\overline{A^\dagger_{ji}}$$ 从而"伴随"的矩阵为共轭转置

对于酉阵, 总有 $\det U=\exp(i\phi)$

Def. 酉群 $U(m)=\{m$维复内积空间上保内积算符$\}=\{m\times m$ 酉阵$\}$.

e.g. 1维复矢空间 $\mathbb{C}$, 上内积 $\langle f,g\rangle=\bar{f}g$. $\mathbb{C}$ 上复数乘法对应线性算符, 作用的结果是复数乘积. 不难看出 $U(1)$ 为 $\mathbb{C}$ 上单位圆.

Thm G-5-9. $U(m)$ 的 Lie Alg. $\mathfrak{u}(m) = \{ m\times m$ 反厄米阵 $\}$

Thm. G-5-10. $\dim U(m) = \dim \mathfrak{u}(m) = m^2$.

$A \in \mathfrak{u}(m)$ 由 $2m^2$ 个实数所决定. 非对角元提供 (m^2-m) 个约束方程, 而对角元提供 m 个实方程 (它们都是纯虚数).

e.g. $U(1)$ 的 $\mathfrak{u}(1)$ 由曲线 $\exp(i\theta)$ 之切矢. $A = \frac{d}{d\theta}\exp(i\theta)\big|_{\theta=0} = i$. $\Rightarrow \mathfrak{u}(1) = \{ia \mid a\in\mathbb{R}\}$.

Thm. 5-11 酉群是道路连通的.

Pf. 只需证 对于 $\forall U \in U(m)$, $\exists$ 连续曲线 $\gamma(t) \in U(m)$ 使 $\gamma(0)=I$, $\gamma(1)=U$.

对于任意酉矩阵, 可将其酉对角化. $W\cdot U\cdot W^{-1} = D$, $W\in U(m)$. $D = \mathrm{diag}[\exp(i\varphi_1)\cdots\exp(i\varphi_m)]$. 设 ϕ 是以 $\varphi_1\cdots\varphi_m$ 为对角元的实对角阵, 则 $D = \mathrm{Exp}(i\phi)$.

$\Rightarrow U = W^{-1}\cdot D\cdot W = W^{-1}\cdot \mathrm{Exp}(i\phi)\cdot W = \mathrm{Exp}(iW^{-1}\cdot\phi\cdot W)$.

$(iW^{-1}\phi W)^\dagger = -i\,W^\dagger\phi(W^{-1})^\dagger = -iW^{-1}\phi W$. 从而 $A = iW^{-1}\phi W \in \mathfrak{u}(m)$. $U = \mathrm{Exp}(A)$. 从而 $\mathrm{Exp}(tA)$ 即为这样的曲线 □

并且可以发现酉群中的任一元素都处在一个单参子群之中. 这一性质并非对任一 Lie 群成立.

e.g. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in GL(m)$. 不在任一单参子群中.

这里的根本原因是紧致道路 Lie 群的指数映射是到上的. 而 $GL(m)$, $O(1,3)$ 等都并非紧致.

特别地, 可定义 $SU(m) = \{u\in U(m) \mid \det u = +1\} \subset U(m)$. 下证明 $\mathfrak{su}(m) = \{ m\times m$ 无迹反厄米阵 $\}$. 为了证明, 下面先证明一个引理.

Lemma. G-5-12. 设 A 为 $m\times m$ 矩阵, 有: $\det(\mathrm{Exp}(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$

Pf. 取函数 $f(t) = \det[\exp(tA)]$. $\frac{d}{dt}f(t) = \frac{d}{ds}f(t+s)\big|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s}\left[\det[\exp(tA+sA)]\right]\big|_{s=0}$

$= \det[\exp(tA)]\underbrace{\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}[\det(\exp(sA))]}_{\mathrm{tr}(A)} = f(t)\cdot\mathrm{tr}(A)$. 由这一微分方程立刻得证

Thm. G-5-13. $\mathfrak{su}(m) = \{ m\times m$ traceless anti-hermitian matrix $\}$.

A). 若 $A\in\mathfrak{su}(m)$ $\mathrm{Exp}(tA) \subset SU(m)$. $\Rightarrow \det[\mathrm{Exp}(tA)] = 1$, $\exp(\mathrm{tr}(tA)) = 1 \Rightarrow \overset{t(\mathrm{tr}(A))}{\mathrm{tr}(tA)} = 2ik\pi$. 且 t 任意 $\Rightarrow k=0$. 从而 A 为无迹阵.

B). 设 A 为 $\overset{①}{\text{t.l.}}\ \overset{②}{\text{a.h.}}$ 阵. 由 ① ② 立刻得知 $\mathrm{Exp}(tA)\in SU(m)$. 于是单参子群的生成元 $\frac{d}{dt}\mathrm{Exp}(tA)\big|_{t=0} = A$. 从而 $A\in\mathfrak{su}(m)$.

此外, 立刻看出 $\dim SU(m) = \dim\mathfrak{su}(m) = m^2-1$. ($\mathrm{tr}A = 0$ 多给出一个方程).

● Euclidean Group / $E(m)$ Group.

$(\mathbb{R}^m, \delta_{ab})$ 之等度规群, 它的维数与 Killing 场的数目相同. $\Rightarrow m(m+1)/2$ 维. e.g. $E(1)$ 是由所有平移群与一个反演群做半直积得到的.