Appendix: G.　　Intro to「Lie Group & Lie Algebra」

一、群论初步.

Def 1. 群是一个集合 G. 上面定义了群乘法: $G\times G\to G$. 群乘法要满足3个条件:

a). $(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$.

b). $\exists e\in G$, $ge = eg = g$.

c). $\forall g\in G$, $\exists g^{-1}\in G$, $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

Def 2. 乘法满足交换律的群称作阿贝尔群.
G的子集H以G的乘法也构成群,则称H为G的子群.　　e.g. 在 $\mathbb{R}$ 上定义 $x\cdot y = x+y$. $\mathbb{R}$ 构成交换群.

Def 3. 定义保群乘法的映射 $\mu: G\to G'$ 称为群同态. G, G' 为两群. $\forall g_1, g_2\in G$. $\mu(g_1)\mu(g_2) = \mu(g_1g_2)$.

Def 4 一一到上的同态映射称为群同构.

Example. 利用 $g\in G$, 可构造"由g诱导的自同构映射". $I_g: G\to G$.　定义为 $I_g = ghg^{-1}$, $\forall h\in G$.

Def 5. 群 G, G' 的直积 $G\times G'$ 上有下列群乘法: $(g_1,g_1')(g_2,g_2') = (g_1g_2, g_1'g_2')$.

Def 6. 使用一个群元移动子群中的元素, 我们可得到所谓"陪集". 称 G 的子群 H 的含 g 的左陪集为 $gH = \{gh \mid h\in H\}$.

陪集的性质: 若子群 H 的两个左陪集有交,则它们必相等.

Pf. 若 $aH\cap bH$ 非空 $\Rightarrow$ 存在 $x\in aH\cap bH$, $x = ah_1 = bh_2$, $h_1, h_2\in H$. 下证 aH, bH 互相包含.

$aH\subseteq bH$.　取 $y = ah$, $h\in H$.　由于 $a = bh_2h_1^{-1}$.

$\Rightarrow$ $y = ah = bh_2h_1^{-1}h = b(h_2h_1^{-1}h)$.　由于H为G的子群. 故 $h_2h_1^{-1}h\in H$.　$\Rightarrow y\in bH$.

类似可证 $bH\subseteq aH$.　□.　从而, 子群H的所有陪集要么不交要么相等.

Def 7. 群G的子群H称为正规子群, 若 $ghg^{-1} = h$, $\forall g\in G$, $h\in H$.　正规子群的陪集集合 $\{gH \mid g\in G\}$. 在运算 $(aH)(bH) = (ab)H$ 下构成群. (正规子群保证了该运算良定义).

Def 8. G为群. G上的自同构映射 $A(G) = \{\mu: G\to G \mid \mu$ 为自同构映射$\}$ 构成群. 称为自同构群.

e.g. 有一种自同构称为由g诱导的伴随同构, 定义为 $I_g(h) = ghg^{-1}$.　所有伴随同构所成之群为自同构群的正规子群. 这是显然的.

Def 9. 前面我们将两个群放在一起可以组成直积群，若两群之间已有一个同态联系起来，则可定义半直积群。设 H, K 为群，且已有同态映射 $\rho: K\to A(H)$（K 中一个元素可以对应 A 上一个自同构）。将 $k\in K$ 对应的自同构记作 ρ_k，则 $G = K\times H$ 上有以下群乘

$(h,k)(h',k') = (h\rho_k(h'), kk')$

Lie Group.

若 G 既是 n 维流形又是群，其群乘运算映射 $G\times G\to G$ 与逆元映射 $G\to G$ 都是 C^∞ 的，则 G 称为 n 维 Lie Group.

e.g. $\phi: \mathbb{R}\times M\to M$ 为 M 上的单参群，则 $\{\phi_t \mid t\in\mathbb{R}\}$ 为 1D Lie Group.

(M, g_{ab}) 上所有 isometry 构成一个 Lie Group，有 N 个 Killing 场，这 Group 就有 N 维，从而 $\dim \le n(n+1)/2$.

对于 Lie Group，自然也可以定义 Lie 群同态，此时：$\mu: G\to G'$ 应为 C^∞ 的；同构映射则为微分同胚，也可以定义 Lie 子群.

Def 4. $\forall g\in G$，可由 g 诱导一个映射 $L_g: h\to gh$，称作由 g 生成的左平移

显然，L_e 为恒等映射，$L_{gh} = L_g\circ L_h$，$(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$，不难知道 L_g 是 $G\to G$ 微分同胚.

由于 Lie 群为流形，左平移可以作用于群元（流形上的点）上，则其推前映射将可以作用在流形上矢量场上。下面我们用 A 代表矢量，而用 $\bar A$ 代表矢量场.

下面，对推前、拉回做一些复习。设有 M、N 两个流形，有 $\phi: M\to N$，对于 $p\in M$，ϕ_* 可将 V_p 推到 $V_{\phi(p)}$。显然，ϕ 只有可逆时才可将矢量场推前为矢量场

Def 5. G 上的矢量场 $\bar A$ 称为左不变的，若 $\mathcal{L}_{g*}\bar A = \bar A$，$\forall g\in G$.

利用推前映射定义，直到将上面定义改为 $(\mathcal{L}_{g*}\bar A)_{gh} = \mathcal{L}_{g*}(\bar A_h)$，$\forall h\in G, g\in G$ 从而有：$\mathcal{L}_{g*}(\bar A_h) = \bar A_{gh}$ 为左不变场之新定义.

推前后矢量场在 gh 处的值　　将 h 处矢量推前后的结果.

此外，由于推前映射是线性映射，不难看出 $\mathcal{L}$ = {G 上所有左不变矢量场} 为矢量空间，从而有定理：

Thm 2-1. $\mathcal{L}$ 与 G 的恒等元 e 的切空间同构.

Pf: 取 $A\in V_e$，由它可以定义流形 G 上的矢量场：$\bar A_g = \mathcal{L}_{g*}A$，下验证它确实是左不变的

$\bar A_{gh} = \mathcal{L}_{gh*}A = (\mathcal{L}_g\circ \mathcal{L}_h)_*A = (\mathcal{L}_{g*}\circ \mathcal{L}_{h*})A = \mathcal{L}_{g*}(\mathcal{L}_{h*}A) = \mathcal{L}_{g*}\bar A_h$.

该映射保持性由 L_{g*} 保证。若 $\bar{A}=\bar{B} \Rightarrow \bar{A}_e=\bar{B}_e$，则 $A=B$，从而一一性得证。
$\forall \bar{A} \in \mathcal{L}$ 取 $A=\bar{A}_e$ 即可，从而满射得证。

Lie Algebra.

在线性空间上定义一个乘法 $V\times V \to V$，我们就获得一个代数。一种主要的乘法是所谓 Lie bracket / 李括号，它有两个性质：

a). 反对称. $[A,B]=-[B,A]$

b). Jacobi恒等式: $[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=0$.

exp. $\mathbb{R}^3$ 视作3维线性空间，定义 Lie bracket: $[\vec{v},\vec{u}]=\vec{v}\times\vec{u}$.

$\mathcal{M}=\{$全体3×3实矩阵$\}$ $[A,B]=AB-BA$.

Thm 3-1 G上全体左不变矢量场集合 $\mathcal{L}$ 为李代数，在 $\mathcal{L}$ 上可以使用对易子定义 Lie Bracket.

Pf. $L_{g*}[A,B]=[L_{g*}A, L_{g*}B]=[A,B]$，从而它是 $\mathcal{L}\to\mathcal{L}$ 映射。
它是双线性的，且自动满足雅可比恒等式 □.

Def 2. 类似地，设 $\mathcal{V}$、$\mathcal{W}$ 为 Lie 代数，称 $\mathcal{V}\to\mathcal{W}$ 为 Lie 代数同态，若它保 Lie Bracket: $\beta([A,B])=[\beta(A),\beta(B)]$ $\forall A,B\in\mathcal{V}$. 若同态一一到上，则称为同构.

前面提过，左不变矢量场与 e 的切空间有同构，在 V_e 中可以定义 Lie Bracket: $[A,B]=[\bar{A},\bar{B}]_e$，从而可以证明 V_e 与 $\mathcal{L}$ 可建立李同构.

Pf. 取 $A,B\in V_e$. $\beta(A)=L_{g*}(A)$, $\forall g\in G$.
$\beta(B)=L_{g*}(B)$, $\forall g\in G$.
$[\beta(A),\beta(B)]=L_{g*}[A,B]$ $\forall g\in G$.
而 $\beta([A,B])=\beta([\bar{A},\bar{B}]_e)=L_{g*}[\bar{A},\bar{B}]_e=L_{g*}[A,B]$.
实际上，V_e 上定义的 Lie 括号 就是矢量场对易子.

从而我们说：给定一个 Lie Group，其恒等元的切空间 V_e 为其 Lie Algebra.

反过来，给定一个 Lie Alg，可否找一个 Lie Group，使该 Alg 与该 Group 上左不变矢量场同构？答案是：必存在，唯一到只相差整体拓扑的程度. (e.g. S^1 与 $\mathbb{R}$ 有相同 Lie 代数，同胚 $\mathbb{R}$).
准确说，给定一个 Lie Alg，总可以找到唯一的单连通 Lie Group. → 该群上任一闭曲线可以连续收缩到一点.

Thm G-3-2. $\mathfrak{g}$ 和 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 分别为 Lie Group $G,\tilde{G}$ 的 Lie Alg，两个 Lie Group 之间有个同态 $\rho: G\to\tilde{G}$，从而 ρ 在 $e\in G$ 诱导的推前映射 $\rho_*: \mathfrak{g}\to\tilde{\mathfrak{g}}$ 为 Lie Alg 同态.

对于 Lie Alg $\mathfrak{g}$ 的子空间 $\mathfrak{h}$，可以定义 sub Lie Alg，只需 $[A,B]\in\mathfrak{h}$ $\forall A,B\in\mathfrak{h}$. 若 H 为 G 的 sub Lie Group，则 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 sub Lie Alg.

一、单参子群与指数映射

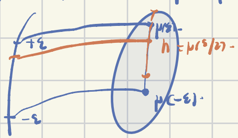
Def 4-1. C^∞ 曲线 $\gamma: \mathbb{R}\to G$ 称为李群 G 的单参子群，若 $\gamma(s+t)=\gamma(s)\gamma(t)$。 按定义显然可以验证，并可知 $\gamma: \mathbb{R}\to G$ 为从 $\mathbb{R}$ 到 G 的 Lie 群同态。

本节主要证明：Lie 群 G 的单参子群与左不变矢量场过单位元的积分曲线。

* 在下文的讨论中，我们默认积分曲线在某点的切矢等于矢量场在该点的值。 使用 $\frac{d}{dt}\gamma(t)$ 代表 $\gamma(t)$ 之切矢。

Thm G-4-1. 若曲线的参数 t 可取遍 $\mathbb{R}^1$，而有的曲线不行。 将参数可取遍 $\mathbb{R}^1$ 的矢量场称为完备矢量场，则：Lie 群 G 的任一左不变场 $\bar{A}$ 均为完备矢量场。

Pf. 设 $\mu(t)$ 为某一左不变场 $\bar{A}$ 的积分曲线。不失一般性地，设其定义域为 $(-\varepsilon,\varepsilon)$。



取点 $h=\mu(\varepsilon/2)$，令 $\nu(t)=h\,\mu(t-\varepsilon/2)$，从而有 $\nu:\left(-\varepsilon/2,\ 3\varepsilon/2\right)\to G$。 不难注意到 $\nu(\frac{\varepsilon}{2})=h=\mu(\frac{\varepsilon}{2})$，而在其上的切矢。

$\frac{d}{dt}\mu(t)\big|_{t=\frac{\varepsilon}{2}}=\bar{A}|_h$。 而 $\frac{d}{dt}\nu(t)\big|_{t=\frac{\varepsilon}{2}}=\frac{d}{dt}L_h\mu(t-\frac{\varepsilon}{2})\big|_{t=\frac{\varepsilon}{2}}=L_{h*}\frac{d}{dt}\mu(t-\frac{\varepsilon}{2})\big|_{t=\frac{\varepsilon}{2}}$

而 $\frac{d}{dt}\mu(t-\frac{\varepsilon}{2})=\frac{d}{dt}\mu(t')=\frac{d}{dt'}\mu(t')\frac{dt'}{dt}=\frac{d}{dt'}\mu(t')=\bar{A}_{\mu(t-\frac{\varepsilon}{2})}$。 $\Rightarrow \frac{d}{dt}\nu(t)\big|_{t=\frac{\varepsilon}{2}}=L_{h*}\bar{A}_{\mu(t-\frac{\varepsilon}{2})}=\bar{A}_{h\mu(t-\frac{\varepsilon}{2})}=\bar{A}_{\nu(t)}\ \big|_{t=\frac{\varepsilon}{2}}$。

从而，$\nu(t)$ 与 $\mu(t)$ 均为 $\bar{A}$ 的积分曲线，且二者有重合段，从而 $\mu(t)$ 的定义域可被延拓：$[-\varepsilon,+\varepsilon]\to[-\varepsilon,+\frac{3}{2}\varepsilon]$。 继续使用这样的方法延拓即可。 □.

实际上可证明 $\bar{A}$ 过任一点的积分曲线参数范围均可取遍 $\mathbb{R}$。 记 $\beta(t)=g\cdot\gamma(t)$，只需证 $\beta(t)$ 也为 $\bar{A}$ 积分曲线。

$\frac{d}{dt}\beta(t)=\frac{d}{dt}(L_g\gamma(t))=L_{g*}\frac{d}{dt}\gamma(t)=L_{g*}\bar{A}|_{\gamma(t)}=\bar{A}_{g\cdot\gamma(t)}=\bar{A}_{\beta(t)}$。 □.

下面开始证明主要命题。

Thm. G-4-2. 设 $\gamma:\mathbb{R}\to G$ 为左不变矢量场 $\bar{A}$ 的、满足 $\gamma(0)=e$ 的积分曲线，则 γ 为 G 的单参子群。

Pf. 只需证明 $\gamma(s+t)=\gamma(s)\gamma(t)$。 前已证 $\beta(t)=g\gamma(t)$ 为过 g 点的 $\bar{A}$ 的积分曲线。 取 $\gamma(s)=g$。 $\Rightarrow \beta(t)=\gamma(s)\gamma(t)$。 $\gamma_1(t)=\gamma(s+t)$。 欲证明它们是同一条曲线。

从而使用"一点一矢"选择的策略。 不难注意到 $\gamma_1(0)=\beta(0)$，从而两线在原点处重合。下证切矢一样。

$\frac{d}{dt}\beta(t)\big|_{t=0}=\bar{A}_{\gamma(s)}$（上面已证）。 $\frac{d}{dt}\gamma_1(t)\big|_{t=0}=\frac{d}{dt}\gamma(s+t)\big|_{t=0}=\frac{d}{d(s+t)}\big|_{t=0}\gamma(s+t)\cdot\frac{d(s+t)}{dt}=\bar{A}_{\gamma(s+t)}\big|_{t=0}=\bar{A}|_{\gamma(s)}$。 从而，两条曲线在 $t=0$ 处切矢相同 $\Rightarrow \gamma(s+t)=\gamma(s)\gamma(t)$。 □.

Thm G-4-3. 设单参子群 $\gamma(t)$ 在单位元 e 上的切矢为 A，则 $\gamma(t)$ 为 A 对应的左不变矢量场 $\bar{A}$ 的积分曲线。

Pf. 只需证明 $\bar{A}_{\gamma(s)}=\frac{d}{dt}\gamma(t)\big|_{t=s}$。 $\bar{A}_{\gamma(s)}=L_{\gamma(s)*}A=L_{\gamma(s)*}(\frac{d}{dt}\gamma(t)\big|_{t=0})=\frac{d}{dt}\left(L_{\gamma(s)}\gamma(t)\right)\big|_{t=0}=\frac{d}{dt}\left(\gamma(s+t)\right)=\frac{d}{dt}\gamma(t)\big|_{t=s}$。 □.

在一般的带度规流形上，可以利用测地线定义一个指数映射，而在 Lie 群上，e 点处切空间的每个矢量对应一个左不变矢量场，对应一条积分曲线，从而可有如下定义：

Def 2 Lie 群上的指数映射 $\exp: V_e\to G$ 定义为：$\exp(A)=\gamma(1)$，γ 为 A 对应的积分曲线。

Thm G-4-4. $\exp(sA)=\gamma(s)$，γ 为 A 对应的单参子群。

Pf. 令 $A'=sA$，由于 $V_e\to\mathfrak{L}$ 为线性同构，从而 $\bar{A}'=s\bar{A}$。 γ 为 $\bar{A}$ 对应的单参子群，故定义 $\gamma'(t)=\gamma(st)$，计算 $\gamma'(t)$ 的切矢有：

$\frac{d}{dt}\gamma'(t)=\frac{d}{dt}\gamma(st)=\frac{d}{d(st)}\gamma(st)\cdot\frac{d(st)}{dt}=s\bar{A}_{\gamma(st)}=\bar{A}'_{\gamma'(t)}$。 $\Rightarrow \exp(sA)=\exp(A')=\gamma'(1)=\gamma(s)$。 □.