Day 92.

我们继续考虑描述宇宙膨胀的方程: $H^2 = 8\pi\rho/3 - k/a^2$. 补上物理常数: $\frac{3H^2}{8\pi G} = \rho - \frac{3kc^2}{8\pi G a^2}$. 将k=0时称作Critical Density: $\rho_c = 3H^2/8\pi G$.

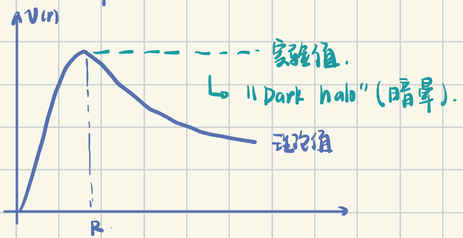
从而 $\rho=\rho_c + 3kc^2/8\pi G a$. 通过测量ρ, 即可知道属于哪种宇宙. 这可作一比喻: ρ大时, 引力强, 从而宇宙中物质在膨胀后"掉头返回".

引入所谓密度参数. $\Omega=\rho/\rho_c$. 现在我们看当今宇宙: $\Omega_0=\rho_0/\rho_{c0}=\frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_0$ 为估计ρ_0, 设当今宇宙质量主要集中于星系中. $\rho_0 = n_0\cdot\bar{m}$. $\bar{m}$为平均质量.

星系质量难以直接测量, 故考虑测单位体积内的光度(光度密度). $\mathcal{L}=nL$. 从而 $\rho_0=\mathcal{L}\bar{m}/\bar{L}$. 不同星系的M差得很大. 但M/L的差距却小得多. 所以可测M/L.

下面介绍测量星系质量的力学方法. 作为一种简化, 我们采用牛顿力学 $\Rightarrow v^2(r)\cdot r = GM(r)$. 可以由频移测$v(r)$. 以R代表光度消失的r. 从而$M(R)$为星系总质量.

根据这样的测量结果, 有 Ω_0(发光物质)$<1\%$. 但是, 没有这么简单. 考虑DM后会放大10倍左右.



再对星系团进行测量, 我们有 Ω_0(cluster) $\sim 10\%-30\%$. → 星系团中存在大量Dark matter.

但这里我们讨论的DM都是重子DM、(行星、中子星、白矮星和中子, …). 而原初核合成给出上限. $2.3\%<\Omega_{b0}<5.1\%$

所以我们必然有缺的非重子DM. → 中微子吗? 这需考虑中微子在解耦时能量. 一般认为高能, 称作热DM.

剩下的未被测到(弱相互作用)的有质量的非重子粒子, 认为其退耦时速度已不高, 从而称作Cold DM.

下面计算重子质量. $\Omega_0=\frac{\rho_0}{\rho_{c0}}=\frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_0$, 从而 $\rho_{b0}=\frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_{b0}=\frac{8\pi G}{3H_0^2}n_{b0}m_{核}$ 重子/光子比已知, 可用光子估重子,

$\frac{n_{b0}}{n_{\gamma 0}}=\eta\approx 10^{-10}$ $\Rightarrow$ $\Omega_0=\frac{8\pi G}{3H_0^2}\eta\, n_{b0}\, m_{核}$ 考虑辐射谱. $du=\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\left(\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)-1\right)^{-1}d\lambda$, 又有 $E=h\nu=\frac{hc}{\lambda}$

从而位于$(\lambda,\lambda+d\lambda)$的光子数 $dn_\gamma=\frac{8\pi}{\lambda^4}\left(\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)-1\right)^{-1}d\lambda$ $\Rightarrow n_\gamma=2\times10^7$(个/m³). 从而 $n_{\gamma 0}\sim 4.1\times10^8$个/m³

由于η有一些不确定, H_0也有一些不确定, 将这些值和不确定的值带入上式, 可得结论.

Day. 93.

宇宙常数的"Λ经历"：为静态宇宙提出 → 被Friedmann否决 → 解决年龄疑难重新引入 → Hubble Constant精确测量 → … → QFT的估计.
与[illegible]理论的联系.

在上一次中，我们得出 $\Omega(\text{cluster}) \sim 10\%-30\%$. 但1981年的inflationary model认为 $\Omega\sim1$. 1998年测量表明 $\Lambda\neq0$. 从而Λ对Ω有一定贡献.

最初，Hubble测得的常数大于标准值8~10倍. 从而使宇宙年龄短于预期. 引入宇宙学常数可做一些"缓解". 考虑 $G_{ab}=8\pi(T_{ab}-\frac{\Lambda}{8\pi}g_{ab})$

由于 ideal fluid的E-M tensor. $T_{ab}=(\rho+p)U_aU_b+p\,g_{ab}$. 从而宇宙学常数引入了一个 $-\rho=p=-\Lambda/8\pi$ 的理想流体.

它对宇宙膨胀的贡献为 $3\ddot{a}=-4\pi a(\rho+3p)-4\pi a\cdot(2\rho')=-4\pi a(\rho+3p)+a\cdot\Lambda$. 从而 $\Lambda>0$ 时可以缓解年龄疑难.

不难看出. 在加入Λ的模型下. 宇宙可以先减速膨胀. 再加速膨胀.

近代物理中. 量子场论指出"真空不空". 真空甚至有能动张量. $(T_{ab})_{vac}$ 由基本(真空)的协变性. 必有 $(T_{ab})_{vac}=-\rho_{vac}\,g_{ab}$ 它可以理解为 $p=-\rho$ 的ideal. fluid.

它的这种"理想流体"与Λ带来的"理想流体"形式一致. 换言之. $8\pi\rho_{vac}\leftrightarrow\Lambda$. 使用QFT估算的结果为 $\rho_{vac}\sim E_p^4/16\pi^2\hbar^3c^5\sim10^{94}\ kg\cdot m^{-3}$

但 $\Lambda_{观测}/8\pi\rho_{vac}\sim10^{-120}$. 在非引力的物理中. 能量零点无所谓. 只有差值有意义. 但引力理论中不行. 能量的绝对值将导致时空弯曲.

一种新校指就是认为宇宙中有一个"bare" cosmological Constant. 但这非常不自然

如何用 无量纲的量式看出 Λ 的值? 应在 该作 方程中 引入 Λ项.

$$\begin{cases} 3(\dot{a}^2+k)/a^2 = 8\pi\rho + \Lambda \ (*) \rightarrow H_0^2 = \frac{8\pi}{3}\rho_0 + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a_0^2} \\ \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2+k}{a^2} = -8\pi p + \lambda \ (**) \end{cases}$$

之前定义过 $\rho = \frac{3H^2}{8\pi}$ $\Omega = \rho/\rho_c = \frac{8\pi\rho}{3H^2}$

令 $\Omega_\Lambda = \Lambda/3H^2$. 此式可写成. $1 = \Omega + \Omega_\Lambda - \frac{k}{a_0^2 H_0^2}$ 对于当今. $1 = \Omega_{M0} + \Omega_{\Lambda0} - \frac{k}{a_0^2 H_0^2}$

对减速度做无量纲化: $q_0 = -\left(\frac{a}{\dot{a}^2}\ddot{a}\right)$. ("减速参量"). $q = -\frac{a^2}{\dot{a}^2}\cdot\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{H^2}\frac{\ddot{a}}{a}$

将 q 代入此方程. $\frac{2\ddot{a}}{a} = \Lambda - \left(\frac{8}{3}\pi\rho + \frac{\Lambda}{3}\right) = \frac{2}{3}\Lambda - \frac{8}{3}\pi\rho$ 从而 $q = 4\pi\rho/3H^2 - \Lambda/3H^2 = \frac{1}{2}\Omega_{M0} - \Omega_{\Lambda0}$

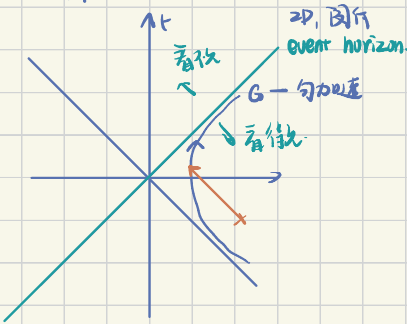
从而 Ω_{M0} 导致减速 而 $\Omega_{\Lambda0}$ 导致加速. 利用 type Ia supernova. 作为距离指示物. 我们测出 $\Omega_{M0} \sim 0.25$. $\Omega_{\Lambda0} \sim 0.63$. $\Rightarrow q_0 < 0$!

解释这一现象的理论称为「dark energy」 它有一个侧面支持: 基于 $\Omega_{M0} = 0.3$. $\Omega_{\Lambda0} = 0.7$ 的 ΛCDM Model 与观测结果吻合地好.

一方面. Ω_Λ 对 Ω 贡献占了很大一部分. 但 $\Lambda/\rho_{vac} \sim 10^{-120}$ 却太小.

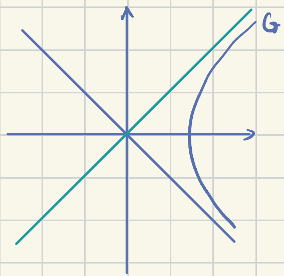
下面简单介绍 Event Horizon 的概念

2D, 图示 有些事件可被 G 看到. 而有些则看不到.

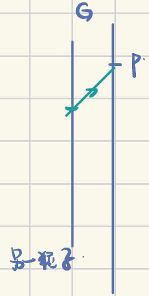


Day 95

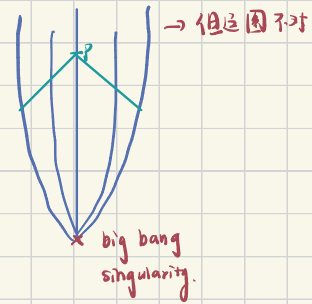
event horizon:



给定一个观者G和世界线上一事件p.



我们想问：事件p能否收到来自其他粒子的某一时刻发的光？有没有一个粒子，发的光不可能到p？ 看起来似乎没有。



现在我们考虑正确的图. $(ds)^2 = -(dt)^2 + a^2(t)[-a^2(t)(dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]$

$= a^2(t)[-a^{-2}(t)(dt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2]$. let $d\hat{t} = a^{-1}(t)\,dt$. then $\hat{t}(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}$.

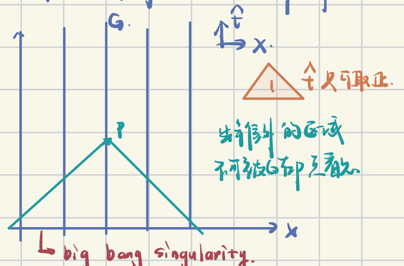
换元后 $\underbrace{(ds)^2}_{g_{ab}} = a^2(t)\cdot((d\hat{t})^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2) = a^2(\hat{t})\cdot\underbrace{[(d\hat{t})^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]}_{\eta_{ab}}$ (注：$a(t)$ 和 $a(\hat{t})$ 代表不同映射)

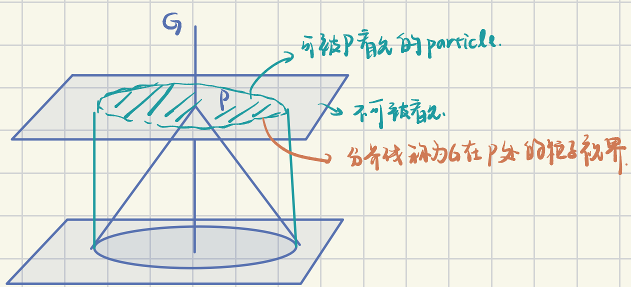
由于 $a(t) \propto \begin{cases} t^{1/2} & (\text{Rad}) \\ t^{2/3} & (\text{Mat}) \end{cases}$ $\hat{t}(t) \propto \begin{cases} t^{1/2} & (\text{Rad}) \\ t^{1/3} & (\text{Mat}) \end{cases}$ 且 $\hat{t}(0) = 0$. 使用抽象指标：$g_{ab} = a^2(t)\,\eta_{ab}$

补充一些共形变换 (Conformal Transformation) 的内容. 设 $\Omega(\cdot)$ 为 $M \to \mathbb{R}$ 之映射. 若 $\exists\,\Omega$. $\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$. 则称 g_{ab} 与 $\tilde{g}_{ab}$ 有共形联系.

(易知, 共形变换就是所谓"保角变换"). 显然 若 g_{ab} 下 v^a 类时, 则 $\tilde{g}_{ab}$ 下也类时! 特别地, 在 g_{ab} 下类光测地线在 $\tilde{g}_{ab}$ 下仍是!

由于"因果关系"与类光测地线有关, 故 Conformal Transformation 可以帮助我们研究因果关系问题. 比如上面的问题. 可证明对 $k = +1, -1$. 以上结论仍成立(共形变换). 从而我们在 flat metric 下解决问题



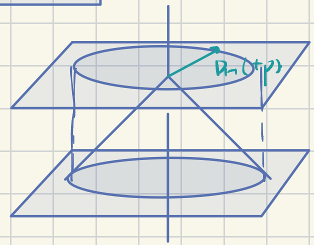


particle horizon 比 event horizon 多两个东西:

① 观者世界线上一点p

② 类时测地线汇 (particles).

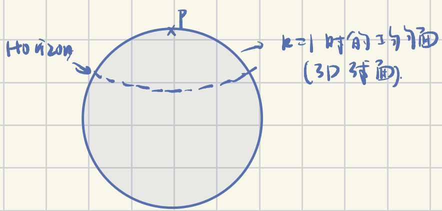
Day. 96.

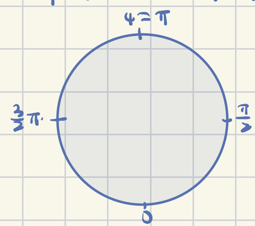


由于我们在 flat metric 中，容易证明 $D_H(t_p)=a(t_p)\int_0^{t_p}\frac{dt}{a(t)}$. 再利用 $a(t)=\begin{cases}\beta t^{1/2} & (rad)\\ \beta t^{2/3} & (mat.)\end{cases}$

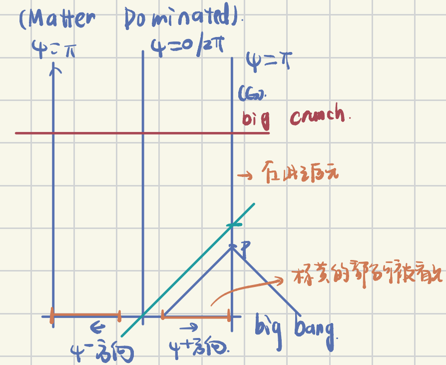
代入积分，并改成国际单位制，有：$D_H(t)=\begin{cases}2ct & (rad.)\\ 3ct. & (mat.)\end{cases}$

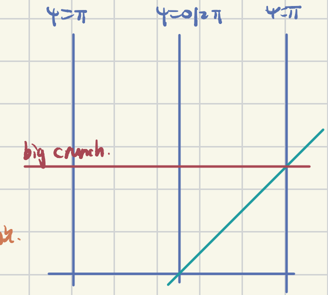
在 $k=+1$, $k=-1$ 时可做类似讨论。例如在 $k=1$ 时，取均匀面上坐标 $\{\theta,\varphi,\psi\}$.



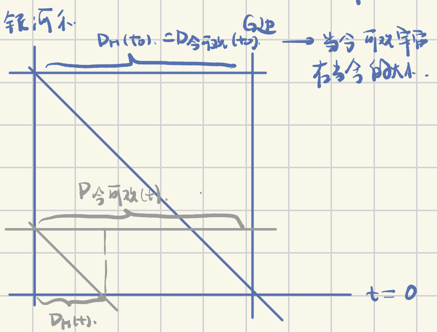


Conformal Transform.





由粒子视界，我们可以引出标准模型的疑难。根据我们的假设，宇宙空间均匀且各向同性。这有两种解释 ① 天生就很均匀 ② 粒子早期频繁相互作用。粒子视界的存在对解释 ② 带来了疑难。



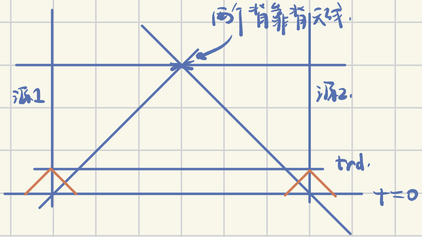
$D_{今可观}(t_0)=D_H(t_0)\sim 3ct_0\sim 3\times10^{26}\,m$. 今天我们可看到这么大的宇宙中光的均匀，那么到光子退耦时刻这片宇宙在那时的半径为（利用背景辐射温度与 $a(t)$ 的反比关系）. then $D_{今可观}(t_{rd})=D_{今可观}(t_0)\cdot\frac{T_r(t_0)}{T_r(t_{rd})}\sim 2\times10^{23}\,m$.

而那时光子的视界距离 $D_H\sim 2ct_{rd}\sim 6\times10^{21}\,m$ $D_{今可观}(t_{rd}):D_H(t_{rd})\sim 33$!

由于距离超 D_H 的粒子不可能在 t_{rd} 时刻以前发生过相互作用，所以在比 D_H 大 33 倍的宇宙中进行"搅拌"很困难。

而在更早的过去，计算可知，$D_{今可观}(10^{-43}s):D_H(10^{-43}s)\sim 10^{29}$. 这更难"搅拌"了!

另有一个对视界疑难的等效表述：来自观测过程中，两个"背对背天线"测得的等效温度相等.



两个源在 trd 时刻根本没有相互作用过，为什么温度相等?

与"可观测宇宙"不同的概念是"观测宇宙"。观测宇宙指的是用目前观测手段观测到的宇宙大小。利用 Hubble's Law，我们可以用红移估计这个尺度。红移 z 的量级为 1。从而「观测宇宙」半径大约为 10^{26} m!

下一种疑难称为「平直性疑难」。我们要说明：宇宙均匀而偏离平直的程度将随时间急剧上升。以 $\varepsilon(t) = |1-\Omega^{-1}(t)|$ 作为偏离平直程度的指标。则 $\varepsilon(t) = \left|\frac{\rho-\rho_c}{\rho}\right| = \frac{3|k|}{8\pi\rho(t)a^2(t)}$。从而 $\varepsilon \propto [\rho a^2]^{-1} \propto \begin{cases} a^2 & (\text{rad}) \\ a & (\text{mat.}) \end{cases}$，

可以算得：$\varepsilon(t_0) = 10^{60}\varepsilon(10^{-43}s) \Rightarrow \varepsilon(10^{-43}s) \sim 10^{-59}$，$\Omega(10^{-43}s) \sim 1 \pm 10^{-59}$.

这里面的疑难在于：为什么当初有一只"无形的大手"，将 Ω 调节到如此精确的值?

还有其他的疑难(e.g. 熵疑难、磁单极子疑难)。

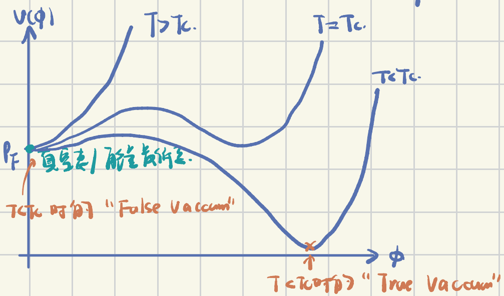
Day 97 ~ 98.

$(T_c \sim 10^{14}\,\mathrm{GeV})$.

为了解决或至少缓解以上各种各样的问题，应使用 Guth 提出的暴涨模型。其中会用到 Grand Unification Theory，在能量足够高时 EM、Strong、weak 将统一。

$T < T_c$ 时，由于对称性自发破缺，Strong 和 weak、EM 被分开。　$T < T_{EW} \sim 10^2\,\mathrm{GeV}$ 时，weak、EM 又被分开。

GUT 理论中有一种标量场 $\phi(x)$，称为 Higgs Field。它与传递弱相互作用的 W^+、W^-、Z^0 有耦合。　Higgs 场的能量密度有如下曲线。



从 "False Vaccum" 到 "True Vaccum" 的相变对应于暴涨过程。

再利用演化方程，我们选择大统一理论的参数，使得从 "False Vaccum" 到 "True Vaccum" 的相变在 $T \sim 0$ 时发生，

则在相变发生前，ρ_F 远大于物质、辐射的能量密度。从而在这一阶段取 $\chi = \left(\frac{8\pi G \rho_F}{3}\right)^{1/2}$，有 $a(t) \propto \exp(\chi t)$。

这个过程的特征时间约为 $\tau = \chi^{-1} = 10^{-34}\,s$。这可以理解为假真空相当于 $p = -\rho$ 的理想流体，由 $\ddot{a} = -4\pi a(\rho + 3p)/3$ 必有加速膨胀。

暴涨开始于 Higgs 场产生"凝聚"的时候，也就是处于大统一临界温度时，时间约 $t_c \sim 10^{-34}\,s$。

而结束的时刻则约为 $t_f \sim 10^{-32}\,s$。此后宇宙进入"重加热"过程。

下面我们说明这个新模型如何解决标准模型之疑难。

→ 视界疑难：采用新模型后，D_H 的表达一样（无论有无暴涨），而 $D_{今可观}$ 在 t_c 时的值要减小很多。$\frac{a(t_f)}{a(t_c)} \sim 10^{43} \gg 10^{29}$。故引入一个"暴涨"过程确实使 $D_{今可观}$ 在 t_{Planck} 时间前在时缩小足够的倍数。

→ 平直性疑难　我们知道 $\varepsilon \propto \begin{cases} (\rho a^4)^{-1} \cdot a^2 \propto a^2 & (\mathrm{Rad}) \\ (\rho a^3)^{-1} a \propto a & (\mathrm{Mat}) \\ (\rho a^2)^{-1} \propto a^{-2} & (\mathrm{False\ Vac}) \end{cases}$　从而在暴涨期间 ε 被急剧缩小。换言之，只要 ε 在 $t \sim 0$ 时并非"高得惊人"，今天 $\varepsilon \to 0 \Rightarrow \Omega \sim 1$！

所以今天宇宙像是平直的。

然而，该模型也有问题，最大的问题是暴涨阶段如何结束，所谓"优雅退出"问题。

下面我们讨论"暗能量"问题。观测表明宇宙正加速膨胀，可用 $\Lambda > 0$ 解释，但这会带来宇宙常数与 QFT 算得的宇宙常数不一致的问题。

加速膨胀机制 / 对加速膨胀负责的宇宙成分，称作"暗能量"问题。我们将满足以下条件的"理想流体"称作"暗能量"。

1)、不发光；2)、p 与 ρ 满足 $p \sim -\rho$。3)、空间分布上尽可能均匀。　<暗能量中"能量"实际上是"辐射"的同义词>.

Day. 99.

对于Λ，我们仍有两问题：①.为何Λ比QFT的预测值小很多？ ②."巧合性问题"。我们有 $\begin{cases} \Omega_\Lambda/\Omega_M = \rho_\Lambda/\rho_M \propto a^3 \\ \Omega_\Lambda/\Omega_R = \rho_\Lambda/\rho_R \propto a^4 \end{cases}$

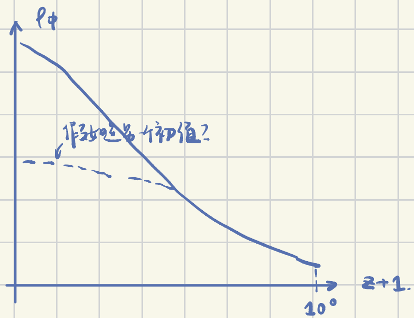
可知，在早期宇宙中 Ω_M 或 Ω_R 占压倒性地位而晚期宇宙 Ω_Λ 占压倒性地位。

换言之，在早期宇宙中有相当长一段时间内 $\Omega_\Lambda \to 0$. 而在晚期则有 $\Omega_\Lambda \to 1$. 而在中间，Ω_Λ 将从0"突增"到1. 这带来了另一个"微调难题"

我们也可以看 $\Omega_\Lambda/(\Omega_M+\Omega_R)$ 则宇宙早期极小无比 这个初始条件为何被"Fine Tune"地如此好？ 所以人们提出了时变的"Dynamical Dark Energy". (静态不行，换动态).

其中一种有希望的称作"quintessence"(第五元素)理论. 它有 $\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$, $P_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$. 于是 $V(\phi) << \dot{\phi}^2$ 有 $P_\phi \sim -\rho_\phi$

在暴胀结束时 $\rho_\phi << \rho_m$. 而后来，随 $\rho_m \downarrow$，$\rho_\phi > \rho_m$ 其他解决方案有：修改场方程？ 观测错了？(实际未加速膨胀？).



现在，我们认为一个"the new standard model"应满足以下性质：

① $\Omega_0 \sim 1$ (近临界值). $q_0 < 0$ (加速膨胀)

② 在极早期有暴涨

③ 宇宙内容物：Dark Energy (70%), Dark Matter (30%). 发光物质(0.5%). Rad (0.005%).

加速膨胀　星系旋转曲线　发光恒星　宇宙的"余晖"

→ The Destiny of Our Universe 「从何处来？向何处去？」

Standard Model中，宇宙命运由 k 唯一决定。而现在，由于DM、DE的引入，就算 $k=0$ 的宇宙都有不同可能。

① $\Lambda = Const > 0$? → $\Omega_\Lambda/\Omega_M \nearrow$ Λ终将主导，则宇宙最终会永远暴涨(指数增长). ② 若是Dynamical DE，则可能有 $\rho_\Lambda < \rho_m$，回到类似于 $k=0$ 的情况

③ 甚至Dynamical DM，可能演化至 $p<0$, $p>0$ 从而宇宙又将收缩

现在有人想使用卫星探测几千个超新星，从而探测宇宙70%左右的历史。

以及探测暗能量的物态方程，$w = P/\rho$，及其演化，从而判别何种模型才是正确的。

"The future of dark physics looks very bright!"