Day 9.

Example 1. 考虑流形 M 上的一个单参群，则它可自然诱导 M 上的一个矢量场 v。但反之不一定成立。

反着来，我们要构造一个矢量场。

pf. 给定单参群 $G_t = \{\phi_t \mid t \in \mathbb{R}\}$，$\phi_t : M \to M$。对于任意 $p \in M$，$\phi_t(p): \mathbb{R} \to M$ 恰为 M 上的一条曲线，且该曲线必过 p 点（$\phi_{(0)}(p) = p$）。

现在，给定 p 点 → 有过 p 的曲线 → 选取曲线在 p 点的切矢。这样我们可以得到 M 上矢量场。

反过来，我们要构造微分同胚 ϕ_t。给定任一点 p，则有唯一积分曲线 $C(t)|_p$ 过 p，直接定义 $\phi_t(p) = C(t)|_p$ 即可。

但这个可能有问题，如果我们在某一积分曲线上去除一些点变成 M'，则对某些 t，ϕ_t 不是 $M \to M'$ 的映射，然后这个构造就失效。

下面我们开始一个非常常见、四处出现、有点不好理解的东西 —— dual vector field.

Def. 1. 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上有限维矢量空间。线性映射 $\omega: V \to \mathbb{R}$ 被称为 V 上的 dual vector（对偶矢量）。

V 上全体对偶矢量的集合称为 V 的对偶空间，记作 V^*。

Theorem 1. V^* 仍然是线性空间，且 $\dim V^* = \dim V$。

pf: 先证 V^* 是线性空间。$(\omega_1 + \omega_2)(v) = \omega_1(v) + \omega_2(v)$。$(\alpha\omega)(v) = \omega(\alpha v)$。$0(v) = 0$。

我们取 V 的任一组基矢 $\{e_1, e_2, \cdots\cdots e_n\}$，在 V^* 上，我们也可以找一组基矢 $\{e^{1*}, e^{2*}, \ldots e^{n*}\}$，使得 $e^{\mu*}(e_\nu) = \delta^\mu{}_\nu$（只要定义在基底上的作用，即可定义在所有矢量上的作用。

首先证明它们是线性无关的。考虑 $\alpha_\mu e^{\mu*} = 0$，要证明上式只有 $\alpha_\mu = 0$ 才成立。不妨将其作用在基底 e_ν 上，$\Rightarrow \alpha_\mu e^{\mu*}(e_\nu) = \alpha_\mu \delta^\mu{}_\nu = 0 \Rightarrow \alpha_\nu = 0$，从而得证。

此后，证明任一对偶矢可由对偶基矢表出：$\forall\, \omega \in V^*$，记 $\omega_\mu = \omega(e_\mu)$，则必有构造 $\omega = \omega_\mu e^{\mu*}$，将其作用在 V 的基矢上即可看出其成立。ω_μ 是对偶矢的分量

我们将 $\{e^{1*}, e^{2*}, \ldots\}$ 称作对偶于 $\{e_1, e_2, \ldots\}$ 的对偶基底

claim. 两个矢量空间被称为同构的，若二者之间存在既单又满的线性同构映射。两矢量空间同构的充要条件是维度相等。

因此 V 和 V^* 是同构的，且同构映射是 $e_\mu \to e^{\mu*}$。

显然，V^* 也是矢量空间，我们也可找到 V^* 的对偶空间 V^{**}。V^{**} 中元素的矢量是 $\omega: V^* \to \mathbb{R}$ 的线性映射。

DAY 10

紧接上一小节来，我们要指出有一个 $V\to V^{**}$ 的自然的同构映射 $v\to v^{**}$，给定 $v\in V$，它在 V^{**} 中的像满足：$v^{**}(\omega)=\omega(v)$，$\forall\, \omega\in V^*$。

从而，我们可以说，V 和 V^{**} 能被视作同一空间。因此，重要的是 V 和 V^*。（我们只关注这两个空间）。

给定一个 v，可找到相应 v^{**}。

现在，假定我们对基底做一个变换，则对偶基底也应发生对应的变换。

Theorem 1. 设 vector space V 中有一基底变换 $e'_\mu=A^\nu{}_\mu e_\nu$，记 A 的转置为 $\tilde{A}$，则相应的对偶基矢的变换为：$e'^{\mu *}=\underbrace{(\tilde{A}^{-1})_\nu{}^\mu}_{\text{先转置再逆}} e^{\nu *}$

pf：这是一个对偶矢量等式，将其作用在变换后的基矢 e_α' 上。

$$\underbrace{(\tilde{A}^{-1})_\nu{}^\mu}_{\text{也都是数（矩阵元）}} e^{\nu *}(\underbrace{A^\beta{}_\alpha}_{} e_\beta) = A^\beta{}_\alpha(\tilde{A}^{-1})_\nu{}^\mu\, e^{\nu *}(e_\beta) = A^\beta{}_\alpha\,(\tilde{A}^{-1})_\nu{}^\mu\,\delta^\nu{}_\beta$$

＊注意：符号上，$A_\alpha{}^\beta$ 并不等于矩阵元 $(A)_{\alpha\beta}$，α,β 的先后有意义！上下指标可以表示

在对 β 求和时，只有 $\beta=\nu$ 的项才会被求和 ⇒ 可以将 β 直接换成 ν，从而上式 $=A^\nu{}_\alpha(\tilde{A}^{-1})_\nu{}^\mu$。　由于 $A_\mu{}^\nu B_\nu{}^\sigma=(AB)_\mu{}^\sigma$

将 A 转置一下，上式变成 $\tilde{A}_\alpha{}^\nu(\tilde{A}^{-1})_\nu{}^\mu = (\tilde{A}\tilde{A}^{-1})_\alpha{}^\mu=(I)_\alpha{}^\mu=\delta_\alpha{}^\mu$。我们也就完成了证明！

下面，我们将目光放回流形上，对于流形上的点切空间 V_p，它有一个对偶空间 V_p^*。

Def 1. 在 M 上每点都指定一个 dual vector，则称 M 上有一个 dual vector field。由于 $\omega: V\to\mathbb{R}$，则称 $\omega_{(p)}$ 是光滑的，若 $\omega_{(p)}(v(p))\in\mathscr{F}_M$，$\forall$ 光滑矢量场 $v(p)$。

Example 1. 设 $f\in\mathscr{F}_M$，则 f 自然诱导出 M 上的一个对偶矢量场，记作 df。我们需要说明 $df|_p\in V_p^*$ 的意义。换言之，$df|_p$ 作用在 $v\in V_p$ 上的效果。

注：这里可以看出为何在 LADR 上，对偶空间称为“线性泛函”。这是由于这里的 ω 是 $V\to\mathbb{R}$ 的映射，也就是映射的映射。换言之：$\omega:(\mathscr{F}_M\to\mathbb{R})\to\mathbb{R}$。

一个自然的定义是 $df|_p(v)=v(f)$。　换言之 $\begin{cases} v\text{ 作用在 }f\text{ 上，可以视作 }f\text{ 沿某方向（由 }v\text{ 指定）进行方向导数} \\ df\text{ 作用在 }v\text{ 上，可以视作 }f\text{ 沿某方向（由 }v\text{ 指定）进行方向导数。}\end{cases}$

设在 M 上选一个坐标系，则 $x^\mu\in\mathscr{F}_O$。从而在 O 上可以有 n 个对偶矢量场 $dx^1, dx^2\ldots$ 我们将它们作用在坐标基矢上，

$dx^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)=\frac{\partial}{\partial x^\nu}(x^\mu)=\delta_\nu{}^\mu$　从而 $\{dx^\mu\}$ 是与 $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$ 对偶的一组对偶基底。

Theorem 2. 设 $\{O,\psi\}$ 为一坐标系，f 为 O 上的光滑函数，则由 f 诱导出的对偶矢量 df 可以在由 $\{x^\mu\}$ 诱导出的对偶矢量 $\{dx^\mu\}$ 下展开为 $df=\frac{\partial F(x)}{\partial x^\mu}dx^\mu$。

pf：这是一个关于对偶矢量场的等式，因此将其两边作用在矢量（坐标基矢）上，$df\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)=\frac{\partial}{\partial x^\nu}(f)=\frac{\partial}{\partial x^\nu}F(x)$。　而 $\frac{\partial F(x)}{\partial x^\mu}dx^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)=\frac{\partial F(x)}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(x^\mu)=\frac{\partial F(x)}{\partial x^\mu}\delta_\nu{}^\mu=\frac{\partial F(x)}{\partial x^\nu}$

Theorem 3. 设两套坐标系 $\{x^\mu\}\{x'^\mu\}$ 的坐标域有交，它们的坐标基矢 $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}\{\frac{\partial}{\partial x'^\nu}\}$ 的对偶坐标基矢为 $\{dx^\mu\}\{dx'^\nu\}$。

则对偶矢量在两套基底上的坐标变换：$\omega_\nu'=\left.\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right|_p\omega_\mu$。

Pf：我们继续写一下。流形 M 上的矢量的分量在两组坐标下是如何变换的。需要找到分量间的变换关系，首先要找到坐标基底间的变换关系。

考虑到 $X_\mu = \frac{\partial F(x)}{\partial x^\mu}$ （$F(x) \to F'(x')$） $X_\nu = \frac{\partial F'(x'(x))}{\partial x'^\nu}$ 　而对于同一点 p，它在两个坐标系中的坐标为 x、x'。则我们有 $F'(x') = F(x)$。

从而：

$$X_\mu = \frac{\partial F(x)}{\partial x^\mu} = \frac{\partial F'(x')}{\partial x^\mu} = \frac{\partial F'(x')}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = X_\nu \cdot \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}$$

从而：

$$v = v^\mu X_\mu = v^\nu X_\nu = v^\mu \cdot X_\nu \cdot \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = v^\nu X_\nu.$$

现在我们来证明对偶矢量展开系数的变换关系。由于 $\omega = \omega_\mu dx^\mu = \omega'_\nu dx'^\nu$。应先导出 dx^μ 和 dx'^ν 的变换式。

考虑 df 在两组对偶基底下的展开：

$$df = \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu} dx^\mu = \frac{\partial f'(x')}{\partial x'^\nu} \cdot dx'^\nu.$$

利用 $f(x) = f'(x')$。

$$= \frac{\partial f'(x')}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \cdot dx'^\nu \quad \Rightarrow \quad dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \cdot dx'^\nu.$$

从而有：

$$\omega_\mu \cdot \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \cdot dx'^\nu = \omega'_\nu \cdot dx'^\nu \quad \Rightarrow \quad \omega'_\nu = \omega_\mu \cdot \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}$$

补充：在计算 df 在对偶基底上的展开时，我们遇到了类似于微积分中全微分的形式：$df = \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu} \cdot dx^\mu$。
在经典微积分中，我们将 $df|_p$ 表征为一个"不确定的增量"，它与"向哪走、走多远"有关。因此，将它输入一个矢量，它就吐出一个实数。从而，将 $df|_p$ 是对偶矢量是十分自然的。
在物理学中，我们不区分对偶矢量 df 和无限小增量 δf。设曲线 $C(t)$ 满足 $C(0) = p$，$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\big|_p = v$，$q = C(\alpha)$，$\alpha \ll 1$。

考虑 df 对 αv 的作用结果。

v 是曲线 $C(t)$ 的切矢。

$$df|_{p}(\alpha v) = \alpha \cdot [df|_p(v)] = \alpha\, v(f) \overset{\text{(切矢定义)}}{=\!=\!=} \alpha \frac{\partial [f(C(t))]}{\partial t} = \alpha \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[f(C(\Delta t)) - f(C(0))].$$

令 $\Delta t = \alpha$（由于 $\alpha \ll 1$）

$$\sim \alpha \frac{1}{\alpha}[f(C(\alpha)) - f(C(0))]$$

$$\sim f(q) - f(p) = \delta f.$$

从而，将 df 作用在 αv 上，给出了 $f(C(\alpha)) - f(C(0))$ 这一增量。