Day 74.

Cosmology / 宇宙学初步

本章，只介绍在宇宙学中取得巨大成功的、公认度最高的模型 —— 标准模型（standard model）。

在引力的作用下，宇宙应减速膨胀，为何近年来最新观测结果证明宇宙加速膨胀？

→ kinematics of the Universe.

由于观测数据较少，为了简化理论，有如下假设（宇宙学原理 Cosmological Principle）：每一时刻宇宙空间在大尺度下(1)均匀且(2)各向同性的。

物质→恒星(star)→星系("Milky-way" galaxy)→星系团(cluster of galaxies)。⇒ 这里说的"密度"指的是在宇观尺度上"平均"的结果。

空间均匀：在非相对论物理中，绝对同时面已是某一时刻的全空间。

狭义相对论：无数种分层方式，1). 每张都是类空超曲面 2). 在一个惯性系中，对于 ∀t∈R 有且仅有一张等t面。

广义相对论：不存在整体惯性系，于是将满足类时相邻两个空间的"分层"就都承认。为了研究简单，我们往往将分层的方式与某种对称性相联系。

所以，宇宙的空间均匀性指：存在这样一种分层方式，每层中各点的物理与几何情况全同。这种分层下的每一层称为宇宙在t时刻下的全空间，称作均匀面（surface of homogeneity）。

可以证明，在满足宇宙学原理的前提下，3维空间只可能有3种几何 —— 平直的；球面的；双曲面的。

Day 75.

下面给出宇宙学原理的精确数学表述

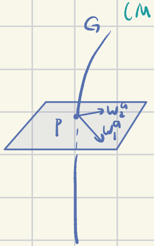
Def 1 时空(M, g_{ab})是空间均匀的，若存在将 M 分层的单参类空超曲面族 $\{\Sigma_t\}$，使得对 $\forall t$，和 $\forall p, q \in \Sigma_t$，存在 h_{ab} 的等度规映射 $\phi: \Sigma_t \to \Sigma_t$，使 $\phi(p) = q$。 $[\phi^* h_{ab} = h_{ab}]$.

Def 2. 时空(M, g_{ab})是各向同性的，则在时空中可找到各向同性观者。 $\psi^* g_{ab} = g_{ab}$.

(M, g_{ab}) 中的参考系称为各向同性系，则对 $\forall$ 观者 G 世界线上任一点 $p \in G$，及 p 处任二单位空间矢量 $w_1^a, w_2^a \in W_p$，存在 g_{ab} 的等度规映射，使得 $\psi(p) = p$，$\psi_* Z^a = Z^a$，$\psi_* w_1^a = w_2^a$.

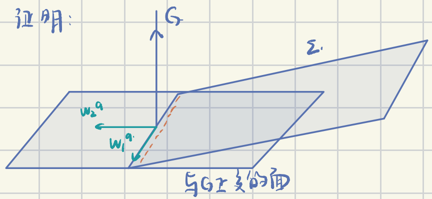
由于在宇宙尺度下，每一星系都很小，每一星系可「近似」地视为各向同性观者。

*有人认为：$\psi^* g_{ab} w_1^a w_1^b = g_{ab} w_2^a w_2^b$，加上 w_1^a, w_2^a 单位条件，是否直接保证 $\psi^* g_{ab} = g_{ab}$？不行，因为这需要适用所有可能的 w_1^a、w_2^a，而对于 ψ 来说，我们只有了一组。



<u>Thm 1.</u> 若空间均匀各向同性时空有唯一的均匀面族，则均匀面必处处与各向同性观者正交。

证明：



(反证法) 设 Σ 为含 p 的均匀面，但它与 G 在 p 处的4-速 Z^a 不正交。取 w_1^a, w_2^a 为 p 处两个空间矢量，其中 w_1^a 切于 Σ，而 w_2^a 不切于 Σ。设 ψ 是等度规映射，$\psi^* g_{ab} = g_{ab}$，则 $\psi[\Sigma]$ 也为均匀面。

由于 ψ 有三个性质，利用 $\psi(p) = p \Rightarrow p \in \psi[\Sigma]$。则 $p \in \Sigma \cap \psi[\Sigma]$

Σ、$\psi(\Sigma)$ 都为过 p 点的均匀面，利用 Σ_t 之间的不相交性与唯一性，有 $\Sigma = \psi(\Sigma)$。

利用"曲线切矢的像等于曲线像的切矢"，显然发现 $\psi_* w_1^a \neq w_2^a$。($\psi_* w_1^a$ 应切于 Σ)。

主要证明思路是反证法，通过选择一个假设的不正交的均匀面和真正正交之面上的矢量，证明 ψ 作用在它上面只能得到一个沿着它方向的矢量，从而不满足 $\forall w_1, w_2$ 都有 $\psi_* w_1 = w_2$ 的定义。

此后我们默认宇宙的均匀面族为唯一的。从而我们甚至可以对宇宙做最简单的3+1分解。

下面继续研究由"唯一一组均匀面和唯一一组各向同性观者"带来的结论。

首先，简单地，我们先来说明若 Σ 为均匀面，则 $\psi(\Sigma)$ 必为均匀面。在 Σ 面上 $\forall p, q$，有 Isometry $\phi(p) = q$，且 $(\phi_* h_{ab}|_p) = h_{ab}|_q$。

设存在我们有 $\psi(p) = p'$，$\psi(q) = q'$，且 $\psi_* g_{ab}|_p = g_{ab}|_{p'}$，$\psi_* g_{ab}|_q = g_{ab}|_{q'}$

下面证宇宙的均匀面有常曲率。proof sketch: $\hat{R}_{ab}{}^{cd}: \Lambda_p(2) \to \Lambda_p(2)$。("张量面曲率")。且 $\Lambda_p(2)$ 三维，从而 $\hat{R}_{ab}{}^{cd}$ 在给定基底下对应 3×3 阶 L。它是对称的，因而可对角化，并可证其对角元相等。从而 $L = 2kI$。I 对应 $\delta_a{}^{[c} \delta_b{}^{d]}$ 这个张量，从而 $\hat{R}_{ab}{}^{cd} = 2k\, \delta_a{}^{[c} \delta_b{}^{d]}$。用 $h_{ce} h_{df}$ 降指标即可。

先证它对称，首先需要定义度规 g_{ab} 的 $\Lambda_p(2)$ 上的 $L^a{}_b$ 满足 $L_{ab} = L_{ba}$。取组正交归一基，这样我们有 $L^\mu{}_\nu = L_{\mu\nu}$，从而 L_{ab} 的对称性自动保证 $L^\mu{}_\nu$ 的对称性。类比一下，现在要将此结论用在 $\Lambda_p(2)$，只需在 $\Lambda_p(2)$ 上定义度规 $(X, Y) = X^{ab} Y_{ab}$，其中 $X^{ab} = h^{ac} h^{bd} X_{cd}$，仿照以往证明即可。

⚠ 我们说过这是在流形上一点的 $\Lambda_p(2)$，所以，当然可以随便找一组基，把度规正交归一了。

由于对角元上是本征值，所以现在要证：若 Y_{ab}、Y'_{ab} 为 $\hat{R}_{ab}{}^{cd}$ 的那二本征矢，λ、λ' 为本征值，则 $\lambda'=\lambda$.

(Σ_t, h_{ab}) 为 3D Riemann 流形，以 W_p 代表 $p\in\Sigma_t$ 之切空间，则 $(W_p, h_{ab}|_p)$ 为正定度规的 3D vector space. 取 $Y_{ab}\in\Lambda_p(2)$，其 Hodge 对偶 $w_c = Y^{ab}\,\hat{\epsilon}_{abc}\cdot\frac{1}{2}$.

$w_c = Y_{ab}\,\hat{\epsilon}^{ab}{}_c$. 或 $w_a = Y_{bc}\,\hat{\epsilon}^{bc}{}_a$ 用 h_{cd} 升：$w^a = Y_{bc}\,\hat{\epsilon}^{bca}$ 将 a 前移两次有 $w^a = Y_{bc}\,\hat{\epsilon}^{abc}$，$w'^a = Y'_{bc}\,\hat{\epsilon}^{abc}$

由于要一变本征矢长度对本征值没影响，所以不失一般性地令 w_a, w'_a 等长. 从而存在 $\psi: M\to M$，使 $\psi(p)=p$ 且 $\psi_* w^a = w'^a$. 由各向同性之定义与 ψ 的等度规性，不难证明，

$\psi:\Sigma_t\to\Sigma_t$ 为 isometry. $\psi_* h_{ab}=h_{ab}$，从而 $\psi_*\hat{\epsilon}_{cab}=\hat{\epsilon}_{cab}$，$\psi_*\hat{R}_{ab}{}^{cd}=\hat{R}_{ab}{}^{cd}$，从而

$\psi_* Y_{ab} = \psi_*(\hat{\epsilon}_{cab}w^c) = \psi_*(\hat{\epsilon}_{cab})\,\psi_*(w^c) = \hat{\epsilon}_{cab}\,\psi_* w^c = \hat{\epsilon}_{cab}\,w'^c = Y'_{ab}$.

（推前/拉回与缩并可换序）

*"ψ 的局域性"最好用的地方在于可选择 $\psi[\Sigma_t]=\Sigma_t$.
从而可将 ψ 视作 Σ_t 上 g_{ab} 的等度规映射.

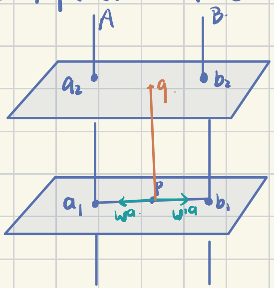
$\psi_*(\hat{R}_{ab}{}^{cd}\,Y_{cd}) = \psi^*(\lambda Y_{ab}) \to \lambda Y'_{ab}$

$\psi_*\hat{R}_{ab}{}^{cd}\ \psi_* Y_{cd} = \underset{\text{isometry}}{\hat{R}_{ab}{}^{cd}}\ Y'_{cd} = \lambda' Y'_{ab}$

从而得证.

*这里的主要技巧是利用对偶从 Y_{ab} 构造 w^c. 从而可以用上各向同性的定义得到 $\psi_* Y_{ab}=Y'_{ab}$

另一个命题是存在从宇宙学原理及宇宙有唯一均匀面族的情形下，所各同性者在两个均匀面间的世界线等长.



承认 Riemann 几何的定理：空间中任一点都有所谓"凸邻域"，其中任意两点间有唯一测地线.

设 b_1 在 a_1 凸邻域内，将 $a_1\to b_1$ 的测地线记作 $\gamma(l)$，其中 l 为线长参. 设 p 为 l 之中点，令 $w^a=-w'^a=-(\frac{\partial}{\partial l})^a|_p$，则 w^a, w'^a 均归一.

由各向同性，存在 isometry ψ，使 $\psi(p)=p$，$\psi_* w^a = w'^a$，$\psi[\Sigma_{t_1}]=\Sigma_{t_1}$.

由于测地线及其线长都以度规衡量，所以不难相信 isometry 将测地线映至测地线，将曲线映至与之等长的曲线.

设它将曲线从 $\gamma(l)$ 映至 $\gamma'(l)$，$l\in[0,1]$.

则两曲线长为：$\int\sqrt{g_{ab}|_p(\frac{d}{dl})^a(\frac{d}{dl})^b}\,dl$

$\int\sqrt{g_{ab}|_q(\phi_*(\frac{d}{dl}))^a(\phi_*(\frac{d}{dl}))^b}\,dl$

等度规保证了 $g_{ab}|_p=(\phi^* g_{ab})|_q$，因而它确实将曲线映至长度相同的曲线

回原问题，从而 $\psi[\gamma_{pa_1}]=\gamma_{pb_1}$，$\psi[a_1]=b_1$，对线上之点都如此，从而 $\psi[A]=\psi[B]$.

（"一点一线一测"）

设过 p 的类时测地线过 q，则 $\tau(q)-\tau(p)=\underbrace{\tau(\psi(q))-\tau(\psi(p))}_{\text{又用了上面结论}}=\tau(\psi(q))-\tau(p)$，从而只有 $\psi(q)=q$. 又由均匀面唯一性，$\psi[\Sigma_{t_2}]=\Sigma_{t_2}$.

由于 $\psi[A]=B$，且 $\psi[\Sigma_{t_2}]=\Sigma_{t_2}$，故只有 $\psi(a_2)=b_2$. 从而 $\begin{cases}\psi[a_1]=b_1\\ \psi[a_2]=b_2\\ \psi[A]=B\end{cases}$ 三者结合可得欲证.

Day 76.

Def 1. 广义 Riemann 空间称为常曲率空间，若 $\forall$ 常数 K，使 Riemann 张量满足 $R_{abcd} = 2K g_{c[a} g_{b]d}$

常曲率性质：① 有最高对称性，独立 Killing vector 有 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个。

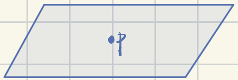
② 流形维数、度规号差和 K 值相同的两个常曲率空间的（局域上的）几何相同，或者说（局域）等度规。

在宇宙学中，$M \to \Sigma_t$，$g_{ab} \to h_{ab}$，我们有：

Thm. 1 设 h_{ab} 为宇宙时空度规 g_{ab} 在 Σ_t 上诱导度规，$\hat{R}_{abc}{}^{d}$ 为 h_{ab} 的曲率张量，$\hat{R}_{abcd} = h_{de}\hat{R}_{abc}{}^{e}$，则 $\forall K$，$\hat{R}_{abcd} = 2K h_{c[a}h_{b]d}$。

Pf.

Sketch



(Σ_t, h_{ab}).

从 $\Lambda_p(2)$ 代表 p 点全体 2-form 之集合 $\left[\dim \Lambda_p(l) = \frac{n!}{l!(n-l)!}\right.$，从而 $\left.\dim\Lambda_p(2) = 3\right]$ 取 $\forall Y_{cd} \in \Lambda_p(2)$，易知 $\hat{R}_{ab}{}^{cd} Y_{cd} \in \Lambda_p(2)$，从而 $\hat{R}_{ab}{}^{cd}: \Lambda_p(2) \to \Lambda_p(2)$。

$\hat{R}_{ab}{}^{cd}$ 是 3 维 vector space → 3 维 vector space 的线性变换，选一组基后 $\hat{R}_{ab}{}^{cd}$ 将给出 3×3 matrix。利用 $\hat{R}_{abcd} = \hat{R}_{cdab}$，可推出 $\hat{R}_{ab}{}^{cd}$ 对应对称阵。

从而 $\hat{R}_{ab}{}^{cd}$ 可对角化到 diag (L_{11}, L_{22}, L_{33})。利用各向同性性（均匀面族的唯一性）可导出 $L_{11} = L_{22} = L_{33}$。从而可写成 $\underline{L = 2KI}$。

单位阵对应哪个 Tensor？对应一个恒等变换 $\delta_a{}^{[c}\delta_b{}^{d]}$（关于 ab/cd 反称），从而有 $\hat{R}_{ab}{}^{cd} = 2K\,\delta_a{}^{[c}\delta_b{}^{d]}$。再利用 $h_{ce}h_{df}$ 降指标，而可得 $2K\delta_a{}^{[c}\delta_b{}^{d]}h_{ec}h_{df} = 2Kh_{e[a}h_{b]f}$。

显然，此时，这些空间的几何只取决于 K 值：$K=0$、$K>0$、$K<0$。对平直度规我们有 $\hat{R}_{abc}{}^{d} = 0$，从而 $K=0$ 时的空间线元借卡氏坐标表为 $(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$

考虑 $K>0$（正曲率），此时可被看作 $(\mathbb{R}^4, \delta_{ab})$ 中嵌入的 3 维球面，一个熟悉的常曲率空间。$(\mathbb{R}^3, \delta_{ab})$ 中嵌入的二维球面，借球坐标，它上面的线元写作 $(dl)^2 = (d\theta)^2 + \sin^2\theta (d\varphi)^2$。

推广：$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2$，于是可以定义 $\mathbb{R}^4$ 中的球坐标 R, ψ, θ, φ。

$$
\begin{cases}
x = R\sin\psi\,\sin\theta\cos\varphi \\
y = R\sin\psi\,\sin\theta\sin\varphi \\
z = R\sin\psi\cos\theta \\
w = R\cos\psi
\end{cases}
$$

算出 3D 球面上诱导的线元为：

$(dl)^2 = R^2\left[(d\psi)^2 + \sin^2\psi\left((d\theta)^2 + \sin^2\theta\,(d\varphi)^2\right)\right]$ → $\hat{R}_{ab}{}^{cd} = 2R^{-2}\,\delta_a{}^{[c}\delta_b{}^{d]}$

对于 $K<0$ 的时候，它可类比常见的双曲面，考虑 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 中嵌入的 3D 双曲面 $t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \bar{\xi}^2$，可引入所谓「双曲坐标」$\{t, x, y, z\} \to \{\xi, \psi, \theta, \varphi\}$。

$$
\begin{cases}
x = \xi\,\mathrm{sh}\psi\,\sin\theta\cos\varphi \\
y = \xi\,\mathrm{sh}\psi\,\sin\theta\sin\varphi \\
z = \xi\,\mathrm{sh}\psi\cos\theta \\
t = \xi\,\mathrm{ch}\psi
\end{cases}
$$

从中易计算得到 $(dl)^2 = \bar{\xi}^2\left[d\psi^2 + \mathrm{sh}^2\psi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)\right]$ → $\hat{R}_{ab}{}^{cd} = -2\bar{\xi}^{-2}\,\delta_a{}^{[c}\delta_b{}^{d]}$

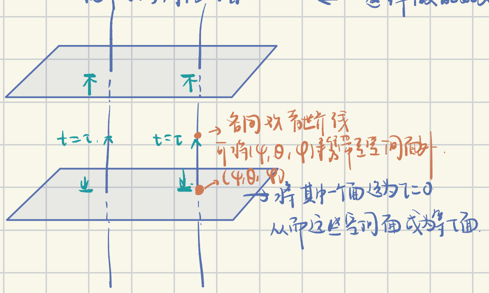
（曲面上 $\xi = \bar{\xi} = \text{const}$）。

⚠ 宇宙是有限的还是无限的？显然，正曲率宇宙是有限的，而零曲率和负曲率宇宙是无限的。

以及，上面我们研究常曲率曲面，是通过在 $(\mathbb{R}^4, \delta_{ab})$ 或 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 中找嵌入面→诱导度规，这只是一种方便我们写出坐标并找到诱导度规的方式，不是说宇宙几何为 $(\mathbb{R}^4, \delta_{ab})$ 或 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$。

显然，宇宙的度规不可能是 $(\mathbb{R}^4, \delta_{ab})$ 或 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$，那么如何根据空间曲面上的度规推出全局度规？

不失一般性，在 M 上取坐标 $\{t, x^i\}$，有 $(ds)^2 = g_{\mu\nu}(dx)^\mu(dx)^\nu = g_{00}(dt)^2 + 2g_{0i}(dt)(dx^i) + g_{ij}(dx^i)(dx^j)$. 问题是，我们要选何种坐标表示这个线元？



⇐ 这样做的好处：① 等t面与均匀面重合，从而每一t的面确实代表宇宙在t时刻的空间.

② 各向同性观者世界线作为坐标线.

易知 $g_{00} = g_{ab}(\frac{\partial}{\partial t})^a(\frac{\partial}{\partial t})^b = g_{ab}Z^aZ^b = -1$. $g_{0i} = g_{ab}(\frac{\partial}{\partial t})^a(\frac{\partial}{\partial x^i})^b = 0$ (利用 $(\frac{\partial}{\partial t})^a$ 与 $(\frac{\partial}{\partial x^i})^a$ 的正交性)

由于 h_{ab} 为 g_{ab} 的 induced metric. $g_{ij} = g_{ab}(\frac{\partial}{\partial x^i})^a(\frac{\partial}{\partial x^j})^b = h_{ab}(\frac{\partial}{\partial x^i})^a(\frac{\partial}{\partial x^j})^b = h_{ij}(t,x) \xlongequal{分离变量} \hat{h}_{ij}(x)\cdot a^2(t)$

不难相信，两个各向同性观者，在两个均匀面之间的世界线长度同样长.

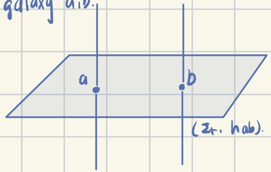
Day . 78.

我们已经把度规推广了. $(ds)^2 = -(dt)^2 + a^2(t)\hat{h}_{ij}(x)(dx^i)(dx^j)$. 将三种情形的空间度规代入. 由于对每一个时间为常数. 不妨将其吸收入 $a(t)$ 中. 从而我们有:

$$ds^2 = dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\right]$$

其中 $r = \begin{cases} \sin\psi \\ \psi \\ \sinh\psi \end{cases}$ $k = \begin{cases} +1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$. $a(t)$ 的变化是时间演化, 需要宇宙动力学. $a(t)$ 被称作尺度因子 (scale factor).

galaxy a.b.



定义星系 a.b 的距离: $\begin{cases} h_{ab} \text{ 正定} \Rightarrow \text{曲线长度的下确界?} \\ h_{ab} \text{ 是 } (-1,+,+,+) \Rightarrow \text{找不到最短线.} \end{cases}$

因此「距离」这一定义是模糊的. 取 $\gamma(\lambda)$ 为 a,b 间的测地线. a.b 间的距离解释为 $D_{AB}(t) = \int_{l_1}^{l_2} \sqrt{h_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^b}\, dl$.

由于 h_{ab} 可分离变量. $\Rightarrow D_{AB}(t) = a(t)\hat{D}_{AB}$ $\hat{D}_{AB} = \int_{l_1}^{l_2} \sqrt{\hat{h}_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^b}\, dl$.

这可以解释为: $\hat{D}_{AB}$ 为测量星系距离的单位. 而宇宙"膨胀"或"收缩"对星系间距离的影响写在 $a(t)$ 中.

对于正曲率情形: 考虑"3维球"的体积. $V = \int \hat{\epsilon}_{abc}$. $\hat{\epsilon}_{abc} = \sqrt{|h|}\, d\psi\wedge d\theta\wedge d\varphi = a^3 \sin^2\psi \cdot \sin\theta\, d\psi\wedge d\theta\wedge d\varphi$. $\Rightarrow V = \int \hat{\epsilon} = a^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{\pi} \sin^2\psi\, d\psi = 2\pi^2 a^3$.

此时「$a(t)$ 的增长」和「3维球体积的增大」是同一件事情.

美国天文学家 Slipher 观测了星系光谱红移率 $z = \frac{1}{\lambda}(\lambda' - \lambda)$. Hubble 发现 $z \propto D$. 由于 $z = \frac{\omega}{\omega'} - 1 = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}} - 1 \propto u$. $\Rightarrow u_0 = H_0 \cdot D_0$. H_0 代表"当今".

Day. 79.

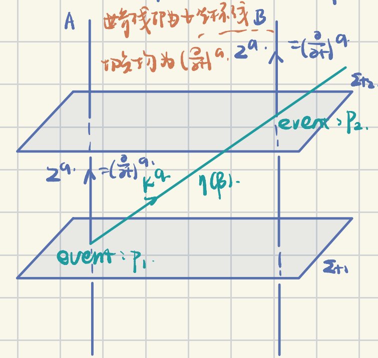
我们现在推导 Hubble's Law. 定义两个星系的相对速率 $u(t)=\frac{dD(t)}{dt}$, $D(t)$为两个星系间距离. 根据之前的RW度规. 我们有 $D(t)=a(t)\cdot\hat{D}$.

从而 $u(t)=\frac{dD(t)}{dt}=\hat{D}\frac{da(t)}{dt}=\frac{D(t)}{a(t)}\cdot\frac{da(t)}{dt}=\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}D(t)$. 记 $H(t)=\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$. 其中 t 为与唯一与Σ正交的世界线确定的

对 $u(t_0)=H_0\cdot D(t_0)$. 任意两个星系间的距离都在上升. 谈论哪个星系是平权的. 没有一个是这个膨胀中心.

⚠ 在 $D(t_0)$ 足够大. $u(t_0)$ 可超光速. 这与相对论的假设不矛盾. 从四维来看. 每一星系的 world line 都 timelike. 从三维: 这里的 $u(t)$ 并非观者对星系做当时当地测量的结果.

下面我们解释红移效应. 它并非狭相中多普勒效应. 而是由时空弯曲导致的. (在D维情形下. 就作多普勒红移并不可)



这里频率是 observer-dependent 的. 它是波矢与观者世界线切矢之内积. 在几何下 $\omega_1=-g_{ab}Z^aK^b$. $K^b=(\frac{\partial}{\partial\beta})^b$.

在RW框架下. 有: $K^b=(\frac{\partial}{\partial t})^b(\frac{dt}{d\beta})+(\frac{\partial}{\partial x^i})^b(\frac{dx^i}{d\beta})$. 由于 $(\frac{\partial}{\partial x^i})^a$ 与 $(\frac{\partial}{\partial t})^a$ 正交. 从而 $\omega_1=\frac{dt}{d\beta}|_{p_1}$.

我们应求光子测地线 $x^\mu(\beta)$. $\frac{d^2x^\mu}{d\beta^2}+\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{d\beta}\cdot\frac{dx^\sigma}{d\beta}=0$.

$$\begin{cases}\frac{d^2\theta}{d\beta^2}+2\cdot\frac{\dot{a}}{a}\cdot\frac{dt}{d\beta}\cdot\frac{d\theta}{d\beta}+\frac{2}{r}\cdot\frac{dr}{d\beta}\cdot\frac{d\theta}{d\beta}-\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{d\beta}\right)^2=0\\ \frac{d^2\varphi}{d\beta^2}+2\cdot\frac{\dot{a}}{a}\frac{dt}{d\beta}\frac{d\varphi}{d\beta}+\frac{2}{r}\cdot\frac{dr}{d\beta}\frac{d\varphi}{d\beta}+2\cot\theta\cdot\frac{d\theta}{d\beta}\cdot\frac{d\varphi}{d\beta}=0\end{cases}$$

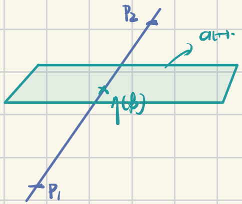
Day 80.

而在一张2维曲面上，{θ, φ, ψ}有相当大的任意性，下面对于任意 geodesic，我们重选坐标使 $k^a|_{p_1}$ 在 $(\frac{\partial}{\partial\theta})^a$ 和 $(\frac{\partial}{\partial\varphi})^a$ 的分量为0.（类比：3D中一个矢量，投在2D上）.

或另一个说法：$k^a|_p$ 在切曲面上投影，恰为 $(\frac{\partial}{\partial r})^a$，且三根基矢互相正交。根据上面的两方程，这个测地线可一直保持 $\theta=\theta_0$, $\varphi=\varphi_0$.

$\Rightarrow k^a = (\frac{\partial}{\partial t})^a \frac{dt}{d\beta} + (\frac{\partial}{\partial r})^a \frac{dr}{d\beta}$. 为了把线元补中 $\mu=0$ 有：$\Gamma^0{}_{11} = \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}$ $\Rightarrow \frac{d^2t}{d\beta^2} + \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}(\frac{dr}{d\beta})^2=0$. 利用类光条件，$0=g_{ab}[(\frac{\partial}{\partial t})^a(\frac{dt}{d\beta})+(\frac{\partial}{\partial r})^a(\frac{dr}{d\beta})][\quad{}^b \quad{}^b\quad]$

$\Rightarrow g_{00}(\frac{dt}{d\beta})^2 + g_{11}(\frac{dr}{d\beta})^2 = 0 \Rightarrow -(\frac{dt}{d\beta})^2 + \frac{a^2}{1-kr^2}(\frac{dr}{d\beta})^2 = 0$ 利用 $\omega_1 = \frac{dt}{d\beta}|_{p_1}$ $\Rightarrow \frac{d\omega}{d\beta} + \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}(\frac{dr}{d\beta})^2 = \frac{d\omega}{d\beta} + \frac{\dot{a}}{a}\frac{dt}{d\beta}\cdot\omega$

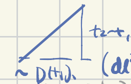


$\frac{d\omega}{d\beta} + \frac{\dot{a}}{a}\cdot\frac{dt}{d\beta}\omega = \frac{d\omega}{d\beta} + \frac{\omega}{a}\frac{da}{dt}\cdot\frac{dt}{d\beta} = \frac{d\omega}{d\beta} + \frac{\omega}{a}\cdot\frac{da}{d\beta} = 0.$ $\Rightarrow \frac{1}{\omega}\cdot\frac{d\omega}{d\beta} = -\frac{1}{a}\cdot\frac{da}{d\beta}$, $\frac{d\ln\omega}{d\beta} = \frac{d\ln a^{-1}}{d\beta} \Rightarrow \omega = \omega_0 a^{-1}$.

Thm 1. Hubble's Law 精确表述.

<对于宇宙中所有各向同性观者，对光子做当时当地观测，则观测到的频率与该观者做观测时所处同时面的尺度因子成反比，$\omega = \omega_0 a^{-1}$>.
$f = f_0 \cdot a$

$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{a(t_2)}{a(t_1)}$ $\quad a(t_2) \simeq a(t_1) + \dot{a}(t_1)(t_2-t_1)$. 由光子世界线的类光性，



$(dl^2-dt^2=0)$. $\quad a(t_2) \approx a(t_1) + \dot{a}(t_1)D(t_1)$

$\Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = 1 + \frac{\dot{a}(t_1)}{a(t_1)}D(t_1) = 1 + H(t_1)\cdot D(t_1)$. *用一句比较「好玩」的话来解释：红移的「直接」原因是光子跨越了时间

现在我们准备解场方程。$G_{ab} = 8\pi T_{ab}$. G_{ab} 中有 $a(t)$, $\dot{a}(t)$. 现在写出 T_{ab}. 宇宙中有什么东西（内容物 Contents）对 T_{ab} 有贡献？

- matter.（物质）.
- radiation（辐射）.
- Dark Energy（暗能量）.

Day 81.

物质对 T_{ab} 的贡献：星系组成的整体可被视作尘埃。对于某一四速为 U^a 的各向同性者，他测出的物质能量密度为 ρ_m，则 $T_{ab}(\text{matter}) = \rho_m U_a U_b$.

对于辐射（视作光子气）可以找到一个各向同性参考系。假定相信宇宙中各向同性者亦为上面电磁场的各向同性者，从而 $T_{ab}(\text{rad}) = \rho_R U_a U_b + p(g_{ab} + U_a U_b)$. $p = \rho_R/3$.

⇒ $T_{ab} = (\rho_m + \rho_R) U_a U_b + p(g_{ab} + U_a U_b)$. 取RW系. $T_{00} = T_{ab} U^a U^b = (-1)\cdot(-1)\cdot\rho = \rho$. $T_{ij} = T_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^b = p\cdot g_{ij}$ $g_{11} = a^2(1-kr^2)^{-1}$. $g_{22} = a^2 r^2$. $g_{33} = a^2 r^2 \sin^2\theta$.

同时可给出 G_{ab} 的非零分量. $G_{00} = \frac{3(\dot a^2 + k)}{a^2}$ $G_{ij} = -\left(\frac{2\ddot a}{a} + \frac{\dot a^2 + k}{a^2}\right) g_{ij}$.

Thm 1 Friedmann Eq:
$$\begin{cases} 3\dfrac{\dot a^2 + k}{a^2} = 8\pi\rho. & (1) \\ 2\dfrac{\ddot a}{a} + \dfrac{\dot a^2 + k}{a^2} = -8\pi p. & (2) \end{cases}$$
注意到两式中有相同的项，从而有：$3\ddot a = -4\pi a(\rho + 3p)$. $\rho > 0$, $p \geq 0$ $a > 0$

⇒ $\ddot a < 0$. 宇宙应减速膨胀. 并且宇宙或膨胀 $(\dot a > 0)$ 或收缩 $(\dot a < 0)$. 并没有静态宇宙.

→ 宇宙不断缩小，并在某一时刻 $(t=0)$ 达到 $a(0) = 0$. 此时宇宙大小为0，密度无限大. 称为大爆炸奇点 (big bang singularity).

对上面的第一个式子求导得：$6\dot a\ddot a = 16\pi\rho a\dot a + 8\pi\dot\rho a^2$ ⇒ $(-4\pi a(\rho + 3p))\dot a = 8\pi\rho a\dot a + 4\pi\dot\rho a^2$ ⇒ $\dot\rho a^2 = -3a\dot a(\rho + p)$ (3)

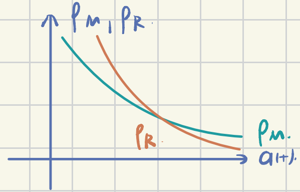
可验证 (2) 可由 (1)(3) 导出（换言之，我们可将 (2) 以 (3) 等价替代）、所以下面我们用 (1)(3)（只有一阶导）. 我们分两种近似：① 只有 matter $p = 0$ ② 只有 radiation $p = \frac{1}{3}\rho$.

尘埃宇宙：$\frac{d\ln\rho}{dt} = \frac{d\ln a^3}{dt}$ ⇒ $\rho \propto a^{-3}$. <体积以 a^3 增大>.

辐射宇宙：$\dot\rho = -4\frac{\dot a}{a}$ ⇒ $\rho \propto a^{-4}$. <这是由于辐射导致的，宇宙膨胀导致你在 t 时刻对同一光子作测时，它的频率有 $\omega = \omega_0 a^{-1}$>.
（不仅光子数密度以 a^{-3} ↓，能量还以 a^{-1} ↓）.

Day 82.

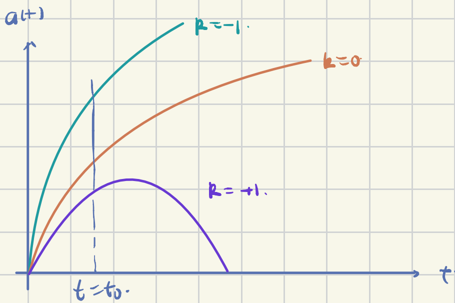
由于 $\rho_m \propto a^{-3}$ $\rho_R \propto a^{-4}$.



现在的宇宙中 $\rho_m > \rho_R$，而在极早期宇宙中 $\rho_R > \rho_m$.

现在考虑 $\dot a^2 = \frac{8\pi}{3}\rho a^2 - k$. 而在辐射宇宙中, $B^2 = \frac{8}{3}\pi\rho a^4 = Const$. $\dot a^2(t) = B^2 a^{-2}(t) - k$. $(a\dot a)^2 = B^2 - ka^2$. let $b(t) = a^2(t)$.

then $\dot b^2(t) = 4B^2 - 4k\,b(t)$. 可以解出 $b(t) = 2Bt - kt^2$.



下面看 dust universe. 现在 $A = \frac{8}{3}\pi\rho a^3 = Const$. $\Rightarrow \dot a^2(t) = A a^{-1}(t) - k$. let $\hat t(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}$. $\Rightarrow \dot a(t) = \frac{da}{dt} = \frac{da}{d\hat t}\cdot\frac{d\hat t}{dt} = a'\cdot\frac{1}{a(t)} = a'\cdot\frac{1}{a(\hat t)}$.

$\frac{da}{d\hat t}$ 这里换了一下变量.

从而上面的方程可以换元写为: $a'^2(\hat t) = A a(\hat t) - k\cdot a^2(\hat t)$.

$$\begin{cases} a = A(1-\cos\hat t)/2. & t = A(\hat t - \sin\hat t)/2. \\ a = (9A/4)^{1/3} t^{2/3}. & \\ a = A\cdot(\operatorname{ch}\hat t - 1)/2. & t = A(\operatorname{sh}\hat t - \hat t)/2. \end{cases}$$

*在求解时，须注意区分 a. 这里面 a 分为 $a(t)$ 和 $a_t(\hat t)$ 实际上 $a_t = a\circ\hat t$.

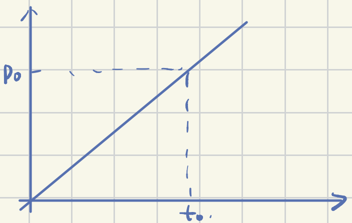
[历史注记]. Friedmann 给出以上物质宇宙的结果，他向杂志投稿时，Einstein 给予了其否定意见。

这是由于 Einstein 先验地认为宇宙是静态的，他甚至不惜修改自己的场方程，来使得场方程给出静态宇宙。

后来 Einstein 在听取他人意见后打算放弃宇宙因子项，但直言这是他"一生中最大的错误"。后来宇宙因子几起几落，数度浮沉。

Day. 83.

在辐射-物质都存在时，方程不好求解，但可以做定性分析。发现 $a(t)-t$ 的曲线大致符合上面的图。在解出 $a(t)$ 后，我们可谈及宇宙的年龄。
作为一个粗糙近似，我们认为宇宙匀速膨胀，则两星系间距离将匀速增加。



由 Hubble's Law: $t_0 = \frac{D_0}{u_0} = \frac{D_0}{H_0 D_0} = H_0^{-1}$.

依据"减速膨胀"的推论，我们知道 $t_0 < H_0^{-1}$，实测结果中 $H_0 = \frac{20\ \mathrm{km/s}}{\text{百万光年}} \Rightarrow H_0^{-1} = 135$亿年。

下面我们讨论 Einstein"一生中最大的错误"：宇宙学常数与静态宇宙。

据上一章推出的结果 $\begin{cases} 3(\dot a^2+k)/a^2 = 8\pi\rho \\ 2\ddot a/a + (\dot a^2+k)/a^2 = -8\pi p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3k = 8\pi\rho a^2 \\ k = -8\pi p a \end{cases}$

改写 将 $G_{ab} = 8\pi T_{ab}$ 改为 $\tilde G_{ab} = 8\pi T_{ab}$。且该方程还必须满足：$\tilde G_{ab} = \tilde G_{ba}$ $\nabla^a \tilde G_{ab} = 0$.

满足这一约束的 $\tilde G_{ab}$ 只可为 G_{ab} 和 g_{ab} 的线性组合 $\Rightarrow \tilde G_{ab} = G_{ab} + \lambda g_{ab}$. 从而改写作：$G_{ab} = 8\pi(T_{ab} - \frac{\Lambda}{8\pi} g_{ab})$.

Einstein 猜入 $<< 1$？从而附加项只在宇观尺度上起效？ 作为变换于我们新方程的物理意义，将原 T_{ab} 记作 $\bar T_{ab}$，新 T_{ab} 直接记作 T_{ab}.

从而 $\begin{cases} \rho = T_{00} = \bar T_{00} - \Lambda g_{00}/8\pi \Rightarrow \bar\rho + \Lambda/8\pi. \\ p\cdot g_{ij} = T_{ij} = \bar T_{ij} - \Lambda g_{ij}/8\pi = -\Lambda g_{ij}/8\pi. \end{cases}$ $\Rightarrow$ 这相当于我们在宇宙中加入了"负压强"的物质。

从而还有 $\begin{cases} 3k = 8\pi a^2(\bar\rho + \frac{\Lambda}{8\pi}) \\ \Lambda = k a^2 \end{cases} \Rightarrow 2k = 8\pi a^2 \bar\rho \Rightarrow k = +1.\ a^2 = \frac{1}{4\pi\bar\rho}$ 通过引入宇宙学常数，我们在三个情形中"锁定"了一种！

⚠ 但是，这是一个不稳定静态解。