Day 66.

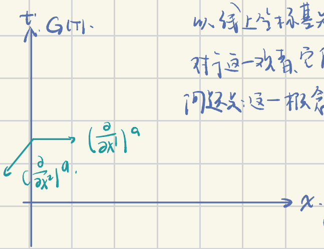
考虑 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$、给定惯性坐标系 $\{x^\mu\}$

t. $G(T)$、

以线上坐标基矢场 $\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a$ 作为4-标架.

对于这一观者、它的 $A^a=0$、$\omega^a=0$.

问题是: 这一概念能多大程度上推广到弯曲时空?



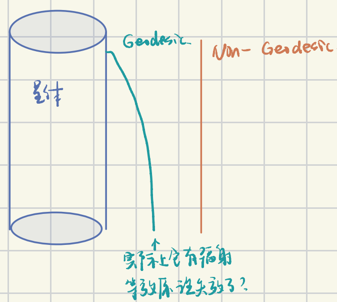
惯性观者 → 自由下落的无自转观者.

$(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 上全局惯性系 → $G(T)$ 的局部坐标系.

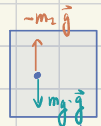
$(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$.

等效原理的反例: 带电粒子辐射 —— 相对于惯性系为一a, 则无辐射(惯性观者)、而非惯性观者有辐射.

└ Schwartz 时空.



Einstein Elevator:

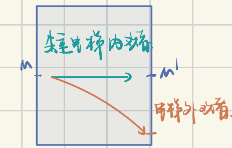


↓相对于惯性系以 $\vec{g}$ 下落的电梯

$m_G=m_I$: 电梯内的一切力学实验与远离星体的惯性飞船内相应结果一样. (弱等效, WEP).

推广: 任何力学实验 ⇒ 任何非引力的物理实验 (Einstein Equivalence Principle).

利用爱因斯坦电梯推导光线在引力场中弯曲



WEP → 所有引力理论满足.

EEP → 只有度规引力论成立

SEP (包含自引力系统的等效原理) → 非GR不可. (?).

Day 67

为什么 测地线 无自转观者的固有坐标系 称为"局部惯性系"

Theorem 1. $G(\tau)$ 为弯曲时空中自由下落无自转观者，则在 $G(\tau)$ 的固有系中，$g_{\mu\nu}|_p=\eta_{\mu\nu}$. $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}|_p=0$.

按最小替换法则，Maxwell方程和洛伦兹力在弯曲时空中的形式为: $\nabla^a F_{ab}=-4\pi J_b$. $\nabla_{[a}F_{bc]}=0$. $qF^a{}_b U^b=\frac{Dp^a}{d\tau}$.

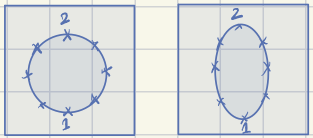
$F^{\mu}{}_{\nu;\mu}=-4\pi J_\nu$. $F_{[\mu\sigma;\rho]}=0$. $qF^\mu{}_\nu U^\nu \Rightarrow (dx^\mu)\ \frac{Dp^a}{d\tau}=\frac{Dp^\mu}{d\tau}=\frac{dp^\mu}{d\tau}+\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}U^\nu p^\sigma$.

容易看出，在 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}|_p=0$ 的情形下，以上弯曲时空的物理定律退化至狭义相对论中形式。这正是之前爱因斯坦电梯中的观察。从而以上推导直接给出 Einstein 等效原理

$R_{\mu\nu\sigma}{}^{\rho}=(-2\partial_{[\mu}\Gamma^\rho{}_{\nu]\sigma}+2\Gamma^\lambda{}_{\sigma[\mu}\Gamma^\rho{}_{\nu]\lambda})$ 且有在p点，有 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}|_p=0$. 故 $\partial\Gamma\neq0$. 从而R一般不为0. → Γ依赖于系，可通过选系使其在线上点点为0。但R是绝对的，不可通过换系使之为0.

我们说"在自由下落电梯内实验结果与在太空飞船中一致"，这是一个近似，因为电梯涉及的时空范围很小。 如何观察到这个"近似"？

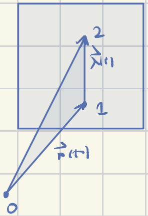
8个小球



"潮汐力" 简单来看，一天两次涨潮两次退潮。

Day 68.

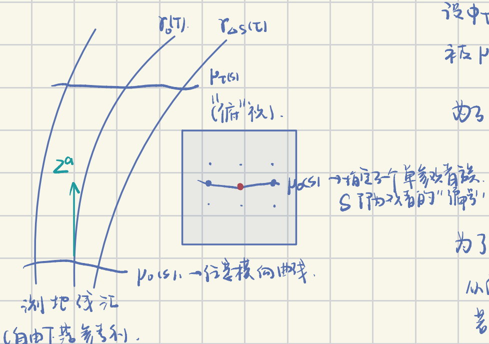
我们先使用牛顿的引力理论对潮汐力做些讨论。考虑一个地球引力场中自由下落的电梯，其中处处充满小球。



我们求两球的相对加速度。$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\Big|_{\vec{r}}$.

$$\frac{d^2(x^i+\lambda^i)}{dt^2} = -\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\Big|_{\vec{r}+\vec{\lambda}} = -\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\Big|_{\vec{r}} - \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\Big|_{\vec{r}}\lambda^j.$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\lambda^i}{dt^2} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x^j}\lambda^j$$



设 ϕ_τ 为 Z^a 对应的单参数的一个族，则 ϕ_τ 可以作用在 $p_0(s)$ 上任意点上，得到 $p_\tau(s)$。

被 $p_0(s)$ "选中"的测地线铺出 2D 流形 $\mathcal{S}$，称为一个单参测地线族。$\mathcal{S}$ 的坐标基矢 $Z^a = (\frac{\partial}{\partial\tau})^a$，$\eta^a = (\frac{\partial}{\partial s})^a$。它们对易。

为了有更好的物理解释，我们要求 η^a、Z^a 在一点上正交，可证明它们点点正交。

$$Z^b D_b(\eta^a Z_a) = \eta_a Z^b D_b Z^a + Z_a Z^b D_b\eta^a = Z_a Z^b D_b\eta^a = Z_a\eta^b D_b Z^a = \frac{1}{2}\eta^b D_b(Z_a Z^a) = 0$$ 这里 D_b 为适配导数。

从而 η_a 一直为空间矢量，下文记为 w^a。现在，由 $\gamma(\tau)$ 作基准观者，看 $\gamma_{\Delta s}(\tau)$。

为了找到 $1\to 2$ 的"位矢"，做重参化，$p_0'(s') = p_0(s)$。$w'^a = (\frac{\partial}{\partial s'})^a = (\frac{\partial}{\partial s})^a\frac{ds'}{ds} = \frac{ds}{ds'}w^a$ $\Rightarrow w'^a\cdot\Delta s' = w^a\cdot\Delta s = \lambda^a$.

从而定义速度：$\tilde{u}^b = \frac{D\lambda^a}{d\tau} = Z^a D_a\lambda^b$，它是空间矢量。同理有加速度，$a^c = Z^a D_a(Z^b D_b\lambda^c)$，而它也是空间的。

若"改变"另一测地：$\tilde{u}^b = Z^a D_a(w^b\Delta s) = Z^a D_a\frac{\Delta s}{\Delta s}(w^b\Delta s)$ $\to w^a$ 虽不是位矢，但可看作"位矢的单位长度单位"，只需研究以下部分：

$u^b = Z^a D_a w^b$.　　$a^c = Z^a D_a(Z^b D_b(w^c))$　　w^a 称为 seperation vector (分离矢量).

补充材料

在前面推导中，我们选择了一族 τ 对应的测地线汇 $\gamma_s(\tau)$，并作了"横向"线 $p_0(s)$ 与所有测地线正交，可证出 $p_\tau(s)$ 也与所有测地线正交。现在考虑做一个重参化，$\tau' = \alpha(s)\tau + \beta(s)$。

这相当于做了坐标变换，$\{\tau, s\}\to\{\tau', s'\}$，$\tau' = \alpha(s)\tau + \beta(s)$，$s' = s$，$\Rightarrow Z'^a = (\frac{\partial}{\partial\tau'})^a = \frac{ds}{d\tau'}(\frac{\partial}{\partial s})^a + \frac{d\tau}{d\tau'}(\frac{\partial}{\partial\tau})^a = \alpha^{-1}(\frac{\partial}{\partial\tau})^a = \alpha^{-1}Z^a$。同理有 $\eta'^a = \eta^a + r\cdot Z^a$，$r = -\tau\frac{d\alpha}{ds} + \frac{d\beta}{ds}$.

这是我们仅仅对测地线做了一个坐标变换，就使得坐标变换前后的"偏离矢量"差了 Z^a 的一个倍数，切矢差了 Z^a 的一个倍数。（当然此时 η'^a 与 Z'^a 已不再正交）这说明测地偏离矢量也有规范自由性。

从而重新写出潮汐加速：$a'^c = -R_{abd}{}^c Z'^a\eta'^b Z'^d = -R_{abd}{}^c\alpha^{-2}Z^a(\eta^b + r\cdot Z^b)Z^d$　利用 Riemann Tensor 对前面指标反称知 $a'^c = \alpha^{-2}a^c$.

测地偏离方程的解称为 Jacobi 场。$p, q\in\gamma(\tau)$ 称为共轭的，若 $\gamma(\tau)$ 上存在不恒为 0 的 η^b，在 p, q 为 0。

存在 $p\to q$ 的单参测地线族可推出 $p, q\in\gamma$ 共轭。

Day 69.

* 曲率三个表现
1). 导致非对易
2). 和乐性
3). 测地偏离.

(测地偏离 (geodesic deviation). a^c称为deviation vector)

Thm 1. $a^c = -R_{abd}{}^c z^a w^b z^d$.

Pf: $a^c = z^a D_a(z^b D_b w^c) = z^a D_a(w^b D_b z^c) = \underbrace{z^a w^b D_a D_b z^c}_{p^c} + \underbrace{(z^a D_a w^b) D_b z^c}_{q^c}$.

$p^c = z^a w^b D_b D_a z^c - w^b z^a R_{abd}{}^c z^d$.

$= w^b D_b(z^a D_a z^c) - (w^b D_b z^a) D_a z^c - R_{abd}{}^c z^a w^b z^d$.

$z^a D_a z^c \to 0$; $(w^b D_b z^a) = (z^b D_b w^a)$, $(z^b D_b w^a) D_a z^c \to (-q^c)$.

物理意义: 1). 测地线间的"引力"与"斥力"来自于时空弯曲.

[其实两条测地线初始平行, 而后不平行了. 定义"初始平行"为 $u^b|_{\tau=0} = 0$. 从而立刻得证.

2). 可证明: 在有曲时空中 可找到一个单参测地线族, 使 $a^c \neq 0$.

3). 在无自转的局域惯性系中, $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} = 0$. 而潮汐力加速 a^c 与 $R_{abc}{}^d$ 完全相关, 而 $R_{abc}{}^d$ 是绝对的, 无法通过任何坐标变换消除.

[注意]. 你可选择任一测地线汇完成这个定理, 不一定为类时测地线. 且 M 上不一定有度规. 只需 (M, g_{ab}) 即可完成讨论.

在牛顿引力中, 我们有 poisson方程: $\nabla^2\phi = 4\pi\rho$. ($\nabla^2\phi$: $R_{abc}{}^d$?; ρ: T_{ab} ?)

$a^c = -R_{abd}{}^c z^a w^b z^d$

* $\partial_c\phi = (dx^i)_c \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right)$.

牛顿的佐证: 在 Galilei 系中. $a^c = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^c a^i = -\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^c w^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^c w^b \partial_b\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right) = -w^b\partial_b\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^c\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right)\right] = -w^b\partial_b\partial^c\phi$. → 潮汐力加速的抽象表达式.

这暗示了一个对应关系: $R_{abd}{}^{\cancel{c}\,b} z^a z^d \leftrightarrow \partial_b\partial^{\cancel{c}\,b}\phi \Rightarrow R_{ad} z^a z^d \leftrightarrow \partial_b\partial^b\phi$. $(\nabla^2\phi) \to 4\pi\rho \to 4\pi T_{ab} z^a z^b$. 所以我们期望: $R_{ad} z^a z^d = 4\pi T_{ad} z^a z^d$.

最简单地猜 $R_{ab} = 4\pi T_{ab}$. (Einstein 最初发表的), 由于对于自由物体而 $D_a T^{ab} = 0 \to D^a R_{ab} = 0$. 利用比安基恒等: $D_{[a} R_{bc]d}{}^a = 0$.

展开后: $0 = D_a R_{bcd}{}^a + D_c R_{abd}{}^a + D_b R_{cad}{}^a = D^a R_{bcda} - D_c R_{bd} + D_b R_{cd}$ 将 d 上升. 再 $d \to b$. 从而与下 b 缩并. 有: $0 = D_a R_c{}^a - D_c R + D^b R_{cb} \Rightarrow D_c R = 0$.

而 $R = R_a{}^a = 4\pi T_a{}^a = 4\pi T$. $\Rightarrow D_a T = 0$.

Day 70.

为说明为何 $D_a T=0$ 是「逆天」的. 广相中流体能动张量: $T_{ab}=\rho U_a U_b + p(g_{ab}+U_aU_b)$. $T^a{}_a=\rho U_aU^a + p(\delta^a{}_a + U_aU^a) = -\rho+3p \approx -\rho$ $D_a\rho=0$???

于猜的时候应该: $D^aT_{ab}=0$. 而不可有 $D^aR_{ab}\neq 0$. 从而我们希望找一 G_{ab}. 使其在 $D^aG_{ab}=0$ 时又有 $G_{ab}Z^aZ^b=4\pi T_{ab}Z^aZ^d$.

$\exists\, 2G_{ab}=R_{ab}-\frac{1}{2}Rg_{ab}$, $D^aG_{ab}=0$. (Einstein Tensor). 从而我们有 $\boxed{R_{ab}-\frac{1}{2}Rg_{ab}=8\pi T_{ab}}$ (Einstein's Field Equation). 于是. 在1915年.11月. GR诞生了.

两边升上去b 及a求缩并. $R-\frac{4}{2}R=8\pi T \Rightarrow R=-8\pi T$ 从而 $R_{ab}=8\pi T_{ab}+\frac{1}{2}g_{ab}R=8\pi T_{ab}+\frac{1}{2}g_{ab}(-8\pi T)=8\pi(T_{ab}-\frac{1}{2}g_{ab}T)$.

$\Rightarrow R_{ab}Z^aZ^b=8\pi(T_{ab}Z^aZ^b-\frac{1}{2}g_{ab}Z^aZ^bT)=8\pi(\rho+\frac{1}{2}T)\sim 4\pi\rho=4\pi T_{ab}Z^aZ^b$

特殊情形:

1). 闵氏时空处处 $R_{abc}{}^d=0$. $\Rightarrow T_{ab}=0$. 难道闵氏时空没有物质吗? $\rightarrow$ 狭义相对论中的相互作用不包括引力.

2). 真空中 $R_{ab}-\frac{1}{2}Rg_{ab}=0$.

Day 72.

考虑真空Einstein方程. $R_{ab}-\frac{1}{2}Rg_{ab}=0$. 分量: $R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}R\cdot g_{\mu\nu}=0$. (高度非线性 PDEs. 难以解. 通常需假定时空满足球/柱对称性).

而 $T_{ab}\neq 0$ (有源的).

对比 Maxwell Eq. $\partial^a F_{ab}=-4\pi \underline{J_b}$. $J_b=0\,/\neq 0$. 无源/有源.

二者之区别. 1). 在Maxwell Eq.中, 可以指定源 J_b 求电磁场 F_{ab}. 而 Einstein Eq. 若指定 T_{ab} 求 g_{ab}. 这是意义不明的. 考虑尘埃. $T_{ab}=\rho\cdot U_a\cdot U_b$ $\quad U_a=g_{ab}U^b$

且 U^a 应类时, 归一. 没有度规, 这些无从谈起

2). Maxwell Eq. 是线性方程组. 而 Einstein 方程组高度非线性. 从而它的两解之和并非新解. → 许多实际问题中场足够弱, 从而做线性近似.

引力场足够弱: 研究 $(\mathbb{R}^4, g_{ab})$. $g_{ab}=\eta_{ab}+\gamma_{ab}$. 且 γ_{ab} 在 η_{ab} 的某洛伦兹系中分量 $|\gamma_{\mu\nu}|\ll 1$.

约定: 在升降指标时用 η_{ab} 升降. 特别地, g^{ab} 仍为 g_{ab} 之逆.

$$(\eta^{ab}-\gamma^{ab})(\eta_{bc}-\gamma_{bc})=\underbrace{\eta^{ab}\eta_{bc}}_{=\delta^a{}_c}-\eta^{ab}\gamma_{bc}-\gamma^{ab}\eta_{bc}+\underbrace{\gamma^{ab}\gamma_{bc}}_{\to 0}=\delta^a{}_c.$$

从而 $g^{ab}=\eta^{ab}-\gamma^{ab}$.

$$\gamma^{ab}\eta_{bc}:\quad \eta^{aa'}\eta^{bb'}\gamma_{a'b'}\eta_{bc}=\eta^{aa'}\gamma_{a'c}$$

Day 72.

现在，推导线性近似的 Einstein方程. $G_{ab}=R_{ab}-\frac{1}{2}Rg_{ab}$. $\Gamma^{(1)}$ 本身是一阶小，两个 $\Gamma^{(1)}$ 相乘消了 → $R^{(1)}{}_{abc}{}^{d}=-2\partial_{[a}\Gamma^{d}{}_{b]c}$

洛仑兹系中克氏符：$\Gamma^{d}{}_{bc}=\frac{1}{2}g^{de}(\partial_b g_{ce}+\partial_c g_{be}-\partial_e g_{bc})$. 从而 $\Gamma^{(1)d}{}_{bc}=\frac{1}{2}(\eta^{de}-\gamma^{de})(\partial\cdots)=\frac{1}{2}\eta^{de}(\partial_b\gamma_{ce}+\partial_c\gamma_{be}-\partial_e\gamma_{bc})$.

$R_{abc}{}^{d}=-\eta^{de}(\partial_{[a}\partial_{b]}\gamma_{ce}+\partial_{[a}\partial_{|c|}\gamma_{b]e}-\partial_{[a}\partial_{|e|}\gamma_{b]c})=-\eta^{de}(\partial_c\partial_{[a}\gamma_{b]e}-\partial_e\partial_{[a}\gamma_{b]c})=\partial^d\partial_{[a}\gamma_{b]c}-\partial_c\partial_{[a}\gamma_{b]}{}^{d}$

$R^{(1)}_{ab}=\partial^c\partial_{[a}\gamma_{c]b}-\partial_b\partial_{[a}\gamma_{c]}{}^{c}=\frac{1}{2}\partial^c\partial_a\gamma_{cb}-\frac{1}{2}\partial^c\partial_c\gamma_{ab}-\frac{1}{2}\partial_b\partial_a\gamma_c{}^{c}+\underbrace{\frac{1}{2}\partial_b\partial_c\gamma_a{}^{c}}_{\frac{1}{2}\partial^c\partial_b\gamma_{ac}}=\overset{(①+④)}{\partial^c\partial_{(a}\gamma_{b)c}}-\frac{1}{2}\partial^c\partial_c\gamma_{ab}-\frac{1}{2}\partial_a\partial_b\gamma$

$R^{(1)}=\eta^{ab}R^{(1)}_{ab}=\eta^{ab}\partial^c\partial_a\gamma_{bc}-\frac{1}{2}\partial^c\partial_c\gamma-\frac{1}{2}\partial^b\partial_b\gamma=\eta^{ab}\partial^c\partial_a\gamma_{bc}-\partial^c\partial_c\gamma=\partial^c\partial^b\gamma_{cb}-\partial^c\partial_c\gamma$

从而 $G^{(1)}_{ab}=\partial^c\partial_{(a}\gamma_{b)c}-\frac{1}{2}\partial^c\partial_c\gamma_{ab}-\frac{1}{2}\partial_a\partial_b\gamma-\frac{1}{2}\eta_{ab}(\partial^c\partial^d\gamma_{cd}-\partial^c\partial_c\gamma)=8\pi T_{ab}$

太长了，可以引入一些符号加以简化. 引入新变量 $\bar{\gamma}_{ab}=\gamma-\frac{1}{2}\eta_{ab}\gamma$. 将 $\gamma_{ab}\longrightarrow\bar{\gamma}_{ab}$ 会消失一些项：$-\frac{1}{2}\partial^c\partial_c\bar{\gamma}_{ab}+\partial^c\partial_{(a}\bar{\gamma}_{b)c}-\frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^c\partial^d\bar{\gamma}_{cd}=8\pi T_{ab}$.

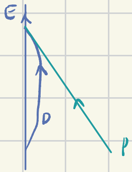
还可以再做一简化. 类比 $(\mathbb{R}^4,\eta_{ab})$ 中电磁场 $\partial^a\partial_a A_b-\partial_b\partial^a A_a=-4\pi J_b$. 通过引入洛仑兹规范 $\partial^a A_a=0$. 可将上式简化至 $\partial^a\partial_a A_b=-4\pi J_b$. 现在我们模仿一下.

对 $\bar{\gamma}_{ab}$ 做变换：$\tilde{\bar{\gamma}}_{ab}=\bar{\gamma}_{ab}+\partial_a\xi_b+\partial_b\xi_a$. 并令 ξ_a 为小量. 这样 $\tilde{R}_{abc}{}^{d}=R_{abc}{}^{d}$. 选取洛仑兹规范. $\partial^b\bar{\gamma}_{ab}=0$. 从而 $\partial^c\partial_c\bar{\gamma}_{ab}=-16\pi T_{ab}$.

[需证明此规范必可取到]

Day 73.

我们从线性化 Einstein 方程开始. $\partial^c\partial_c\bar{\gamma}_{ab}=-16\pi T_{ab}$. 我们要回归牛顿情形, 这时应有"弱场、低速"条件. 上文中我们已给出了"弱场", 而"低速"似乎是不依赖的.
例如考虑在地球附近发射的小物体, 和宇宙线中μ子. 大致来说, "低速"指的是可找到 η_{ab} ($g_{ab}=\eta_{ab}+\gamma_{ab}$) 的一个惯性坐标系, 使得在此系中看起来, 所有粒子速度都小.



具体而言: 在 η_{ab} 的惯性系中: a) 引力场源的能动张量 $T_{ab}=\rho(dt)_a(dt)_b$. ($T_{0i}=0$ … 速度小, 从而动量小; $T_{ij}=0$ … 应力与质量密度相比可略)

b) 引力场源的运动是低速的, 从而时空几何缓慢变化, 从而 $\partial\bar{\gamma}_{\mu\nu}/\partial t$ 可略.

物体的运动是低速的, 其四速 U^a 近似等于 $(\frac{\partial}{\partial t})^a$.

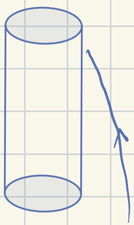
在这近似下: $\partial^\sigma\partial_\sigma\bar{\gamma}_{\mu\nu}=\overset{=0}{\underbrace{\partial^0\partial_0\bar{\gamma}_{\mu\nu}}}+\partial^i\partial_i\bar{\gamma}_{\mu\nu}=\nabla^2\bar{\gamma}_{\mu\nu}$

$$\begin{cases}\nabla^2\bar{\gamma}_{00}=-16\pi\rho \\ \nabla^2\bar{\gamma}_{0i}=0 \\ \nabla^2\bar{\gamma}_{ij}=0\end{cases}$$

$\nabla^2\bar{\gamma}_{00}=-16\pi\rho\ \rightarrow$ 只需 $\phi=-\frac{1}{4}\bar{\gamma}_{00}$ 则 $\nabla^2\phi=4\pi\rho$.

$\nabla^2\bar{\gamma}_{0i}=0,\ \nabla^2\bar{\gamma}_{ij}=0\ \}\ \bar{\gamma}_{0i},\bar{\gamma}_{ij}=\text{Const}\xrightarrow{\text{G.T.}}\bar{\gamma}_{0i},\bar{\gamma}_{ij}=0.$

考虑在地球附近引力场中自由下落的质点.



$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau}=0.$$

* 利用了 $(\frac{\partial}{\partial\tau})^a=(\frac{\partial}{\partial t})^a$.

$$\frac{dx^0}{dt^2}=-\Gamma^0{}_{00}\frac{dx^0}{dt}\frac{dx^0}{dt}-\Gamma^0{}_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}$$

利用近似. $0=\Gamma^0{}_{00}\frac{dx^0}{dt}\frac{dx^0}{dt}$

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}=\frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}(\gamma_{\lambda\nu,\sigma}+\gamma_{\sigma\lambda,\nu}-\gamma_{\nu\sigma,\lambda}).\ \rightarrow\ \Gamma^0{}_{00}\approx-\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial t}=0\qquad\Gamma^i{}_{00}\approx-\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial x^i}\qquad\Rightarrow\frac{d^2x^i}{dt^2}=-\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial x^i}$$

由于 $\gamma_{00}=\frac{1}{2}\bar{\gamma}_{00}=-2\phi$. 可以直接给出 $\vec{a}=-\vec{\nabla}\phi$

补充材料：引力波

取 $\{t,x,y,z\}$ 为闵氏时空 $(\mathbb{R}^4,\eta_{ab})$ 上的惯性系，我们将要构造其上的一个度规场。令 $u=t-z$，$f(u)$、$g(u)$ 是 u 的任意两个光滑函数，则构造：

$p(x,y,z,t)=p(x,y,u)=\frac{1}{2}f(u)\cdot(x^2-y^2)+g(u)\,xy$，则下面是一个新的度规场：$g_{ab}=\eta_{ab}+2p(du)_a(du)_b=\eta_{ab}+2p\,[(dt)_a-(dz)_a]\,[(dt)_b-(dz)_b]$。

首先，它显然对称。其次，$k^a=(\frac{\partial}{\partial t})^a+(\frac{\partial}{\partial z})^a$ 为以 g_{ab} 衡量的类光矢量场。

在标架

$$\begin{cases}(e_1)^a=(\frac{\partial}{\partial x})^a\\(e_2)^a=(\frac{\partial}{\partial y})^a\\(e_3)^a=k^a\\(e_4)^a=\frac{1}{2}\left[(\frac{\partial}{\partial t})^a-(\frac{\partial}{\partial z})^a\right]+p\cdot k^a\end{cases}$$

则该度规在这组标架下有如下矩阵形式：

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&0&-1\\&&-1&0\end{pmatrix}$$

容易由上述度规 g^{ab} 以及 $(e_i)^a$ 的对偶标架。

这个度规是非平直的。通过使用标架法计算，我们可以给出其 Riemann Tensor：

$R_{abcd}=[f(e^1)_a\wedge(e^4)_b+g(e^2)_a\wedge(e^4)_b](e^4)_c\wedge(e)_d+[g(e^1)_a\wedge(e^4)_b-f(e^2)_a\wedge(e^4)_b](e^4)_c\wedge(e^2)_d$

我们证明：设 D_b 为与 g_{ab} 适配的导数，则 $D_b k^a=0$。证明这个使用标架法，注意到这里全部非0的联络1-形式有：

$(\omega_4{}^1)_a=(\omega_1{}^3)_a=(fx+gy)(du)_a$，$(\omega_4{}^2)_a=(\omega_2{}^3)_a=(gx-fy)(du)_a$。从而所有的 $(\omega_3{}^\gamma)_a=0$。由它和其对偶的关系 $(\omega_\mu{}^\nu)_a=-\gamma^\nu{}_{\mu\tau}(e^\tau)_a$ 得 $\gamma^\gamma{}_{3\tau}=0$

再由联络的物理意义有：$(e_\tau)^b D_b(e_3)^a=\gamma^\gamma{}_{3\tau}(e_\gamma)^a$，从而 $(e_\tau)^b D_b(e_3)^a=0$。由于 $(e_\tau)^b$ 为任意一组基矢，从而 $D_b(e_3)^a=0$，而 $(e_3)^a=k^a$，得证。

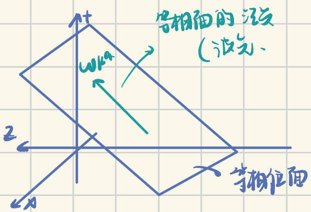
这立刻有两个结论：$k^b D_b k^a=0$ …… k^a 的积分曲线为 lightlike geodesic；$D_{(a}k_{b)}=0$ …… k^a 为 Killing 场。

类比一下电磁场，在电磁场里面，我们寻求 $\partial^a\partial_a A_b=0$ 的最简单波动解，$A_b=C\cos\theta$，并定义所谓波矢 $k^a=\partial^a\theta$，它同样满足 $(\partial^a\theta)(\partial_a\theta)=0$

它是类光矢量场，同样也是 Killing 场，和我们这里非常类似，从而我们可以假定这里的 k^a 类比于 $k^a=(\partial^a\theta)$，从而我们将上面的度规称作平面引力波，而 k 是它的波矢。

这里注意一下可以选择的是 $p(x,y,u)$，最简单的选择为 $f(u)=F\cdot\cos\omega u$，$g(u)=G\cdot\cos\omega u$，$2p(x,y,u)=[F(x^2-y^2)+2Gxy]\cdot\cos(\omega t-kz)$。

并且我们可以证明，在 $(\mathbb{R}^4,g_{ab})$ 中有一个区域，使得 $(\frac{\partial}{\partial t})^a$ 在 g_{ab} 下类时，而 $(\frac{\partial}{\partial z})^a$ 在 g_{ab} 下类空，从而可以将它们称作时空坐标。类比电磁场，如下图



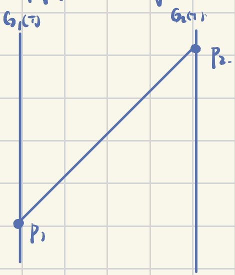
$\omega k^a=\omega(\frac{\partial}{\partial t})^a+\omega(\frac{\partial}{\partial z})^a$　它可在 $\{t,x,y,z\}$ 坐标系的基底下做分解，从而它是波矢

设两点各位于 z_1、z_2 处，$\omega t_1-kz_1=\omega t_2-kz_2$，从而 $v_{phase}=\frac{z_2-z_1}{t_2-t_1}=\frac{\omega}{k}=1$，从而其相速为光速

这里，无论以 g_{ab} 还是以 η_{ab}，k^a 都是类光，且它可看为波阵面的法矢，从而波阵面在 g_{ab}/η_{ab} 下均为类光超曲面

波矢的类光性自动保证其积分曲线为类光测地线，从而自动保证引力波以光速传播

对于引力波，由于 k^a 为 Killing 矢量，接着之前 isometry group 的轨迹，从而 k^a 实际上携带了引力波的所有信息。

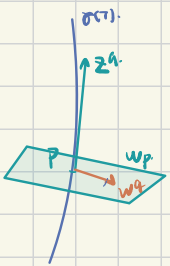


我们设引力波从 $p_1 \to p_2$，可以理解为在 $p_1 \to p_2$ 建立了 isometry $\phi(p_1)=p_2$。为什么这么理解？因为引力波上面传播的是 $p(x,y,u)$，t 时刻 p_1 处的值都传到了 p_2。所以自然有 $\phi(p_1)=p_2$，故 $g_{ab}|_{p_1}=g_{ab}|_{p_2}$。它不仅仅在 p_1，还在 p_1 的邻域。由于由 g_{ab} 构造的各种量（曲率，…）都是由一点及其邻域确定，从而我们说这个 isometry 传播了引力波携带的所有信息。

另外，我们称 $\partial^\mu \partial_\mu p(x,y,z,t)=\Phi(x,y,z,t)$ 为物理中的有源波动方程。代入上面的 p，有 $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=0$，这说明 p 满足无源波动方程。

此外，对于任何 $p(x,y,u)$，$k^a=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a+\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a$ 均类光。注意到 $k_a=g_{ab}(e^4)^b{}_a=g_{24}(e^4)_a=-(e^4)_a=-(du)_a=-\nabla_a u$。而 $\nabla_a u$ 为 u 面的法余矢。从而对于任意 $p(x,y,u)$，其法余矢均类光，u 面为类光超曲面。

下面看引力波的性质，作简化考虑。我们放一个自由下落的自转坐标系，它们之间 a^c 的周期性变化导致距离周期性变化。任取 $\sigma(\tau)$ 作为参考，有



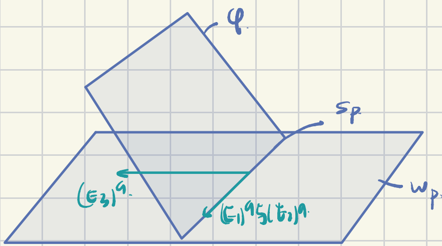
$a^c=-R_{abd}{}^c Z^a w^b Z^d$，这可看作 $w^b \mapsto a^c$ 的映射，从而可写成 $a^c=\psi^c{}_b w^b$，$\psi^c{}_b=-R_{abd}{}^c Z^a Z^d$。

我们写 $\psi^c{}_b$ 在 w_p 的正交归一 3-标架中的分量：
$$\begin{cases}(E_1)^a=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a+E^{-1}Z_1 k^a\\(E_2)^a=\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a+E^{-1}Z_2 k^a\\(E_3)^a=E^{-1}k^a-Z^a\end{cases}$$
$E=-g_{ab}Z^a k^b$，就像光子一样可以理解为能量。$Z_1=g_{ab}Z^a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^b$，$Z_2=g_{ab}Z^a\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^b$。

这组基有一些物理意义：①它正交归一；②$(E_3)^a$ 为 p 点的波矢 $k_a|_p$ 在 w_p 上的投影；③$\{(E_i)^a\}$ 须满足沿测地线平移或 FW 移动。

以 φ 代表过 p 点的波阵面，$\hat{\varphi}$ 代表 V_p 中切于 φ 的那些元素构成的 3D subspace，$S_p=\hat{\varphi}\cap w_p=\{w^a\in w_p \mid g_{ab}w^a k^a=0\}$（代表切于 φ 的含义）。

这相当于又加了个方程来限制构成，因而 S_p 只有 2D。不难验证 $(E_1)^a$、$(E_2)^a$ 为 S_p 的一组基底。



从而我们看到空间中引力波沿 $(E_3)^a$ 方向传播。由 $\{(E_1)^a,(E_2)^a\}$ 组成的 S_p 为空间中引力波的波阵面。

在这个标架中分解 $\psi^a{}_b$，有：$\psi_{ij}=\psi^c{}_b(E^i)_c(E_j)^b=\psi_{cb}(E^i)^c(E_j)^b=\psi_{cb}(E_i)^c(E_j)^b=-R_{abcd}Z^a(E_j)^b Z^c(E_i)^d$

通过代入 Riemann Tensor 和基底，我们有矩阵表示：
$$\psi_{ij}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta & 0\\ \beta & -\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$
$\alpha=-E^2 f$，$\beta=-E^2 g$。

从而我们看到潮汐加速度总与引力波的传播方向 $(E_3)^a$ 正交的。从而有
$$\begin{bmatrix}a^1\\a^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & -\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w^1\\w^2\end{bmatrix}$$

虽然直接影响潮汐加速度的是 $E^2 f$，$E^2 g$，但由于 $E=-g_{ab}Z^a k^b$，所以它在测地线上为常值，从而潮汐加速度只与 f、g 的系数振动有关。