Day 59. Chapter 7. 广义相对论基础.

相对性原理：物理规律应有洛伦兹协变性.

- Maxwell EM. 符合直接纳入狭相体系.
- Newtonian Mech. 不符合. 改造后纳入. $\vec{p} = \gamma m \vec{u}$
- Newtonian Gravity Theory. 不符合. $\nabla^2 \phi = 4\pi \underline{\rho}$ 只正不负. 会使引力波能量为负↑ 它的解为 $\phi(\vec{r}, t) = \iiint \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$. $\vec{r}'$：源点. $\vec{r}$：场点. 有超距作用.
  - $\nabla^2 \phi_e = 4\pi \underline{\rho_e}$ 有正有负

Universality of Gravity

- 万有引力：对任何物体. 有质量则有引力.
- 任意两个物体在引力场中同一点获得相同引力加速度. 静电加速度. $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \left(\frac{q}{m}\right)\vec{E}$
  - ⇒ 仿照讨论. 可定义引力质量 m_G 和惯性质量 m_I. ⇒ $\vec{a} = \left(\frac{m_G}{m_I}\right) g$. 为何总有 $m_G = m_I$？（二者在概念上并无联系.）

猜：引力不存在时. 时空是平直的. 存在时则变得弯曲. 弯曲情况取决于物质分布 ← 引力并非物体个性的表现. 而是时空背景带来的"共性"效应.

在狭相中. 自由质点走测地线. 猜测引力场中的只受引力的质点(自由质点). 也应走测地线 → "一点一矢定测地". 初始位置和速度相同的两质点. 轨迹必重合. 从而 $m_G = m_I$.

* GR 的基本假设.

a). 3维空间中引力的本质是4维时空弯曲. GR 的时空形为 (M, g_{ab}). 其中 M 为4维流形.

b). 自由质点世界线为 (M, g_{ab}) 上测地线. 质点的运动方程为：$F^a = U^b \nabla_b P^a$. F^a 中不包含引力. 从而自由点：$U^b \nabla_b (m U^a) = m U^b \nabla_b U^a = 0$

c). 时空弯曲与物质分布 (T_{ab}) 有关. 它们间的关系是 Einstein 方程.

Day 60.

chapter 7. 广义相对论基础.

广相中的物理定律难以由实验归纳得到. 只能由猜测/演绎得到. 猜测根据是广义协变性原理. (principle of general covariance).

有一些物理量是时空度规的衍生量. 如 $R_{abc}{}^{d}$. R_{ab}. ∇_a 等. 广义协变性原理的一个表述是:

Theorem 1. 只有时空度规及其派生量允许以背景几何量的身份出现在物理方程中. 从而在换坐标系时保证形式不变. (e.g. 克氏符涉及具体坐标系. 不可以进).

另有一个要求是"回归". 在 $g_{ab} \to \eta_{ab}$ 时回到狭相情形.

狭相中用4维语言描述物理定律的方式自然推广至广相. 例如: 质点. 光子的世界线分别类时. 类光. $U^a = \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^a$. τ = 世界线长. T_{ab} ··· 能动张量.

4-加速: $A^a = U^b \nabla_b U^a$

麦氏方程: $\nabla^a F_{ab} = -4\pi J_b$. 能动: $T_{ab} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{ac}F_b{}^c - \frac{1}{4} g_{ab} F_{cd} F^{cd}\right)$.

$\nabla_{[a} F_{bc]} = 0$. $\Rightarrow dF = 0$ 可局域地引入4势 A. 从而 $F_{ab} = 2\nabla_{[a} A_{b]}$

$-4\pi J_b = \nabla^a(\nabla_a A_b - \nabla_b A_a) = \nabla^a \nabla_a A_b - \nabla^a \nabla_b A_a$ $\quad (\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)A^c = -R_{abd}{}^{c} A^d \quad (\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)A^a = R_{bd} A^d$

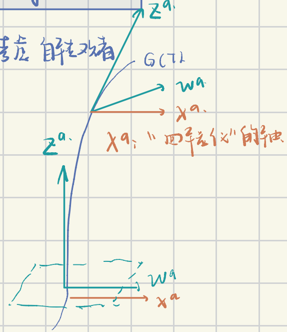
$\qquad - \nabla_b \underbrace{\nabla_a A^a}_{\text{选规范为0}} - R_{bd} A^d$

$\Rightarrow \nabla^a \nabla_a A_b - R_b{}^d A_d = -4\pi J_b$.

我们将 $\eta_{ab} \to g_{ab}$. $\partial_a \to \nabla_a$ 称为"最小替代法则".

Day 61

考虑 自转观者



什么样的 x^a 可作为"不变方向"？ 最简单是令 x^a 沿线平移。但若 x^a、z^a 正交 $\to$ $X^a Z_a = 0$。

$Z^b \nabla_b (X^a Z_a) = X^a Z^b \nabla_b Z_a = X^a A_a$。通常而言不会为0。

Def 1. Fermi–Walker Derivative [符号：以 $\frac{Dx^a}{d\tau}$ 代表 x^a 沿线的协变导数。$\frac{Dx^a}{d\tau} = Z^b \nabla_b x^a$]

映射：$\frac{D_F}{D\tau}$ 是映射 $\mathscr{F}_G(k,l) \to \mathscr{F}_G(k,l)$。[$\mathscr{F}_G(k,l)$ 代表沿 $G(\tau)$ 的光滑 (k,l) 型 Tensor 集合]。

(a, b, c). 线性性、莱布尼茨律、与缩并可换序。

(d). 作用在标量场上：$\frac{D_F f}{d\tau} = \frac{df}{d\tau}$ $\forall f$.

(e). $\frac{D_F v^a}{d\tau} = \frac{Dv^a}{d\tau} + (A^a Z^b - Z^a A^b) v_b$.

Thm 1. Fermi 导子的性质.

a). 若 $G(\tau)$ 为测地线，则 $\frac{D_F v^a}{d\tau} = \frac{Dv^a}{d\tau}$

b). $D_F Z^a / d\tau = 0$. $\quad \frac{D_F Z^a}{d\tau} = \frac{DZ^a}{d\tau} + (A^a Z^b - Z^a A^b) Z_b = Z^a \nabla_b Z^b + A^a Z^b Z_b - Z^a A^b Z_b = A^a - A^a = 0$. [四速"方向"不变 / 不转动]

c). 若 w^a 为 $G(\tau)$ 上空间矢，则 $\frac{D_F w^a}{d\tau} = h^a{}_b \left(\frac{Dw^b}{d\tau}\right)$。[把变化量投影到空间平面上]

d). $\frac{D_F g_{ab}}{d\tau} = 0$. $\Leftrightarrow$ $\frac{D_F (g_{ab} v^a u^b)}{d\tau} = g_{ab} v^a \frac{D_F u^b}{d\tau} + g_{ab} u^b \frac{D_F v^a}{d\tau}$ [FW 移动保内积]

$= v_a \frac{D_F u^a}{d\tau} + u_a \frac{D_F v^a}{d\tau} = v_a \left[\frac{Du^a}{d\tau} + 2A^{[a} Z^{b]} u_b \right] + u_a \left[\frac{Dv^a}{d\tau} + 2A^{[a} Z^{b]} v_b \right] = \frac{D(v_a u^a)}{d\tau} + 2A^{[a} Z^{b]} u_{(a} v_{b)} = \frac{D_F (g_{ab} v^a u^b)}{d\tau}$

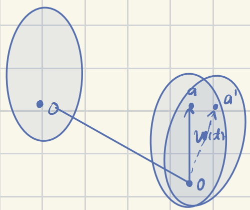
Def 2. 线上 v^a 称为沿 $G(\tau)$ FW 移动的，则 $D_F \frac{dv^a}{d\tau} = 0$.

Day. 62.

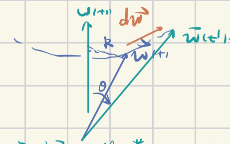
欢看：某时世界线+标架. 最简单的标架：FW 移动的标架. Z^a 自动 FWT.

Theorem 1. $p\in G$ 及 $v^a\in V_p$ 决定唯一沿 $G(\tau)$ FWT 的矢量场. [由 FWT 保内积性质，可通过 FWT 旧标架来构造新标架]

物理意义：不转动标架 → 沿保 FWT. 如何描述转动？先从牛顿力学开始. 研究刚体的转动实际上是研究从基点指向任一点矢量的转动.



若 ∃ $\vec{\omega}(t)$，使 $\frac{d\vec{w}(t)}{dt}=\vec{\omega}(t)\times\vec{w}(t)$. 则将 $\vec{\omega}(t)$ 称为转动角速度.



$|\vec{\omega}\times\vec{w}| = \omega\cdot w\cdot\sin\theta = \omega\cdot R = R\cdot\frac{d\varphi}{dt}=\frac{|d\vec{w}|}{dt}$.

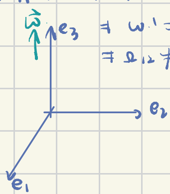
在牛顿力学中借一个笛卡儿坐标系，将上式写作分量：$\frac{dw^i(t)}{dt}=\varepsilon^i{}_{jk}\,\omega^j w^k$.

推广到狭相中，设基点 O 处有一惯性观者，则 Σ 为其上空间矢量场. 一个自然推广是若 $w^a(\tau)$ 称为转动的，若 $G(\tau)$ 上 ∀ $w^a(\tau)$ 使 $\frac{dw^i(t)}{d\tau}=\varepsilon^i{}_{jk}\,\omega^j w^k$

用 Σ_t 上诱导度规 h_{ab} 降 w^a 的指标，得到 w_a. 其 * 对偶为 $\Omega_{ab}=({}^*w)_{ab}=w^c\varepsilon_{cab}$. $\varepsilon_{ijk}\,\omega^j w^k=-\varepsilon_{ijk}\,w^k\omega^j=-\Omega_{ij}\,w^j$

从而 $\frac{dw^i}{dt}=-\Omega^{ij}\,w_j$

若有一以 e_2 为轴的转动



则 $\omega^1=\omega^2=0$. 由 $\Omega_{ab}=\omega^c\varepsilon_{cab}$

则 $\Omega_{12}\neq 0$. $\Omega_{13}=\Omega_{23}=0$.

("在 12 平面内转动").

Def 2. 设 $G(\tau)$ 时 (M, g_{ab}) 上一类时世界线，若 $G(\tau)$ 上存在 2-form Ω_{ab} 使 $\frac{Dv^a}{d\tau}=-\Omega^{ab}v_b$. 则称 v^a 以角速 Ω^{ab} 时空转动.

不一定是空间矢量.

$\Omega_{ab}\rightarrow\{\Omega_{0i},\ \Omega_{ij}\}$.

↳ 空间转动.

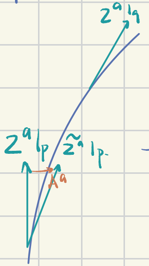
Day 63.

在牛顿力学中有 $\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = \vec{\omega}(t) \times \vec{w}(t)$. 显然在 $\vec{\omega}(t)$ 上可以加任意与 $w(t)$ 平行的矢量. 同样, 在推广形式中 取 $\Lambda^{ab} v_b = 0$. 则 Ω^{ab} 与 $\Omega^{ab'} = \Omega^{ab} + \Lambda^{ab}$ 均满足方程.

(角速度的"规范自由")

$\frac{D}{D\tau}(v^a u_a) = u_a \frac{Dv^a}{d\tau} + v^a \frac{Du^a}{d\tau} = u_a(-\Omega^{ab} u_b) + v^a(-\Omega^{ab} u_b) = -2\Omega^{ab} v_{(a} u_{b)} = 0$. $\Rightarrow$ 若两个矢量场经受相同空间转动, 则它们的内积保持.

下面研究 Z^a 的转动 $0 = \frac{D_F Z^a}{d\tau} \Rightarrow \frac{DZ^a}{d\tau} = -2A^{[a}Z^{b]}Z_b = -(A^a \wedge Z^b) Z_b$. $\Rightarrow \tilde{\Omega}^{ab} = A^a \wedge Z^b$ 或角速2形式 $\tilde{\Omega}_{ab} = A_a \wedge Z_b$.



由协变导子的几何意义:

$$A^a|_p = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{1}{\Delta\tau}(\tilde{Z}^a|_p - Z^a|_p).$$

$\to$ 直观上, 平移过去时测地线的偏离使 Z^a 产生"被迫转向". 这导致了4-加速的产生. 由于 $\tilde{\Omega}_{ab} = A_a \wedge Z_b$. 这个转动发生在 Z-A 平面内.

(这个转动和我们按惯性系时把原来的坐标系转到新 Z 的操作类似, 都是"boost")
"伪转动".

另外. 考虑一个空间矢量 w^a. 与 Z^a 正交. Z^a 的boost $\tilde{\Omega}_{ab}$ 使 w^a 也经历boost. 但

Theorem 1. 设 Ω_{ab} 为 w^a 的角速. $\tilde{\Omega}_{ab}$ 为 Z^a 角速, 则 $\hat{\Omega}_{ab} = \Omega_{ab} - \tilde{\Omega}_{ab}$ 为空间转动.

Theorem 2. 观者世界线上空间矢量场 w^a 无空间转动的充要条件是 FWT.

换言之, FW导子衡量矢量场减去 Z^a 伪转动之后剩余的转动.

$$\frac{D_F w^a}{d\tau} = \frac{Dw^a}{d\tau} + (A^a Z^b - A^b Z^a) w_b = -\Omega^{ab} w_b + \tilde{\Omega}^{ab} w_b = -\hat{\Omega}^{ab} w_b.$$

从而立刻得证.

补充材料. 关于角速度的规范自由性.

角速度自然定义为 $\frac{Dv^a}{d\tau} = -\Omega^{ab} v_b$. 在 Ω^{ab} 上叠加 Λ^{ab} 使 $\Lambda^{ab} v_b = 0$. 则 $\Omega_{ab} + \Lambda_{ab}$ 也是合理的角速度.

设考虑 $G(\tau)$ 上空间矢量场 w^a 的时空转动: $\frac{Dw^a}{d\tau} = -\Omega^{ab} w_b$. 由于 w^a 为空间矢量场, 则最简单的选4-标架的方式是 $(e_0)^a = Z^a$. $(e_1)^a = \alpha w^a$.

从而我们有 $\Lambda^{ab}(e^1)_b = 0$. $\Rightarrow 0 = \Lambda^{ab}(e^1)_b = \Lambda^{\mu\nu}(e^1)_\nu (e_\mu)^a = \Lambda^{\mu 1}(e_\mu)^a = \Lambda^{01}(e_0)^a + \Lambda^{21}(e_2)^a + \Lambda^{31}(e_3)^a$, 从而我们要求 $\Lambda_{01} = \Lambda_{21} = \Lambda_{31} = 0$. 而 Λ_{02}. Λ_{03}. Λ_{23} 无任何约束.

换言之, 在这样的标架下. Ω_{02}, Ω_{03}, Ω_{23} 可任选.

若观者的四速为 Z^a. 且四加速为 A^a. 则易知 Z^a 的时空转动角速度的2-形式为 $\tilde{\Omega}_{ab} = A_a \wedge Z_b$. 设 Ω_{ab} 为世界线上空间矢量场经受的时空转动, 下证 $\hat{\Omega}_{ab} = \Omega_{ab} - \tilde{\Omega}_{ab}$ 是空间转动.

换言之, 世界线上矢量场的转动可以被拆成两部分: 由 A^a 决定的"伪转动" 和剩余的纯空间转动. 像上面一样选4-标架, 由 Z^a. w^a 的正交性得到.

$0 = \frac{D}{d\tau}(Z^a w_a) = w_a \frac{DZ^a}{d\tau} + Z^a \frac{Dw_a}{d\tau} = -w_a \tilde{\Omega}^{ab} Z_b - Z^a \Omega^{ab} w_b = (\tilde{\Omega}^{ab} - \Omega^{ab}) Z_a w_b = (\tilde{\Omega}^{ab} - \Omega^{ab})(e^0)_a (e^1)_b \alpha^{-1} = (\Omega^{01} - \tilde{\Omega}^{01})\alpha^{-1} \Rightarrow \Omega^{01} = \tilde{\Omega}^{01}$.

由于 $(0,2)$. $(0,3)$. $(2,3)$. 则可选 $\Omega^{02} = \tilde{\Omega}^{02}$. $\Omega^{03} = \tilde{\Omega}^{03}$. 又由 $\tilde{\Omega}^{23} = 0$. $\Rightarrow \hat{\Omega}^{ab} = \Omega^{ab} - \tilde{\Omega}^{ab}$ 为纯空间转动.

此外, 任意正交归一的空间3-标架场中的三个基矢(在合适规范下)有相同的空间转动角速度.

Pf. 利用 $0 = \frac{D[(e_1)^a (e^2)_a]}{d\tau} = \frac{D[(e_2)^a (e^3)_a]}{d\tau} = \frac{D[(e_3)^a (e^1)_a]}{d\tau}$. $\Rightarrow (\hat{\Omega}_1)^{12} = (\hat{\Omega}_2)^{12}$ $(\hat{\Omega}_2)^{23} = (\hat{\Omega}_3)^{23}$. $(\hat{\Omega}_3)^{31} = (\hat{\Omega}_1)^{31}$

由于 $(\hat{\Omega}_1)^{23}$ 有自由性 $\Rightarrow (\hat{\Omega}_1)^{23} = (\hat{\Omega}_2)^{23} = (\hat{\Omega}_3)^{23}$. 由于 $(\hat{\Omega}_3)^{12}$ 有自由性, $\Rightarrow (\hat{\Omega}_1)^{12} = (\hat{\Omega}_2)^{12} = (\hat{\Omega}_3)^{12}$. 剩下一组同理.

对于 $(\hat{\Omega}_1)^{ab}$. $(\hat{\Omega}_2)^{ab}$. $(\hat{\Omega}_3)^{ab}$ 而言. 只有一个分量有规范自由性. 而在以上为使三者相等, 已用掉了三者的三个自由性. 于是, 这里的 $\hat{\Omega}_{ab}$ 无自由性.

Day 64.

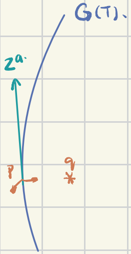
刚才 我们把 Ω_{ab} 用适配体积元“对偶”回去. 即 $\hat{\Omega}_{ab} = w^c \varepsilon_{cab}$、 $\hat{\Omega}^{bc} = \varepsilon^{bcd} w_d$.

$$g_{ab}\frac{D_F W^b}{d\tau} = -g_{ab}\hat{\Omega}^{bc}w_c = -g_{ab}\varepsilon^{bcd}w_d W_c = -\varepsilon_{acd}w^d w^c = -Z^b\varepsilon_{bacd}w^c w^d = \varepsilon_{abcd}Z^a w^c \underline{\underline{w^d}}$$ → 这个是空间转动的角速度矢量.

由循环可证. 若两个矢量有相同角速度, 则 $\frac{d}{d\tau}(v^a u_a)=0$. 故可猜测. **Theorem 1.** G(T)上任一正交空间3-标架有相同角速度.

狭相中的“惯性观者” 推广到广相是“自由下落无自转观者”. ⇒ $A^a=0$. 4-标架沿线FWT.

试考虑任意观者($A^a\neq 0$, 且 $\hat{\Omega}^{ab}\neq 0$). 观者的4-标架仅在其线上有定义. 若要讨论发生在世界线外(附近)的事件, 应将这标架向外延伸并形成一个坐标系.



考虑观者位于p处, 在附近选取q. 在p处取一空间矢量, 确定一测地线, 它可能经过q. 可以证明, 对于 $\forall(M, g_{ab})$, $\forall G(T)$, 若q为G(T)附近一点, 则必有从唯一一点p出发的唯一一条类空测地线 $\mu(s)$ 经过q. 约定s为线长参. $T^a=(\frac{\partial}{\partial s})^a$ 为单位切矢. 记 $w^a = T^a|_p$. 将 w^a 在 $(e_i)_a$ 上分量记为 w^i.

定义q点的固有坐标 $t(q)=\tau_p$, $x^i(q)=s_q\cdot w^i$.

作为一个简单的例子, 由 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 中的惯性观者可以定义出它所在的惯性参考系内的惯性坐标系.

Theorem 1. 固有坐标系在 $p\in G(T)$ 处坐标基矢与G(T)的4-标架一致.

证明. 根据定义, 可以取 $w^a=(e_1)^a$ ⇒ $w^1=1$, $w^2=w^3=0$ ⇒ $x^1=s$, $x^2=x^3=0$. (这就是 x^1 坐标线).

$(\frac{\partial}{\partial x^1})^a|_p = (\frac{\partial}{\partial s})^a|_p = T^a|_p = w^a = (e_1)^a$. $(e_2)^a$, $(e_3)^a$ 可模仿此法得证.

此外, G(T) 为过p点的t坐标线 ⇒ $Z^a|_p = (\frac{\partial}{\partial t})^a|_p$.

$g_{\mu\nu}|_p = g_{ab}(\frac{\partial}{\partial x^\mu})^a(\frac{\partial}{\partial x^\nu})^b = g_{ab}(e_\mu)^a(e_\nu)^b = \eta_{\mu\nu}$. [↑固有坐标系原点处度规分量之特征]

补充材料.   3-加速

设观者G的4-加速为 $\hat{A}^a$，自转角速为 ω^a。被观测自由质点L与G的世界线交于p点。L在p点相对于G的3-速为 u^a。则L在p相对G的3-加速：

$$a^a = \left(\frac{d^2x^i}{dt^2}\right)(e_i)^a = -\hat{A}^a - 2\varepsilon^a{}_{bc}\omega^b u^c + 2(\hat{A}_b u^b)u^a.$$ 其中 $(e_i)^a$ 为观者所在的3标架，ε_{abc} 为空间体元。

应先求时空度规 g_{ab} 在G(T)的固有系内的克氏符取值。这里用到克氏符号标矢量的一个等价定义：克氏符描述某一坐标基矢在其他基矢上的导数。

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\rho}\right)^b \nabla_b \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^a = \Gamma^\sigma{}_{\nu\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right)^a.$$ 由于固有坐标基在线上基矢和标架一样。$\Rightarrow (e_0)^b \nabla_b (e_\mu)^a = \Gamma^\sigma{}_{\mu 0}(e_\sigma)^a.$

转动角速度的定义：$\frac{D(e_\mu)^a}{d\tau} = -\Omega^{ab}(e_\mu)_b = (e_0)^b\nabla_b(e_\mu)^a.$ 对比上下两式立刻有：$\Gamma^\sigma{}_{\mu 0}(e_\sigma)^a = -\Omega^{ab}(e_\mu)_b = -\Omega^a{}_b(e_\mu)^b = -\Omega^a{}_\mu = -\Omega^\sigma{}_\mu(e_\sigma)^a \Rightarrow \Gamma^\sigma{}_{\mu 0} = -\Omega^\sigma{}_\mu.$

又将 Ω_{ab} 做时空分解，并写为分量式得：

$$\Omega_{ab} = \hat{A}_a \wedge Z_b + \varepsilon_{abc}\omega^c.$$

$$\Rightarrow \Omega^a{}_b = \hat{A}^a Z_b - Z^a \hat{A}_b + \varepsilon^a{}_{bc}\omega^c = \hat{A}^a Z_b - Z^a\hat{A}_b + Z^d\varepsilon_d{}^a{}_{bc}\omega^c = \hat{A}^a Z_b - Z^a \hat{A}_b + Z^d \omega^c \, {}^{4}\varepsilon_{dc}{}^a{}_b$$

$$\Gamma^\sigma{}_{\mu 0} = -(\hat{A}^\sigma Z_\mu - Z^\sigma \hat{A}_\mu + Z_\alpha \omega_\rho \varepsilon^{\alpha\rho\sigma}{}_\mu) = -(\hat{A}^\sigma Z_\mu - Z^\sigma \hat{A}_\mu - \omega_\rho \varepsilon^{0\rho\sigma}{}_\mu).$$ 容易从中看到结论：

$\Gamma^0{}_{00} = 0.\quad \Gamma^0{}_{i0} = \hat{A}_i \quad \Gamma^i{}_{00} = \hat{A}_i \quad \Gamma^i{}_{j0} = -\omega^k \varepsilon_{0kij}$ 用 η_{ab} 降0分量会出负号

而后证明 $\Gamma^\sigma{}_{ij} = 0$。设 $\mu(s)$ 是由 $p \in G$ 出发的类空测地线，且其在p处切矢 T^a 与 Z^a 正交。从而沿这条线有 $x^0 = t = \tau_p = \text{Const}$，$x^i = s \cdot T^i$ $\Rightarrow \frac{d^2x^\sigma}{ds^2} = 0.$

利用测地线方程。$0 = \Gamma^\sigma{}_{ij}\frac{dx^i}{ds}\cdot\frac{dx^j}{ds} \Rightarrow 0 = \Gamma^\sigma{}_{ij}T^i T^j$ 或 $0 = \Gamma^\sigma{}_{ij} w^i w^j \ \ \forall w^i \Rightarrow \Gamma^\sigma{}_{ij} = 0.$

下面证明原命题。写下自由质点的世界线在G(T)固有坐标系内的方程。$\frac{d^2x^\mu}{d\tau_L^2} + \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\tau_L}\cdot\frac{dx^\sigma}{d\tau_L} = 0$ 改选 $t = x^0$ 为L的参数。令 $\gamma = \frac{dt}{d\tau_L} \Rightarrow \frac{dx^\mu}{d\tau_L} = \gamma\cdot\frac{dx^\mu}{dt}$，$\frac{d^2x^\mu}{d\tau_L^2} = \gamma\left(\gamma\cdot\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \frac{d\gamma}{dt}\cdot\frac{dx^\mu}{dt}\right).$ (*).

取 $\mu = i$，代入测地线方程后可得出。$a^i = -\gamma^{-1}\cdot u^i\cdot\frac{d\gamma}{dt} - (\Gamma^i{}_{00} + 2\Gamma^i{}_{0j}\cdot u^j + \Gamma^i{}_{jk}u^j u^k).$

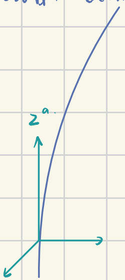
其中有一项 $2\omega^k\varepsilon_{0kij}u^j$。利用上面的体元分解等式：$\varepsilon_{0kij} = \varepsilon_{kij}$，变写成 $2\omega^k\varepsilon_{kij}u^j = 2\varepsilon_{ijk}\omega^k u^j = -2\varepsilon_{ijk}\omega^j u^k.$

这样有：$a^i = -\gamma^{-1}\cdot u^i\cdot\frac{d\gamma}{dt} - \hat{A}^i - \varepsilon^i{}_{jk}\omega^j u^k$ 还需要求出其中的 $\gamma^{-1}\cdot\frac{d\gamma}{dt}$。令(*)中 $\mu = 0$ $\Rightarrow \frac{d^2t}{d\tau_L^2} = \gamma\cdot\frac{d\gamma}{dt}.$

再将测地线方程中μ取0 $\Rightarrow 0 = \gamma\cdot\frac{d\gamma}{dt} + 2\Gamma^0{}_{0i}\cdot\frac{dt}{dt}\cdot\frac{dx^i}{dt}\cdot\gamma^2 = \gamma\cdot\frac{d\gamma}{dt} + 2\hat{A}_i u^i\cdot\gamma^2.$ 从中求出 $\gamma^{-1}\cdot\frac{d\gamma}{dt} = -2\hat{A}_b u^b.$ 代回并改为抽象指标即证.

Day 65.

观者: $G(T)$, A^a, ω^a, $\{x^i\}$



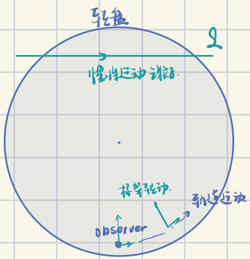
借由每个观者的固有系, 可研究另"附近"经过的质点的行为.

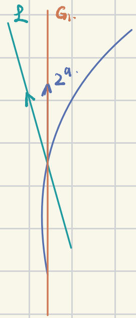
Def 1 设 $\{t, x^i\}$ 为 G 的固有系, 质点世界线为 L. 则质点在 L 上一点相对 G 的 3-速, 3-加: $u^a = \left[\frac{dx^i}{dt}\right]\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a$, $a^a = \left[\frac{d^2x^i}{dt^2}\right]\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a$.

特别地, 若 p 为 L 线与 G 线交点, 则 L 在 p 点相对于 G 的 3-速可定义为: $u^a = \frac{h^a{}_b U^b}{\gamma}$, $\gamma = -Z^a U_a$.

可证明这两个定义的等价性.

在牛顿力学中, 在非惯性系中应引入"惯性力"来保证牛顿定律成立. 例如, 对于平动参考系. $\underbrace{-m\hat{\vec a}}_{\text{惯性力}} = m\vec a \Rightarrow \vec a = \hat{\vec a}$





G $(\hat A^a, \omega^a)$

Thm 1 设观者 G 的 4-加速 $\hat A^a$, 角速度 ω^a, 被观测质点世界线 L 与 $G(T)$ 交于 p. L 在 p 点相对于 G 的 3-速为 u^a, 则 L 在 p 相对 G 3-加:

$$a^a = \frac{d^2x^i}{dt^2}(e_i)^a = -\hat A^a - 2\varepsilon^a{}_{bc}\,\omega^b u^c + 2(\hat A_b u^b)\, u^a.$$

一些特殊情形: a). 非测地线无自转观者. $a^a = -\hat A^a + 2\underbrace{(\hat A_b u^b)\, u^a}_{}$ 相对论修正 在 $u \ll 1$ 下消失.

对于 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 中的特殊情形. 若添加在 p 点瞬时静止的惯性观者 G_1. 则 G 相对于 G_1 的 3-加速 $\hat a^a = \hat A^a$.

牛顿力学中 非惯性观者相对惯性系的 3-Acc.

b). 测地线上有自转观者. $a^a = -2\varepsilon^a{}_{bc}\,\omega^b u^c = 2\vec u \times \vec\omega$.