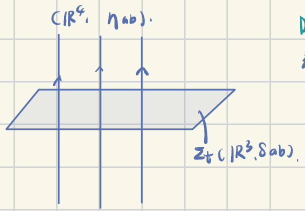
Day 53.

电磁场涉及到两种物理场 ①. 电磁场 ②. 全体带电粒子组成的连续介质. 在四维语言中, 电磁场是一个2-形式 F_{ab}.



Def 1. 瞬时观者 (p, Z^a) 测得的电磁场定义为: $E_a = F_{ab}Z^b$ $\quad B_a = -{}^*F_{ab}Z^b$

首先看 E^a 的时间分量: $Z^aE_a = F_{ab}Z^aZ^b = F_{[ab]}Z^{(a}Z^{b)} = 0$. 故 E 确实为空间矢量.

Theorem 1. $E_i = F_{i0}$ $\quad B_1 = F_{23}$ $\quad B_2 = F_{31}$ $\quad B_3 = F_{12}$

$E_i = E_a(e_i)^a = F_{ab}(e_i)^a(e_0)^b = F_{i0}$.

$B_i = B_a(e_i)^a = -{}^*F_{ab}(e_i)^a(e_0)^b = -\frac{1}{2}F^{cd}\varepsilon_{cdab}(e_i)^a(e_0)^b = -\frac{1}{2}F^{cd}\varepsilon_{cdi0} = -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu i0}$.

取 B_1 为例: $B_1 = \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu01} = \frac{1}{2}(F^{23}\varepsilon_{2301} + F^{32}\varepsilon_{3201})$ 由于 tetrad 正交归一, 从而 $\varepsilon_{----} = \pm 1$. $\Rightarrow B_1 = F_{23}$.

从而有: $F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ E_1 & 0 & & \\ E_2 & -B_3 & 0 & \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix}$

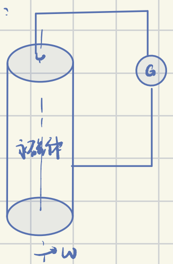
Theorem 2. 惯性系间的电磁场变换关系由下式给出:

$\begin{cases} E_1' = E_1 \\ B_1' = B_1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} E_2' = \gamma(E_2 - vB_3) \\ B_2' = \gamma(B_2 + vE_3) \end{cases}$ $\quad \begin{cases} E_3' = \gamma(E_3 + vB_2) \\ B_3' = \gamma(B_3 - vE_2). \end{cases}$ 使用张量分量变换关系即可证明.

Theorem 3. 设p点的两瞬时观者的 tetrad 有如下联系: $(e_2')^a = (e_2)^a$, $(e_3')^a = (e_3)^a$. 则它们测得的 $(\vec{E}, \vec{B})$ 与 $(\vec{E}', \vec{B}')$ 也满足上述关系.

注释: 以上观测只在p点处观测. 不涉及"p点邻域"(未知). 从而可以将瞬时观者延拓成一条世界线. 用与 Th2 相同的方式证明.

例:



→ 到底是磁力线在动从而切割导线?

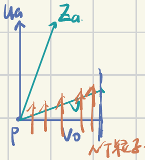
→ 还是铁中电荷在磁场中移动?

这个问题可以使用上面的公式! 取 $v = r\omega$ 操作一下.

Day 54.

下面讨论带电粒子场. 在4维语言中. 我们将其视作尘埃. 设粒子为电子. 以 U^a 代表这一尘埃的4-速度. 取其伴随观者 (p, U^a). 则他测得的固有数密度 $\eta_0 = N/V_0$.

以 (p, Z^a) 代表另一观者. 从图中看: (p, U^a) 与 (p, Z^a) 都观测到了N个粒子. 但这N个粒子在 (p, U^a) 的同时面上所占体积为 V_0. 而在 (p, Z^a) 同时面上体积 V. 由尺缩: $V_0 = \gamma V$. $\gamma = -Z^a U_a$.



从而新观者看到的 $\eta = \frac{N}{V} = \gamma \cdot \frac{N}{V_0} = \gamma \cdot \eta_0 \Rightarrow \rho = \gamma \cdot \rho_0$.

Def 1. 4-电流密度 $J^a = \rho_0 \cdot U^a$

借 (p, Z^a) 做3+1分解: $J^a = \rho_0 U^a = \rho_0 \gamma (Z^a + u^a) = \rho Z^a + \rho u^a = \rho Z^a + j^a$ 电荷的守恒性方程表为: $\partial_a J^a = 0$.

Theorem 1. Maxwell Eq. $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$. $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

可以被表述为: $\partial^a F_{ab} = -4\pi J_b$. $\partial_{[a} F_{bc]} = 0$.

我们在此证明前两个: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$. 选定惯性系 $\{t, x, y, z\}$. 取 ∂_a 与 $\hat{\partial}_a$ 为与 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 和 $(\mathbb{R}^3, \delta_{ab})$ 适配的导数(普通导数).

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \hat{\partial}_a E^a = (dx^i)_a \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^a \hat{\partial}_i E^j = \hat{\partial}_i E^i$ $\quad \partial_a E^a = (dx^\mu)_a \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^a \partial_\mu E^\nu = \partial_\mu E^\mu \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \partial^a E_a = \partial^a (F_{ab} Z^b) = \partial^a \left[F_{ab} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b\right] = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b \partial^a F_{ab} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b (-4\pi J_b) = 4\pi\rho$.

$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_c = \hat{\varepsilon}^{ab}{}_c \hat{\partial}_a E_b$. 其中 $\hat{\partial}_a E_b = (dx^i)_a (dx^j)_b \hat{\partial}_i E_j$

$$\partial_a E_b = (dx^\mu)_a (dx^\nu)_b \hat{\partial}_\mu E_\nu = (dx^0)_a (dx^j)_b \hat{\partial}_0 \underset{\uparrow}{E_j} + (dx^i)_a (dx^j)_b \hat{\partial}_i E_j$$

这里写. 因为E为空间矢量. 将它投影到等时面 Σ_t 上.

$h_a{}^d h_b{}^e \partial_d E_e = (dx^i)_a (dx^j)_b \hat{\partial}_i E_j$ (第一项被投影投没了). $\hat{\varepsilon}^{ab}{}_c$ 为欧氏空间体元. 它是一个空间张量.

$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_c = \underline{\hat{\varepsilon}^{ab}{}_c} h_a{}^d h_b{}^e \partial_d E_e = \hat{\varepsilon}^{de}{}_c \partial_d E_e = \hat{\varepsilon}^{ab}{}_c \partial_a E_b = \hat{\varepsilon}^{ab}{}_c \partial_a (F_{be} Z^e) = Z^e \hat{\varepsilon}^{ab}{}_c \partial_a F_{be} = -Z^e \hat{\varepsilon}^{ab}{}_c \partial_e F_{ab} - Z^e \hat{\varepsilon}^{ab}{}_c \partial_b F_{ea}$

一作 Σ_t 上张而且有效果的. 投影以后指标.

而 $Z^e \hat{\varepsilon}^{ab}{}_c \partial_b F_{ea} = Z^e \hat{\varepsilon}^{ba}{}_c \partial_a F_{eb} = \hat{\varepsilon}^{ba}{}_c \partial_a (F_{eb} Z^e) = \hat{\varepsilon}^{ab}{}_c \partial_a (F_{be} Z^e) = (\nabla \times \vec{E})_c$.

从而我们有: $2(\vec{\nabla} \times \vec{E})_c = -Z^e \hat{\varepsilon}^{ab}{}_c \partial_e F_{ab}$. 利用诱导体元的表达式 $\hat{\varepsilon}_{cab} = Z^d \varepsilon_{dcab}$.

$2(\vec{\nabla} \times \vec{E})_c = -Z^e Z^d \varepsilon_{dc}{}^{ab} \partial_e F_{ab} = -Z^e \partial_e (\varepsilon_{dc}{}^{ab} F_{ab} Z^d) = -Z^e \partial_e (2 {}^*F_{dc} Z^d) = -2 Z^e \partial_e B_c$. 从而 $(\vec{\nabla} \times \vec{E})_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^c (\vec{\nabla} \times \vec{E})_c = -Z^e \partial_e B_i = -\frac{\partial B_i}{\partial t}$.

Day 55.

Maxwell Eq. 中，J^a 决定了 F_{ab} 随时间的演化。那么电磁场也会对带电粒子流有影响。用3维语言，带电粒子受力为 $\vec{f} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$.

注意：整个电动力学的框架都是洛仑兹协变的。上面洛仑兹力的表达式也是相对论协变的。在某个惯性系下，$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$。为验证这一点，我们写出4-洛仑兹力。

Theorem 1. 带电粒子的4-洛仑兹力为：$F^a = q F^a{}_b U^b$

只需证明，对任一瞬时观者，$F^i = \gamma f^i$，$F^0 = \gamma \vec{f} \cdot \vec{u}$。对 F^a 作分解可得，$F^a = \gamma q F^a{}_b (Z^b + u^b) = \gamma q (E^a + F^a{}_b u^b)$。从而 $F_a = \gamma q (E_a + F_{ab} u^b)$.

看空间分量：$F_i = (e_i)^a F_a = \gamma q (E_i + F_{ij} u^j)$。所以只要验证 $F_{ij} u^j = (\vec{u} \times \vec{B})_i$

$(\vec{u} \times \vec{B})_c = \hat{\varepsilon}_c{}^{ab} u_a B_b = \hat{\varepsilon}_c{}^{ab} u_a (-{}^*F_{bd} Z^d) = -\hat{\varepsilon}_c{}^{ab} u_a (-\frac{1}{2} \varepsilon_{bd}{}^{ef} F_{ef} Z^d) = -\frac{1}{2} u^a \hat{\varepsilon}_{cab} \varepsilon^{bdef} F_{ef} Z_d = \frac{1}{2} u^a Z^g \varepsilon_{gcab} \varepsilon^{defb} F_{ef} Z_d = \frac{1}{2}(-3!) u^a Z^g \delta^{[d}{}_g \delta^e{}_c \delta^{f]}{}_a Z_d F_{ef}$

$= -3 u^a Z^g Z_g F_{ca} = -3 u^a Z^g Z_{[g} F_{ca]} = F_{ca} u^a - Z_c u^a E_a$。与基矢 i 缩并有：$(\vec{u} \times \vec{B})_i = (e_i)^c (\vec{u} \times \vec{B})_c = F_{ij} u^j$。从而得证。

另外一个分量留作习题。

Thr 2. 电磁场的能动张量为：$T_{ab} = \frac{1}{4\pi}(F_{ac} F_b{}^c - \frac{1}{4} \eta_{ab} F_{cd} F^{cd}) = \frac{1}{8\pi}(F_{ac} F_b{}^c + {}^*F_{ac} {}^*F_b{}^c)$

可以证明，这样的定义给出 $T_{00} = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2)$，$w_i = -T_{i0} = \frac{1}{4\pi}(\vec{E} \times \vec{B})_i$.

Day 56

对于孤立体系，我们有 $\partial^a T_{ab}=0$. 这对于无源电磁场成立. 使用外微分语言改写麦氏方程,有: $\partial_{[a}F_{bc]}=0 \Leftrightarrow dF_{ab}=0$. 从而 F_{ab} 是closed. 在 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 上,它为 exact.

*注:若将 $\mathbb{R}^4$ 挖去一部分,则这只能locally成立.

$\Rightarrow \exists$ 1-form A 使得 $F_{ab}=(dA)_{ab}=2\partial_{[a}A_{b]}=\partial_a A_b-\partial_b A_a$. 称满足 $F=dA$ 的 A_a 为电磁场 F_{ab} 的 4-potential. 显然它不唯一,可取 $\tilde{A}=A+d\chi$. χ 为光滑标量场 (gauge freedom, 规范自由性).

我们通常要求 A_a 满足 $\partial^a A_a=0$. 这只需 $\partial^a\partial_a\chi=-\partial^a A_a$. $\partial^a\partial_a\chi=-\eta^{ab}\partial_b\partial_a\chi=\eta^{00}\partial_0\partial_0\chi+\cdots+\eta^{33}\partial_3\partial_3\chi=-\partial^a A_a$. 这是非齐次波动方程,其解甚多.

4势可以借3+1分解来拆成两个3势: $A_a=-\phi(dt)_a+a_a$, ϕ 和 a_a 分别为3-标势和3-矢势. 此外,可以证明: $\partial^a F_{ab}=-4\pi J_b \Leftrightarrow d^*F=4\pi {}^*J$.

在使用4-势后,一个方程自动满足,我们只需另一个: $-4\pi J_b=\partial^a(\partial_a A_b-\partial_b A_a)=\partial^a\partial_a A_b-\partial_a\partial_b A^a=\partial^a\partial_a A_b-\partial_b\partial_a A^a=\partial^a\partial_a A_b \Rightarrow \partial^a\partial_a A_b=-4\pi J_b$.

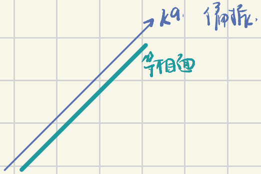
我们关心形如 $A_b=C_b\cos\theta$ 之解. C_b—偏振矢量, θ—相位. $\Rightarrow 0=\partial^a(C_b\cdot\partial_a(\cos\theta))=-\partial^a(C_b\cdot\sin\theta\,\partial_a\theta)=-C_b[\sin\theta\,\partial^a\partial_a\theta+\cos\theta(\partial^a\theta)(\partial_a\theta)]=0$

一种最简单的求解方式: $\begin{cases}(\partial^a\theta)(\partial_a\theta)=0\\ \partial^a\partial_a\theta=0\end{cases}$ 令 $k^a=\partial^a\theta \Rightarrow k^a k_a=0 \Rightarrow k^a$ 为类光矢量. $0=\partial_b(k^a k_a)=2k^a\partial_b k_a=2k^a\partial_b\partial_a\theta=2k^a\partial_a\partial_b\theta=2k^a\partial_a k_b \Rightarrow k^a\partial_a k_b=0$,

$\Rightarrow$ 光子世界线是类光测地线.

取等θ面, $\varphi=\{p\in\mathbb{R}^4 \mid \theta_p=c\}$. 记 $k^a=\partial^a\theta$, 则 k^a 为曲面φ的法矢. $\Rightarrow \varphi$ 为类光超曲面

*k^a 为类光法矢,它"躺"在超曲面上.



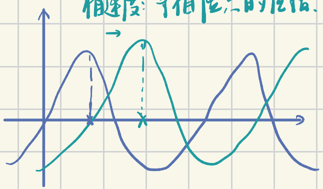
Day 57.

借一模坐标系，可以展开 $k_a = (d\theta)_a = \partial_a \theta = k_a = k_\mu (dx)^\mu$. 一种最简单的解为 k^a 为常矢场 $\Rightarrow \theta = k_\mu x^\mu + \theta_0$.

由 $k^a = k^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a = k^0 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + k^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a = \omega \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + k^a$. 由于 $k_0 = \eta_{00} \cdot k^0 = -\omega$. $\Rightarrow \theta = -\omega t + k_i x^i \Rightarrow$ 方程之解为单色平面波 $A_b = C_b \cos(\omega t - k_i x^i)$.

* <u>复习</u>：单色标量波 $f(t, x) = F \cos(\omega t - kx)$. 固定 t/x，波都是简谐的. 考虑 $\begin{cases} f(t_1, x) = F\cos(\omega t_1 - kx). \\ f(t_2, x) = F\cos[(\omega t_1 - kx) + \omega \cdot \Delta t] \end{cases}$

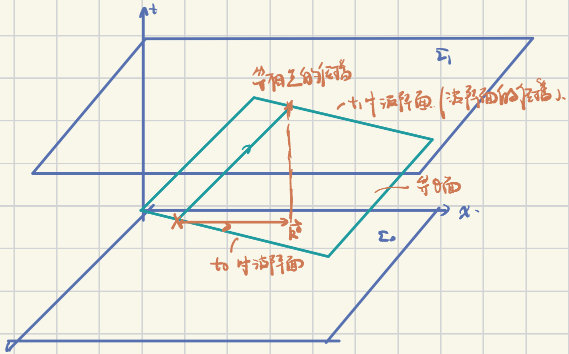
相速度：等相位点的传播. $v_p = \frac{\omega}{k}$.



对于矢量波：$\hat{\theta} = \omega \hat{t} - k_i x^i$ 容易证明 $\hat{\theta} = c$ (波阵面). 的法矢为 k^a.

Day 58.

我们绘制 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 上等θ面



由于波相速为光速 ⇔ 世界线为类光超曲面

使用类光世界线代替波动描述单色平面波的方法称为几何光学 (Geometry Optics).

$K^a = \omega Z^a + k^a$

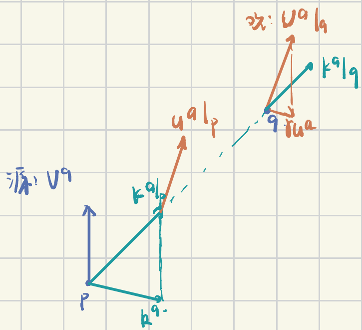
$0 = K^a K_a = (\omega Z^a + k^a)(\omega Z_a + k_a) \Rightarrow \omega^2 = k^2$ (一维情况: $\omega = k$).

若不满足两个常矢量场条件 ($\partial_a C_a \neq 0$, $\partial_a k^b \neq 0$). 但它们都慢变 → 局域单色波.

由于光子的静质量 $m=0$. 故: 无法将四动量定义直接迁移过来. 改用个一新的定义. $P^a = \hbar K^a$.

$P^a = \hbar(\omega Z^a + k^a) = \hbar\omega Z^a + \hbar k^a \Rightarrow E = \hbar\omega$, $p^a = \hbar k^a$.

最后, 我们探讨光的多普勒效应.



$K^a = \omega Z^a + k^a$. $\omega = -K^a Z_a$.

对源: $\omega = (-K^a V_a)|_p$.

对观: $\omega' = (-K^a U_a)|_q = -(K^a U_a)|_p$

$= -(\omega V^a + k^a)\cdot\gamma(V_a + u_a) = \gamma(\omega - k^a u_a)$ 用k代表 k^a 之模. $k \cdot u$ 在 $(\mathbb{R}^3, \delta)$ 中夹角记为θ

$= \gamma(\omega - ku\cos\theta) = \gamma\omega(1 - u\cos\theta)$. $\Rightarrow \omega' = \gamma\omega(1 - u\cos\theta)$. 这便是相对论性多普勒效应

极端情形: ① 观、源同向 $(\theta = 0)$. $\omega' = \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\,\omega < \omega$ (蓝移).

② 观、源反向 $(\theta = \pi)$. $\omega' = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\,\omega > \omega$.

③ 横向 $(\theta = \frac{\pi}{2})$. ∴ $\omega' = \gamma\omega$.

补充材料

选读 6-1-1：非相对论时空。牛顿引力论：$\nabla^2\phi = +4\pi\rho$。ρ—质量密度。牛顿方程：$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\partial\phi}{\partial x^i}$。

在几何语言下表述为：a). 存在一个称为绝对时间的光滑函数 $t: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$。

b). 有协变导子 ∇_a。在某系 $\{x^\mu\}$ 内有克氏符 $\Gamma^i{}_{00} = \frac{\partial f}{\partial x^i}$

从而：1). 绝对时间带来一个绝对分层结构。即 $p \in \mathbb{R}^4$，都有 Σ_t 使 $p \in \Sigma_t$ → t 时刻"整个3维空间"。

2). 牛顿时空中测地线：$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0$。对于0分量有：$t = \alpha\lambda + \beta$。⇒ t 可作测地线仿射参数 ($\alpha \neq 0$时)

对于其他。$\Gamma^i{}_{00} = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ ⇒ $\frac{d^2x^i}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0$。⇒ $\{x^i\}$ 为伽利略坐标，而 f 为引力势 ϕ

3). $R_{0i0}{}^j = -R_{i00}{}^j = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^i \partial x^j}$　$R_{00} = \sum_i \frac{\partial^2\phi}{\partial x^i} = 4\pi\rho$。其余为0 → 牛顿时空不平直！　而 ∇_a 在 Σ_t 上诱导出的导子 $\hat{\nabla}_a$ 平直 ($\Gamma^i{}_{jk} = 0$)。$\hat{\nabla}_a = \partial_a$。

$\{x^i\}$ 可解释为欧氏坐标系。度规选为 δ_{ab}

从而每一绝对同时面为 $(\mathbb{R}^3, \delta_{ab})$、欧氏空间。　＊但无法给 $\mathbb{R}^4$ 定义与 ∇_a 适配的度规。

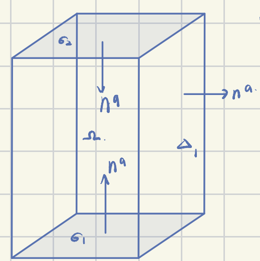
6-3-1：从3-动量定可推出4-动量定理。设碰前所有粒子总动 p^a。碰后 p'^a。取 (p, Z^a)，使 p^a 与 Z^a 平行。则在 (p, Z^a) 看来 $p^a = 0$。由3-守恒有 $\vec{p}'^a = 0$。从而 p'^a 无空间分量，与 p^a 平行

⇒ $p'^a = 6 \cdot p^a$。选择另一个瞬时观者 (p, Z'^a)。则它测得到的3-动：$\vec{p}'^{a'} = h'^a{}_b\, p'^b = h'^a{}_b \cdot 6 \cdot p^b = 6 \cdot \vec{p}^{a'}$。由此种的3-守恒给出 $6 = 1$。从而立刻得到4-守恒。

4-守恒的先验式是基本不变的。它导出任意惯性系中的 $p^0 E^a$ 守恒。

6-4-2：由 $\partial^a T_{ab} = 0$ 给出能量守恒的另一个方法。令 Ω 为一个三维盒子 w 对应的世界管(体)。则利用 $\partial_a w^a = 0$。由 Gauss 定理：$\int_{\bar{V}(N)} (\nabla_a v^a)\,\varepsilon = \int_{\partial N} v^a n_a \cdot \hat{\varepsilon}$。

从而 $0 = \int_\Omega \partial_a w^a = \int_{\partial\Omega} w^a n_a = \int_{\sigma_1} w^a n_a + \int_{\sigma_2} w^a n_a + \int_\Delta w^a n_a$.



(σ₁、σ₂ 的单位法矢指曲面内，无四于 $n^a n_a = -1$)。

计算积分 $\int_{\sigma_1} w^a n_a = \int_{\sigma_1} (\rho Z^a + w^a) n_a = \int_{\sigma_1} \rho Z^a Z_a = -\int_{\sigma_1}\rho = -E_1$　E_1：三维盒子 w 在 t_1 时刻拥有能量

同样有 $\int_{\sigma_2} w^a n_a = -E_2$.

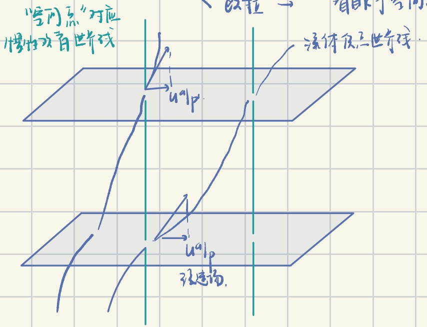
右侧面：$\int_{\Delta_1} w^a n_a = -\int T_{ab} Z^b \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a = \int_{\Delta_1} w_1 = \int_{\Delta_1} w_1 \hat{\varepsilon}$.　令 $\hat{\varepsilon}$ 为四维体元 ε 在 Δ_1 上诱导的三维体元。　$\hat{\varepsilon}_{abc} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^d [(dt)_d \wedge (dx)_a \wedge (dy)_b \wedge (dz)_c]$

$= -(dt)_a \wedge (dy)_b \wedge (dz)_c$.

从而 $\int_{\Delta_1} w^a n_a = -\int_{\Delta_1} w_1 \cdot (dt \wedge dy \wedge dz) = \int_{\Delta_1} w \cdot \underline{dt \cdot dy}\, dz$　$= \underbrace{\int_{t_1}^{t_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} w_1}_{\text{从 } dy\,dz \text{ 面在 } dt \text{ 内流出的能量}}$

$(t, y, z$ 为右手系$)$

6-5-1. 流体力学的描述 $\begin{cases} \text{拉格朗日} \to \text{着眼于流体质点} \\ \text{欧拉} \to \text{着眼于空间点.} \end{cases}$



通过取小立方体.易知流体体元所受压强为 $\frac{\vec{F}}{\Delta V} = -\vec{\nabla} p$. 从而 $-\vec{\nabla} p = \frac{\vec{F}}{V} = \frac{m}{V} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}$. ρ 为质量密度. $\vec{u}$ 为流体质点的3速

以 $\vec{u}(t,x)$ 代表 t 时刻 x 位置的流速. 若要用这个速度"跟踪"某一特定质点. 则写为 $u(t, x^i(t))$.

$\Rightarrow -\vec{\nabla} p = \rho \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x^i} \cdot \frac{dx^i(t)}{dt}\right] = \rho\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}\right]$

6-6-1. 证明电磁场变换的一种方法. 取两观者 $(p, (e_0)^a)$ 和 $(p, (e_0')^a)$. 对观者2的4速做3+1分解: $(e_0')^a = \gamma (e_0)^a + \gamma \cdot u \cdot (e_1)^a$.

设 $(e_1')^a$ 在 $\{(e_\mu)^a\}$ 下的展开为 $(e_1')^a = \alpha (e_0)^a + \beta \cdot (e_1)^a$. 利用正交归一性质. $\eta_{ab} (e_1')^a (e_0')^b = 0$. $\eta_{ab} (e_1')^a (e_1')^b = 1$. $\Rightarrow (e_1')^a = \gamma u (e_0)^a + \gamma (e_1)^a$

从而给出 $\{ (e_0')^a, (e_1')^a, (e_2')^a, (e_3')^a \}$ 这一组正交归一标架. 借这个标架求出观者2的场:

$E_2' = F_{20}' = F_{ab} (e_2')^a (e_0')^b = F_{ab} (e_2)^a [\gamma (e_0)^b + \gamma u (e_1)^b] = \gamma[F_{20} + u F_{21}] = \gamma (E_2 - u B_3)$.

6-6-3. 考虑单色平面波的4-势. $A_b = C_b \cos\theta$ $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$.

$\Rightarrow F_{ab} = (C_a k_b - C_b k_a) \cdot \sin\theta = 2 C_{[a} k_{b]} \sin\theta$. 在洛伦兹规范 $\partial^b A_b = 0$ 下有: $k^a C_a \cdot \sin\theta = 0$. $\forall \theta$ 成立. $\Rightarrow k^a C_a = 0$.

做规范变换: $C_a' = C_a + \alpha \cdot k_a$. 利用 $k^a k_a = 0$ 有: $F_{ab}' = F_{ab}$. 由于 k_a 是波矢. 故 $k_0 \neq 0$. 从而 $\alpha = -C_0/k_0$. 使 $C_0' = 0$. 从而 c 是空间矢量

由 k^a 的3+1分解: $k^a = \omega \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + k^a$. 从而 $E_a = Z^b (C_a k_b - C_b k_a) \cdot \sin\theta = -\omega \cdot C_a \cdot \sin\theta$

$B_a = -{}^*F_{ab} Z^b = -\frac{1}{2} Z^b \varepsilon_{abcd} F^{cd} = +\frac{1}{2} Z^b \varepsilon_{bacd} F^{cd} = \frac{1}{2} \hat{\varepsilon}_{acd} F^{cd} = \frac{1}{2} \hat{\varepsilon}_{acd} 2 C^{[c} k^{d]} \cdot \sin\theta = \hat{\varepsilon}_{acd} C^c k^d \sin\theta$

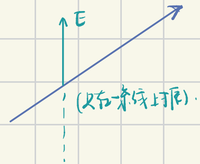
从而 $\vec{E} = -\omega \vec{C} \cdot \sin\theta = \omega \vec{C} \sin(\omega t - k_i x^i)$

$\vec{B} = \vec{C} \times \vec{k} \sin\theta = \vec{k} \times \vec{C} \sin(\omega t - k_i x^i)$

$\Rightarrow \vec{B} = \hat{\vec{k}} \times \vec{E}$

由于 $C_0 = 0$ $\Rightarrow k^a C_a = 0$. $\vec{k}^a \cdot \vec{C}_a = 0$ 而又有 $\vec{E}$ 与 $\vec{C}$ 平行. 从而 $\vec{E}$ 与 $\vec{k}$ 垂直. B 与 $\vec{E}$. $\vec{k}$ 均垂直 $\Rightarrow$ $\vec{E}$. $\vec{B}$ 波为同频.同相位.的横波.

上面的讨论是线偏光.



下面讨论一些其他偏振形式: $A_0 = C_0\cdot\cos\theta \to A_0 = \mathrm{Re}(C_0\cdot\exp(i\theta))$. 此时 C_0 可推广为常复矢量.

$\vec{E} = \mathrm{Re}[i\omega\cdot\vec{C}\cdot\exp(-i(\omega t - k_i x_i))]$. 定义 $\vec{\varepsilon} = i\omega\vec{C}\cdot\exp(i\cdot k_i x_i)$. 从而 $\vec{E} = \mathrm{Re}(\vec{\varepsilon}\cdot\exp(i\omega t))$. 可以证明此时 $\vec{E}$ 端点画出椭圆.

取 $\vec{\varepsilon} = \vec{p} + i\vec{r}$. 引入 $\vec{m} = \vec{p}\cdot\cos\beta + \vec{r}\cdot\sin\beta$ $\quad \vec{n} = -\vec{p}\cdot\sin\beta + \vec{r}\cdot\cos\beta$. 则 $\vec{\varepsilon} = \vec{p} + i\vec{r} = (\vec{m} + i\vec{n})\cdot\exp(i\beta)$. 为使 $\vec{m}$, $\vec{n}$ 正交, 应有 $\tan 2\beta = \dfrac{2\vec{p}\cdot\vec{r}}{p^2 - r^2}$.

从而 $\vec{E} = \vec{m}\cdot\cos(\omega t - \beta) + \vec{n}\sin(\omega t - \beta)$. 这是椭圆偏光.