DAY 5

切矢是某个矢量空间的一个元素，我们先从矢量空间的定义开始.

**Def 1.** 矢量空间

矢量空间是一个定义了两个映射的矢量空间. 加法：$V\times V\to V$. 数乘：$\mathbb{R}\times V\to V$. 它满足一些基本条件 (此处不再详述).

现在，我们想在流形上任一点 $p$ 定义矢量. 我们称 $M$ 上所有 $C^\infty$ 的标量场集合定义为 $\mathscr{F}_M$. 比如，$\mathbb{R}^3$ 上这个集合是 $\mathscr{F}_{\mathbb{R}^3}$. 对于任意 $f\in\mathscr{F}_{\mathbb{R}^3}$，我们可以沿着 $p$ 点处的任意一个方向计算 $f$ 的方向导数. 在很多流形 $M$ 上，我们都可以做此推广.

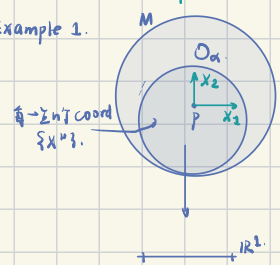
**Def 2.** 我们将映射 $v:\mathscr{F}_M\to\mathbb{R}^1$ 称为点 $p\in M$ 处的一个矢量，若对 $\forall f,g\in\mathscr{F}_M$，$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 都有：

↳ "沿某方向的偏导算符".

a). 线性性：$v(\alpha f+\beta g)=\alpha\cdot v(f)+\beta v(g)$.

b). 莱布尼兹定律：$v(fg)=f|_p\, v(g)|_p+v(f)|_p\, g_p$.

**Example 1.**




设 $O_\alpha$ 上有一标量场 $f$. 定义矢量 $X_\mu(f)=\frac{\partial F(x)}{\partial x^\mu}\Big|_p$ → 沿一个轴的方向求方向导数.

**Theorem 1.** (略证)

**Theorem 2.** 以 $V_p$ 代表流形 $M$ 上 $p$ 点处所有矢量的集合. 则 $V_p$ 是 $n$ 维矢量空间. ($n$ 为 $M$ 的维数).

**Proof.** 首先证明 $V_p$ 是矢量空间. 我们只需定义加法，数乘如下：

$(v_1+v_2)(f)=v_1(f)+v_2(f)$. $\quad (\alpha v)(f)=\alpha\cdot v(f)$.

定义零元 $\underline{0}\in V_p$，$\underline{0}(f)=0$. 从而可以验证此时 $V_p$ 符合矢量空间的定义.

现在来讨论其维数. 我们采取的方法是证明它有 $n$ 个基底.

DAY 6

接上节：我们任取α使之覆盖p，此时 $M\to\mathbb{R}$ 标量场变成函数 $F(x_1,\cdots x_n)$。我们将在p点选择n个矢量 $X_\mu$，证明它们线性无关，即 $\alpha^\mu X_\mu = 0$。

我们将这n个矢量写为：$X_\mu(F) = \left.\dfrac{\partial F(x)}{\partial x^\mu}\right|_p$

将上式左右两侧作用在同一标量场上，这里我们设 $V_\alpha \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的映射为：$x^\nu$

$\Rightarrow (\alpha^\mu X_\mu)(x^\nu) = 0(x^\nu) = 0$ （已使用爱因斯坦求和记号）

$\alpha^\mu X_\mu(x^\nu) = \alpha^\mu \dfrac{\partial(x^\nu)}{\partial x^\mu} = \alpha^\mu \delta^\nu{}_\mu = \alpha^\nu$ $\Rightarrow$ 当且仅当 $\alpha^\nu=0$ 时，上式才成立 $\Rightarrow X_\mu = \left.\dfrac{\partial F(x)}{\partial x^\mu}\right|_{x=p}$ 是线性无关的。换言之，$\dim V_p \geq n$。

现在，我们证明对任意 $v\in V_p$ 都可以表为 $v = v^\mu X_\mu$。（在这里不证明，但若要求 $v^\mu$，只需将上式作用于 $x^\nu$ 上）。

我们将 $\{X_\mu\}$ 称为一组（在特定坐标系下的）坐标基底，相应的 $\{v^\mu\}$ 被称为坐标分量。

我们欲将 $v\in V_p$ 在两组坐标基底下展开：$v = v^\mu X_\mu = v'^\nu X'_\nu$ （注：实际上 $v^\mu$ 和 $v^\nu$ 一样，若要强调不同参数，用 $v^\mu, v'^\nu$）

Theorem 3. 坐标分量的变换 $v'^\nu = \left.\dfrac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\right|_p v^\mu$

注：实际上，这是矢量的另一定义方式：在坐标系变化的情形下，随之变化的一组数 $\{v^\mu\}$

※ 证明技巧：先计算 $X_\mu$，$X'_\nu$ 之间的关系。

证明：首先写下在两组坐标系下的基矢。$X_\mu(f) = \left.\dfrac{\partial F(x)}{\partial x^\mu}\right|_{x=x(p)}$ $X'_\nu(f) = \left.\dfrac{\partial F'(x')}{\partial x'^\nu}\right|_{x'=x'(p)}$ → 它们都是在p点的切空间中的，所以自然只看p点的值

由于 $f(q) = F(x(q)) = F'(x'(q))$，简单起见，我们写成 $F(x) = F'(x')$

（流形上的矢量场（映射）；n元函数）

此外，$x'$ 必然可以写为 x 的函数（坐标变换）。$\Rightarrow x' = x'(x)$。$\Rightarrow F(x) = F(x'(x))$。

现在计算：$X_\mu(f) = \left.\dfrac{\partial F(x)}{\partial x^\mu}\right|_{x=x(p)} = \left.\dfrac{\partial F'(x'(x))}{\partial x^\mu}\right|_{x=x(p)} = \left.\dfrac{\partial F'(x')}{\partial x'^\nu}\right|_{x'=x'(p)=x'(x(p))} \cdot \left.\dfrac{\partial x'^\nu(x)}{\partial x^\mu}\right|_{x=x(p)} = \left.\dfrac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\right|_{x=x(p)} X'_\nu(f)$

$= \left(\dfrac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} X'_\nu\right)(f)$，这样我们获得了坐标基底间的关系。

从而：$v = v^\mu X_\mu = v'^\nu X'_\nu$

$\Rightarrow v^\mu \left.\dfrac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\right|_{x=x(p)} X'_\nu = v'^\nu X'_\nu$，从而立刻得到坐标基底间的变换关系。

下面我们研究曲线。


Def. 设 I 是 $\mathbb{R}$ 的一个区间，则 $C^r$ 映射 $C: I\to M$ 称为 M 上的 $C^r$ 类曲线。

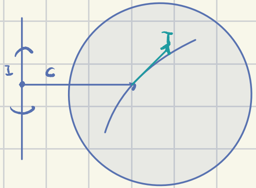
取 $t\in I$，则存在唯一 $C(t)\in M$ 与之对应，t 称为曲线 C 的参数。

设 $C(I)$ 与 $C'(I')$ 的像重合，它们看起来像一条，但实际上是两条，称 $C(I)$ 是 $C(I)$ 的重参数化。准确的来说，需要找到上映射 $\alpha: I\to I'$，使得 $C = C'\circ\alpha$。

在流形上选定坐标系后，可以得到 n 元函数 $x^\mu = x^\mu(t)$，这被称为曲线的参数方程。

DAY 7

我们现在介绍曲线的切矢。




给定曲线 $c: I \to M$，我们将曲线上 $c(t_0)$ 点处切于 $c(t)$ 的矢量称为 $T$。它是 $M$ 上 $c(t_0)$ 点的矢量，因此我们应通过它对于函数的作用来定义它。

切矢 $T$ 定义为：$T(f) = \frac{d(f\circ c)}{dt}\Big|_{t_0}$ $f\circ c$ 是一个 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的函数。直观上，这就是沿曲线 $c$ 移动一点，检查 $f$ 的变化，也就是类似于方向导数。

注：方向导数是移动单位长度检查 $f$ 的变化，而这里"移动"多少是与 $c$ 有关的，因此这个定义是类似于方向导数。

我们会使用其他记法：$T(f) = \frac{d(f\circ c)}{dt}\Big|_{t_0} = \frac{\partial f(c(t))}{dt}\Big|_{t_0} = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{c(t_0)}(f)$。

Example 1. 坐标线的切矢。设流形 $M$ 上有一局部坐标系 $(O_\alpha, \psi_\alpha)$，若某条曲线上只有 $x^\mu$ 变化，而其他坐标都不变化，我们就称这条曲线是 $x^\mu$ 坐标线 (coordinate line)。

我们已有坐标基矢即所谓 $X_\mu = \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu}$ （这里 $f(x)$ 实际上是前写的 $F(x)$）。

而此时 $c(x^\mu)$ 就是坐标线上 $(\cdots, x^\mu, \cdots)$ 一点，所以切矢 $T(f) = \frac{\partial f(c(x^\mu))}{\partial x^\mu} = \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu}$，从而坐标线的切矢正是该点的坐标基矢。

我们现在考虑曲线的切向量 $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t_0}$ 与在此点的坐标基矢 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 之间的关系。结论是：$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{dx^\mu(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ （曲线切矢的坐标分量是参数方程对 $t$ 的导数）。

证明：要考虑矢量之间的关系，我们应将其作用在某个标量场上。我们将其作用在 $x^\nu$ 上，$x^\nu$ 可被 $t$ 参数化为 $x^\nu(t)$。

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{被参数化对 } t \text{ 求导}}}{\frac{\partial x^\nu(t)}{\partial t}} = v^\mu \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = v^\mu \cdot \delta^\nu{}_\mu = v^\nu \Rightarrow v^\nu = \frac{\partial x^\nu(t)}{\partial t}$$ 立刻得证

曲线的切矢依赖于曲线的重参数化。根据前面所说，取定曲线的重参数化 $\alpha(t) = t'(t)$，$c' \circ \alpha = c$，则显然 $c'(t')$ 与 $c(t)$ 有相同的像。

我们希望寻找重参数化后曲线的切矢和重参数化前的关系。首先，直观来看，重参数化前后曲线的切矢是互相平行的。我们称矢量 $v, u \in V_p$ 是互相平行的，则 $v = \alpha u$。

重参数化前后的切矢之间有关系：$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'(t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t'}$

证明：任取 $f \in \mathcal{F}_M$，由于 $c(t) = c'(t')$，故 $f(c(t)) = f(c'(t'))$，其中 $t'$ 是 $t$ 在 $c'^{-1}\circ c$ 下的像。

上式两侧同时对 $t$ 求导有：$\frac{\partial f(c(t))}{\partial t} = \frac{\partial f(c'(t'))}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'(t)}{\partial t}$ 移除 $f$，就变成 $\underset{\substack{\downarrow\\ c(t)\text{的切矢}}}{\frac{\partial(\ )\circ c(t)}{\partial t}} = \underset{\substack{\downarrow\\ c'(t')\text{的切矢}}}{\frac{\partial(\ )\circ c'(t')}{\partial t'}} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t}$。从而得证。

显然，指定任一曲线，它在 $p$ 处的切矢都在 $V_p$ 之内；而 $V_p$ 中任一矢量都是过 $p$ 的某条曲线的切矢。因此，$V_p$ 被称为 $M$ 在 $p$ 处的切空间。

Def. 设 $A$ 为 $M$ 的子集。若给 $A$ 中每一点指定一个矢量，则我们得到一个定义在 $A$ 上的矢量场。

Example. 在一般的曲线上，我们可以将切矢通过得到矢量场，但在自相交曲线（$\exists t_1, t_2 \in I$ 使 $c(t_1) = c(t_2) = p \in M$），但我们仍可在此曲线上定义矢量场，即 $t \in I \mapsto v \in V_{c(t)}$ 的映射。

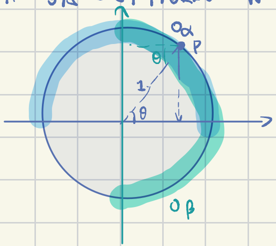
而且可以分别给出 $c$ 在 $t_1, t_2$ 点的切矢，$\frac{\partial(\ )\circ c(t)}{\partial t}\Big|_{t=t_1,t_2}$

给定M上的矢量场，再给定标量场 $f\in M$，则我们可以得到一个新标量场 $v_{(p)}(f)$。但我们不能说 $v_{()}(f)\in \mathscr{F}_M$，这是由于 $v_{()}(f)$ 不一定是光滑的。

Def. M上的矢量场 $v$ 被称为 $C^r$ 类的，若 $v$ 作用于 $C^\infty$ 标量场得到 $C^r$ 标量场。

>>> Chapter 2 部分习题

2.1. 考虑 2.1节中给出的映射，选取两张重叠的地图。



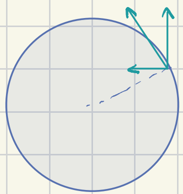

对于p点，$\psi_\alpha$ 将其映到 $x=\cos\theta$，$\psi_\beta$ 将其映到 $y=\sin\theta$

相容性条件要求 $\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}$ 是 $C^\infty$ 光滑的。则 $\psi_\alpha^{-1}: x\to p$ 为 $\theta=\arccos x$

$\psi_\beta\circ\psi_\alpha$ 是 $x'=\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$，$x\in(0,1)$。

显然相容性条件被满足。

2.4. 在这张地图下，所谓的坐标基矢是 $\frac{\partial()}{\partial x}$，$\frac{\partial()}{\partial y}$。曲线的切矢是 $\frac{\partial()\circ c}{\partial t}$。　　在图形里直观表示如：



由曲线切矢在坐标基矢上的展开式可得：$\frac{\partial c\,\partial\circ c}{\partial t}=\underbrace{\frac{\partial\cos t}{\partial t}}_{=-\sin t=-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\partial()}{\partial x}+\underbrace{\frac{\partial\sin t}{\partial t}}_{=\cos t=+\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{\partial()}{\partial x}$.

2.6 设p点处矢量的坐标基底为 $X_\mu$，则任一矢量 $v$ 可被展开成 $v=v^\mu X_\mu$。将上式两侧同时作用在函数 $x^\nu$ 上：

$v(x^\nu)=v^\mu X_\mu(x^\nu)=v^\mu\cdot\frac{x^\nu}{\partial x^\mu}=v^\mu\cdot\delta^\nu{}_\mu=v^\nu$　∴ $v^\nu=v(x^\nu)$。得证。

其物理意义叙述为：矢量在第 $\nu$ 个坐标基矢下的分量恰等于矢量作用在 $x^\nu$ 上所得的值。

DAY 8

之前我们说过，任意矢量场 $v$ 和标量场 $f$，则 $v(f)$ 是一个新的标量场，它在 $p$ 处值为 $v_{(p)}(f)$。现在设有一新矢量场 $u$，它又能将标量场映射为标量场，故 $u(v(f))$ 也是标量场。同理，$v(u(f))$ 也是一个标量场。换言之，我们现在拆除 $f$，则 $v(u(\ ))$ 和 $u(v(\ ))$ 都能将一个标量场 $f$ 映射一个新标量场，因此它们都是矢量场。

Def 1. 两个光滑矢量场的对易子 $[u,v]$ 也是一个光滑矢量场：

$$[u,v](f) = u(v(f)) - v(u(f))$$

它在每点处都是 $M$ 上的矢量，即：$[u,v]|_p(f) = u_{(p)}(v(f)) - v_{(p)}(u(f))$，它是 $\mathcal{F}_M \to \mathbb{R}$ 的映射。

Example 1. $M$ 上任意坐标基矢可自然在 $M$ 上诱导出一个常矢量场（称为基矢场），任意两个基矢场是对易的，这容易验证：

$$[u,v] = u(v(f)) - v(u(f)) = u\left(\frac{\partial f}{\partial x^\nu}\right) - v\left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial f}{\partial x^\nu}\right) - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\right) = 0.$$

Def 2. 曲线 $C(t)$ 被称为矢量场 $v$ 的积分曲线，则其上每一点的切矢等于矢量场在该点的 $v$。

Theorem 1. 设 $v$ 是 $M$ 上光滑矢量场，则 $M$ 上任一点 $p$ 有唯一的积分曲线 $C(t)$ 经过。

proof. 任取坐标域含 $p$ 的坐标域，设待求积分曲线的表达式为 $x^\mu = x^\mu(t)$。积分曲线 $C(t)$ 的切矢 $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{dx^\mu(t)}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial x^\mu} = v = v^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}$

从而我们有 $\frac{dx^\mu(t)}{dt} = v^\mu(x^1(t), \cdots x^n(t))$。这是积分曲线满足的微分方程。则给定 $x^\mu(t)$ 的初值，方程组的解便存在并唯一，从而得证。

下面我们要介绍群的相关知识。

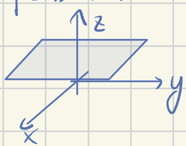
Def 3. 一个群是一个集合 $G$ 配以满足以下条件的映射 $G\times G \to G$。

a). 结合律：$\forall g_1,g_2,g_3 \in G$，$(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$。

b). 恒等元：$\exists e \in G$，使 $eg = ge = g$，$\forall g \in G$。

c). 逆元：对 $\forall g \in G$，$\exists g^{-1} \in G$，使 $g^{-1}g = gg^{-1} = e$。

我们下面看一个例子：考虑一个带电平面，对其进行平移（点变换），$x \mapsto x+a$，$y \mapsto y$，$z \mapsto z$。$\sigma$ 在点变换前后不变，即 $\sigma(x+a,y,z) = \sigma(x,y,z)$。




我们将这个点变换（对平面的平移）记作 $\phi_a: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，定义 $G = \{\phi_a \mid a \in \mathbb{R}\}$，每个 $\phi_a$ 都是由 $a$（参数）刻画的微分同胚。

自然地，$\phi_a\cdot\phi_b = \phi_{a+b}$，$\phi_0$ 为零元，$\phi_{-a}$ 为 $\phi_a$ 的逆元，因此 $G$ 是一个单参数群（每个群元可被一个参数 $a$ 刻画）。

设M为任一流形. $\mathbb{R}\times M$ 自然也是一个流形, 且其维数比M多1. 我们定义映射 $\phi: \mathbb{R}\times M\to M$ 　 $\phi(t,\cdot)$ 是个被参数t刻画的变换. 简记为 $\phi_t: M\to M$

同理: $\phi(\ ,p): \mathbb{R}\to M$. 是M上的一条曲线.

Def 4. M上的单参微分同胚群是映射 $\phi: \mathbb{R}\times M\to M$, 若它满足:

a). $\phi_t: M\to M$ 是微分同胚.

b). $\phi_t\circ\phi_s=\phi_{t+s}$ 　 $\forall t,s\in\mathbb{R}$.

实际上, 群是 $\{\phi_t,\ t\in\mathbb{R}\}$. 群元是同胚映射且可被单参数t刻画.