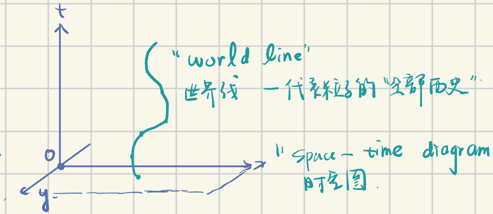
Day 39   Chapter 6. Special Relativity.



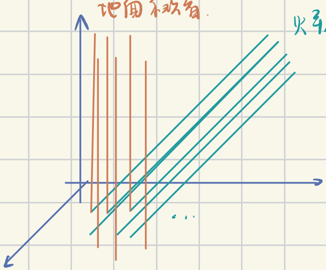
首先介绍SR中的基本概念.

→ event / 事件: "空间的一点" + "时间的一瞬". 所有事件的集合称为时空.

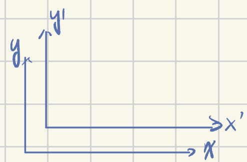
→ particle / 粒子: 有质量的称为 mass point (质点), 而无质量的称为 photon (光子).

→ Observer / 观者: 每个观者有一个标准钟. 标准钟的读数称为 proper time (固有时). 实际上是世界线的参数.
每个观者可以记录自己世界线上发生的事件.

→ reference frame / 参考系: 观者的集合 R, 时空(或其开子集)中任意一点有且仅有 R 内一个观者经过.



在这两个参考系中, 任意两个观者之间的距离不变. 这样的系称为刚性系.



历史: 狭相的产生.

Galileo → Principle of Relativity. ⇒ "任意两个惯性系是平权的". "所有物理定律在任意惯性系内有相同表述".

↘ Transformation (事件的时空坐标的变换).
$$\begin{cases} x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z \\ t' = t. \quad (\text{"同时性的绝对性"}) \end{cases}$$

Maxwell → Maxwell Eq. 在任意惯性系中成立. ⇒ 电磁波在任何惯性系中以光速传播 → 有矛盾.

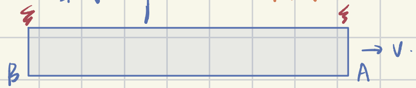
Day 40.

two choice < (A). Galileo 的相对性原理在电动力学中不成立 ⇒ 惯性系不平权. 有特殊惯性系 ("Ether"). ✗ (实验上很难成立)

(B). Maxwell 的理论不够精确 ✗

Einstein 解决了上面的两难问题. → 同时性的绝对性并非无懈可击!

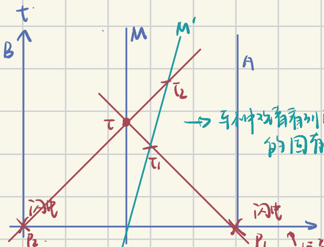
考虑一列火车.



地面上: 车头车尾同时雷击. (有一观者站在车中点. 则同时观测到光).

车系: 不同时 (同样有观者站在车中点, 观测到两次雷击的固有时不同).

在地系和车系画所有东西的 world line:



→ 车中观者看到两个闪电的固有时不同.

这是地系的同时面 而非火车系的同时面. 所以车中两个闪电不同时

→ ①. 相对性原理.
②. 光速不变原理.
(③). 空间均匀、各向同性.
} 狭相的两个基本假设.

↓

洛伦兹变换. 两个惯性坐标系之间的坐标变换.

e.g. 车头雷击 { 地系: (x, y, z, t). 车系: (x', y', z', t').

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad y' = y \qquad z' = z$$

$$t' = \gamma(t - vx) \qquad (c = 1)$$

(这是由一个 killing 场诱导的坐标变换).

v 为两个坐标系间的相对速度 且在狭相中. 光速为极限速度.

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - u_x \cdot v} \qquad u_y' = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x \cdot v)} \qquad u_z' = \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x \cdot v)}$$

✱ 事件间隔在 Lorentz 变换下保持不变. $-(dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = -(dt')^2 + (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2 = (dI)^2$,

时空: 一个四维流形 → 牛顿: $(\mathbb{R}^4, ?)$

→ SR $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$.

→ GR $(\mathbb{R}^4, g_{ab})$.

惯性坐标系 ⟺ 洛伦兹系.

事件间隔 ⟸ 线元.

背景时空 ⟸ $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$.

Day 41.

设有考虑惯性系中的粒子. 将粒子的 3-速度为: $u=\frac{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}}{dt}$, 从而 $(ds)^2=-(1-u^2)(dt)^2$ ⇒ 有质量粒子的世界线是类时的, 而光子世界线是类光的.

这是3D狭相中"粒子不可超光速"的4D语言表示.

所以解决一些奇怪的"悖论", e.g. 为什么在以 $v=0.99c$ 的粒子, 在往对面 $1.98c$. 为什么两个物体运行相对速度不可超光速.

从而, 一个观者对应于一条类时世界线. 下面介绍惯性观者. 在最简单的情况下 (3D情形下) 惯性观者相对于某惯性坐标系 (洛仑兹坐标系) $\{t,x,y,z\}$ 静止. 由于 $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a \partial_a \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b=0$ → 世界线是测地线

推广之, 惯性观者的世界线是一条类时测地线. 这样的惯性观者的集合称为惯性参照系.

从一个坐标系 $\{x^\mu\}$ → $\{x'^\mu\}$, 若变换是等度规映射, 则 x^μ 是洛仑兹的 ⇒ x'^μ 洛仑兹的. 我们知道 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 上有 10个 Killing Field.

a). $t'=t+a$. $x'=x$. $y'=y$. $z'=z$. (Time Translation).

b). $t'=t$. $z'=z$. $x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha$. $y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha$. (Spatial Rotation).

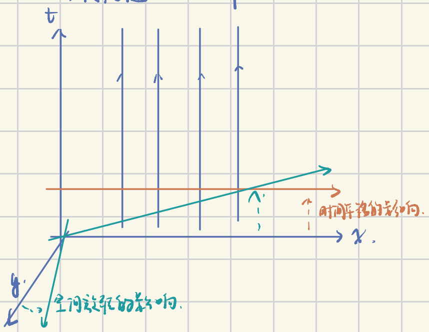
它们变换前后 t 坐标线相同. 故前后惯性坐标系属同一惯性参考系.

c). $t'=\gamma(t-vx)$. $x'=\gamma(x-vt)$. (Boost) ⇒ 属于不同的惯性系之间坐标系的变换.

★ 若某一坐标系的 t 坐标线为某惯性系内观者世界线, 称这个坐标系为该惯性参考系内的坐标系.

一个惯性参考系简单的说就是一组平行测地线的集合.

考虑两组观者 (两个参考系).

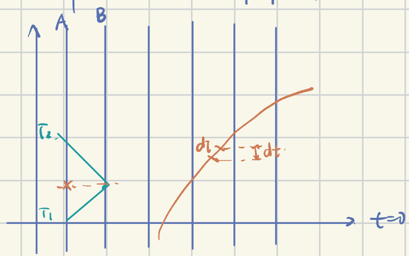


Def. 1. 称一个钟为理想钟, 若它在自己世界线上任意两点的读数之差恰等于线长. ⇒ $\tau_2-\tau_1=\int_{p_1}^{p_2}\sqrt{-(ds)^2}$

⇒ 固有时读数等于线长.

Day 42.

讨论某使钟同步问题：对齐所有钟的固有时.



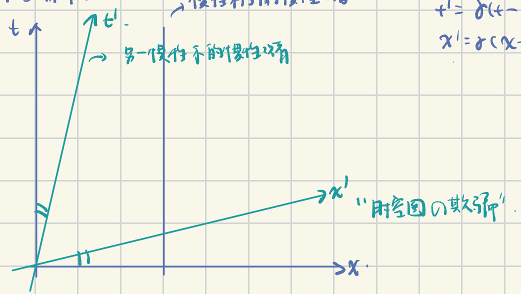
用A对准B：在B上装反射镜. B一但收光，将钟调成0. 而A调钟，在收、发的中间时刻调0.（"Radar method"）.

proper time vs. Coord Time.

依赖于特定world line. 只需给坐标中的一点（依赖坐标系）.

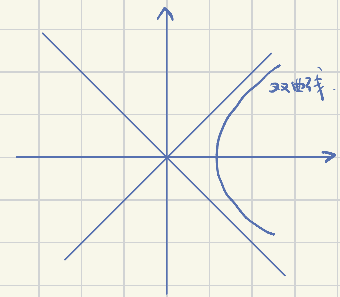
$$(d\tau)^2 = -(ds)^2 = (1-u^2)(dt)^2 \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \gamma_u.$$

下面看时空图.



$t' = \gamma(t - vx)$. $t'=0 \Rightarrow t = vx$. ⇒ 另一种t'坐标线.

$x' = \gamma(x - vt)$. $x'=0 \Rightarrow t = \frac{1}{v}x$. ⇒ 另一种x'坐标线.



从原点出发的固长线段端点轨迹.

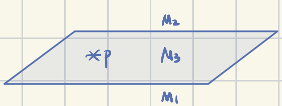
$l_{op} = \sqrt{|x^2 - t^2|} = \text{Const}.$

下面对比狭相和非相对论在时空结构上的不同. $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$. $(\mathbb{R}^4, ?)$、"Cartan—Newton 时空". 牛顿时空有一映射：$t: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.（与参考系坐标都无关）. $\mathbb{R}^4$ 被分成无限多层，每层为绝对同时面 Σ_t.

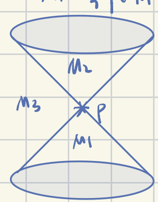
而狭相中的同时面是惯性系依赖的（"一副扑克 vs 无数副扑克"）. 下面说明：事件之间的因果关系不依赖于坐标系.

给定事件 $p \in \mathbb{R}^4$，可将 $M = \mathbb{R}^4 - p$ 写为 M_1, M_2, M_3 三部. $M_1 = \{q \in M \mid$ 存在先经历q又经历p的观者$\}$. $M_2 = \{q \in M \mid$ 先p后q$\}$. $M_3 = \{q \in M \mid$ 不存在经历p和q$\}$.

牛顿：



狭相：

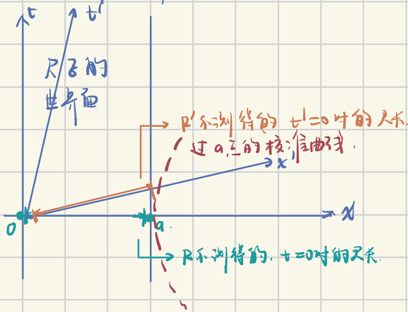


观者必须类时.

"光锥之内皆命运!"

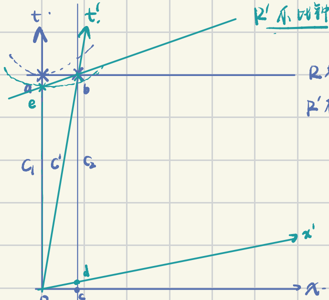
下面分析狭相中典型效应：尺缩。注意，尺子在4D时空中为2D对象，它画一个"世界面"。

所谓尺长，要由一个同时面去截尺子世界面，得到某一时刻尺子，才可得到尺长。 $l_{oa}=x_a$. $l_{ob}=\sqrt{x_b^2-t_b^2} \Rightarrow \overset{\text{"尺缩"}}{l_{ob}=\gamma^{-1}l_{oa}}$.



Day 43.

狭义相对论钟慢效应.

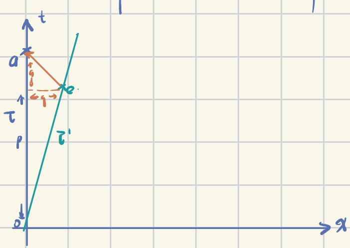


R' 系比钟. (比 oe 和 ob. 但是实际上 为了使两钟被同一观者对比, 实际上比 $c' \cdot c_2$). - ✳ 注意: c', c_2 并相对 R' 不同时面上对准.
通过校准得可知 R' 钟也看起来动钟变慢.

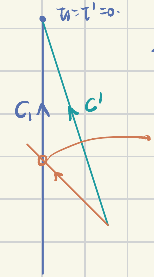
R 系比钟. $l_{oa} > l_{ob}$ ⇒ "动钟变慢". (实际上, 比的是 c_2 和 c').

R' 看: a, b 两个事件不同时.

不借助 c_2 钟, 我们也可以有比钟方式. 钟 c_1 不断收从钟 c' 射来的光线.



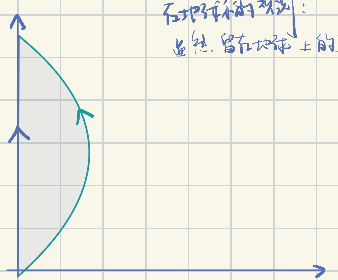
$\tau = p + q$. $p = \gamma \cdot \tau'$ $u = \frac{q}{p}$ 联立有 ⇒ $\tau' = \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\,\tau$.



你甚至可以得到"动钟变快"的结论.

C_1 钟"看见" c' 时 认为 c' 经历的时间更快.

下面讨论 双生子效应.



在地球系的观测:
显然, 留在地球上的更老!

Day 44.

* 注意：双生子佯谬中的两个并非是平权的。我们的洛伦兹变换仅在惯性系间发生，无从判断如何从何处好 ⟶ 说不通。（非惯性系）

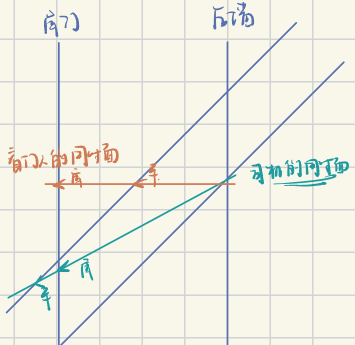
所以在非惯性系中，我们什么都做不到。→ 你可以搞非惯性系，但度规不再为 [1, −1, −1, −1]

* 加速度也有相对（3-加速）、绝对（4-加速）之分。所以不可以认为A相对B有加速，B相对A也有。

* 还有一件吵了很久的事情：用不用广相 → 「广相与狭相的分界点是时空的平直与弯曲，并非惯性与非惯性」

最后介绍所谓"车库佯谬"

司机："动库收缩"，车库装不下。 看门人："动车收缩"，装下有余。



（假设"后墙"只是一条线，可穿过去）。

→ 注意：汽车的「静长」与库「静长」一致。

若有坚硬后墙，车头先撞。

车尾想知道车头撞墙，只能向尾发出信号，车尾收信号后停下。

Day 45.

$\vec{F}=m\vec{a}$ 力是什么？质量是什么？似乎我们并没有定义清楚。具体地，质量如何定义：
- 定义标准质量
- 定义质量比：利用二者相互作用时的加速度之比.

力如何定义：$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$.

经典力学 → 伽利略协变性.

狭相 → 洛伦兹协变性　我们认为经典牛顿力学中的动量守恒不满足洛伦兹协变性.

$1 \xrightarrow{v}$　　$\xleftarrow{v} 2$　　$\vec{F}_1=\frac{d\vec{p}_1}{dt}$　$\vec{F}_2=\frac{d\vec{p}_2}{dt}$　牛三：$\vec{F}_1=-\vec{F}_2$　从而：$\frac{d(\vec{p}_1+\vec{p}_2)}{dt}=0$（动量守恒）.　显然，若进行伽利略变换到 $\frac{d(\vec{p}_1+\vec{p}_2+ct)}{dt}=\frac{d(\vec{p}_1+\vec{p}_2)}{dt}$ ⇒ 伽利略协变 ✓

现在，设在R'系中，有球1、2，拥有等值反向速度。而在R系中，球1以速度$\vec{u}$向右运动，球2静止.

R'系：$1 \rightarrow +\vec{v}$　　$\leftarrow 2\ -\vec{v}$　　（R'系以$+v$相对于R系运动）.

R系：$1 \longrightarrow +u$　　$\bullet 2$（静止）.　$u=\frac{2v}{1+v^2}$　⇒ $P_{碰前}=\frac{2mv}{1+v^2/c^2}$　$P_{碰后}=2mv$.　我们希望找到满足洛伦兹协变的动量守恒律.

我们继续考虑当前这个情景，做一些启发式的思考。如何使得在恒力下不断加速的粒子永远无法超过光速 ⇒ 让粒子的质量随着速率"合适地"上涨.

⇒ $P_{前}=\frac{m_u\cdot(2v)}{1+v^2/c^2}$　$P_{后}=M_v\cdot v$　并默认碰前后的总质量不变 ⇒ $m_u+m_0=M_v$.　从而我们将质量m修改为$m(u)$.　最后，由动量、质量守恒，可以算出：$m_u=\frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\gamma_u\cdot m_0$.

从而，我们定义狭相中的动量：$\vec{p}=m_u\cdot\vec{u}=\gamma\cdot m_0\cdot\vec{u}$.　以及力：$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$（显然，由于$\vec{p}$、$t$在不同的系中不同，故所导出$\vec{F}$有不同系中的变换形式）.

下面定义粒子的动能　推导依据：和牛顿力学一样，动能的变化率等于外力做功的功率.

$$\frac{dE_k}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{u}=\frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{u}=\vec{u}\cdot\frac{d(m_u\cdot\vec{u})}{dt}=m_u\cdot\vec{u}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt}+\vec{u}\cdot\vec{u}\cdot\frac{dm_u}{dt}$$

$$\frac{dm_u}{dt}=\frac{m_u\cdot u}{1^2-u^2}\cdot\frac{du}{dt}\quad\Rightarrow\quad\frac{dE_k}{dt}=(1-u^2)\cdot\frac{dm_u}{dt}+u^2\cdot\frac{dm_u}{dt}=\frac{dm_u}{dt}$$

从而两侧积分，我们立刻有：$E_k(u)-E_k(0)=c^2\int_{m_0}^{m_u}dm=m_uc^2-m_0c^2$　我们可约定$E_k(0)=0$ ⇒ $E_k(u)=(m_u-m_0)c^2$.

$m_uc^2=E_k(u)+m_0c^2$.

Day 46, 47

$m_u c^2 = E_k + m_0 c^2$ "质点静止时的能量"
"质点的总能量"
"质点静动能"
静能包括什么？
① 内能 ② 原子间的"结合力"
③ 处于激发态的色子能量 ④ 原子核中的结合能（*、原子弹放出的一部分） ⑤ 基本粒子的静能（这是最大的一部分）
⑤ ⇑ 正负电子对湮灭
若静止原子核分裂为两块：$\underset{\sim}{M_0 c^2} = \sum_{i=1}^{2} E_{k,i} + \underline{\sum_{i=1}^{2} m_{0,i} c^2}$（显然静能不守恒）
$\sum E_{k,i} = (M_0 - \sum_i m_{0,i}) c^2$, $E_{k,i} << M_0 c^2$

这是很自然的，注意上面质点强调时，这一部分是守恒的。

从现在起，我们以 m 代表"静质量"，并且只保留这一个质量。 $\Rightarrow E = \gamma \cdot m$

*、注意：γm 为守恒量（Conserved Quantity）。—— 在物理过程中保持常值。
m 为不变量（Invariant）。—— 不随参考系、坐标系的变换而变的量

Def1 质点的四速度（4-velocity）为其世界线 $L(\tau)$ 的切矢，记作 $U^a = \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^a$。由于曲线参数为固有时，故 $\eta_{ab} U^a U^b = -1$。

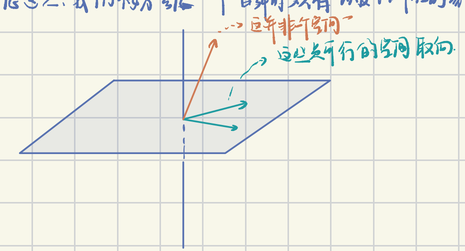
*、World line 只是流形上的一条曲线，不需要借坐标系定义，曲线的切矢也不需要借坐标系定义。从而世界线及其切矢都是绝对的（与标系无关的）
只是在不同系下有不同参数方程 $L^\mu(\tau)$ 与切矢的分量

考虑观者 G 对世界线 $L(\tau)$ 的观测。

"Local measurement"
当时当地观测

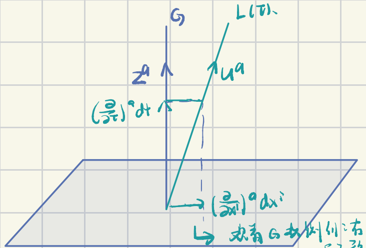
⇒因为观者只在一瞬"观测" ⇒ 我们只需要观者在一点处的性质 ⇒ 定义瞬时观者（Instantaneous Observer）(p, Z^a)。

P点处的切空间 V_p 为4维的，但是，观者在p上所感受到的所有空间方向的集合是3维的。
为了考虑这点，我们不妨考虑一个瞬时观者 (p, Z^a) 所有的空间切面



$W_p = \{ w^a \in V_p \mid \eta_{ab} w^a Z^b = 0 \}$.

Day 48



观者G的测例沿 ∆t时间内，质点移动了这么长。

$U^a = (\frac{\partial}{\partial \tau})^a = (\frac{\partial}{\partial t})^a \cdot \frac{dt}{d\tau} + (\frac{\partial}{\partial x^i})^a \cdot \frac{dx^i}{d\tau}$

$U^a d\tau = (\frac{\partial}{\partial t})^a dt + (\frac{\partial}{\partial x^i})^a \cdot dx^i$

$-Z_a U^a = \eta_{ab} Z^a U^b = -\eta_{\mu\nu} Z^\mu U^\nu = Z^0 \cdot U^0 = U^0 = \frac{dt}{d\tau} = \gamma$

(γ为观者、被观者四速的内积)。

Def 1. ⇒ L相对于观者G的三速： $u^a = (\frac{\partial}{\partial x^i})^a \cdot \frac{dx^i}{dt} = (\frac{\partial}{\partial x^i})^a \cdot \frac{dx^i/d\tau}{dt/d\tau} = \frac{h^a{}_b U^b}{\gamma}$ 世界线类时/类 ⇔ 三速度不超光速。

若瞬时观者 (p, Z^a) 与某粒子世界线L相切，则称 (p, Z^a) 为瞬时静止观者 ⇒ 瞬时静止惯性观者/参考系。

$\gamma u^a = (h^a{}_b U^b) = (\delta^a{}_b + Z^a Z_b) \cdot U^b = U^a - \gamma \cdot Z^a$ ⇒ 质点的四速可借瞬时观者做3+1分解： $\underline{\underline{U}}^a = \gamma(Z^a + \underline{\underline{u}}^a)$ （绝对；相对）

Def 2. 4-momentum. $P^a = mU^a$. 借助瞬时观者可做3+1分解. $P^a = mU^a = m(\gamma Z^a + \gamma u^a) = E \cdot Z^a + p^a$ $(p^a = m \cdot \gamma \cdot \vec{u}^a = m_u \cdot \vec{u}^a)$

$-m^2 = mU^a mU_a = p^a p_a = (EZ^a + p^a)(EZ_a + p_a) = -E^2 + p^2$ ⇒ $E^2 = m^2 + p^2$. 在这样的系. $\Gamma^a{}_{bc} = 0$. 普通导数与协变导数相同.

Def. 3. 质点的4-加速用于描述质点的轨迹是否偏离测地线. $A^a = U^b \partial_b U^a$. $(\partial_b \cdot \eta_{ac} = 0)$. 从而 四加速和四速一样是绝对的.

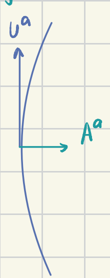
Theorem. 1. U^a与A^a正交. $U_a A^a = 0$.

$U_a A^a = U_a U^b \partial_b U^a$ 而 $U^b(\partial_b U^a U_a) = U^a U^b \partial_b U_a + U_a \underbrace{U^b \partial_b} U^a = U_a \underbrace{U^b \partial_b} U^a + U_a U^b \partial_b U^a = 2U_a U^b \partial_b U^a$. （把度规从里面移出来.）

而 $U^a U_a = 1$ ⇒ $U^b \partial_b (U^a U_a) = 0$. 立刻得证.

定义3-加速有困难：应比较粒子在相邻两点的3-速. 观者G可与L在第一点相交，但一般不在第二点处相交. 所以我们通常定义质点相对于一个参考系(一般惯性)的3-加速.

Def 4. 3-加速. 由于3-速度定义作 $u^a = (\frac{\partial}{\partial x^i})^a \cdot \frac{dx^i(t)}{dt}$ 则3-加定义为 $a^a = (\frac{\partial}{\partial x^i})^a \cdot \frac{d^2 x^i(t)}{dt^2}$ 这也是一个空间矢量.



Theorem 2. 质点的4-加与相对于系R的3-加有关系： $A^0 = \gamma^4 \vec{u} \cdot \vec{a}$. $A^i = \gamma^2 a^i + \gamma^4 (\vec{u} \cdot \vec{a}) \cdot u^i$ (没有直接做3+1分解).

质点的4-加等于它相对于瞬时静止惯性系的3-加).

Def 5. 质点所受4-力： $F^a = U^a \partial_b (p^b) = U^a \partial_b (m \cdot U^b) = m \cdot U^a \partial_b U^b = m \cdot A^a$ (对于m = Const).

Day 49.

Theorem 1. 质点所受4-力在叙述的空间分量 F^i 等于它所受3-力相应分量的 γ 倍. 而时间分量 F^0 等于 3-力功率 $\vec{f}\cdot\vec{u}$ 的 γ 倍 $F^i=\gamma\cdot f^i$, $F^0=\gamma\cdot\vec{f}\cdot\vec{u}$

这里可将导数式 是因为 在沿着世界线积分过程中 p可以看作τ的一元函数.

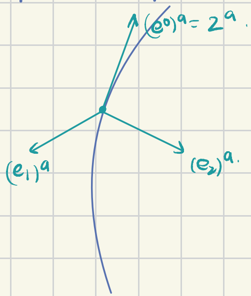
[pf] 给出下的分量: $F^\mu = F^a(dx^\mu)_a = (dx^\mu)_a U^b\partial_b p^a = U^b\partial_b((dx^\mu)_a p^a) = U_b\partial_b p^\mu$

对于1.2.3分量: $p^a = EZ^a + p^a \Rightarrow p^i = p^i \Rightarrow F^i = U^b\partial_b p^i = (\frac{\partial}{\partial\tau})^b\partial_b p^i = (\frac{\partial}{\partial\tau})(p^i) = \frac{d}{d\tau}p_i = \frac{dp_i}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma f_i$

对于0分量. $F^0 = U^b\partial_b p^0 = (\frac{\partial}{\partial\tau})^b\partial_b E = \frac{\partial E}{\partial\tau} = \frac{dE}{d\tau} = \frac{dE}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = \gamma\cdot\vec{F}\cdot\vec{u}$

可见. 相较于4-动量将3-动量和能量统一起来. 4-力将3-力与功率统一起来.

实际上观者在某世界线上任一点. 可以选择不同基底. 为了方便. 我们选取正交归一基底. 指定第0个基底为 $(e_0)^a = Z^a$. 再加上其他三个基底 $\{(e_i)^a, i=1,2,3\}$.



我们将观者世界线上的这种. 四个正交归一基底组成的基底场. 称为观者的四维标架(Tetrad)场.

注: 除了 $(e_0)^a$. 有明确选取方法外. $(e_1)^a$. $(e_2)^a$. $(e_3)^a$ 有相当任意性. 我们约定 $(e_1)^a$ $(e_2)^a$ 先指. $(e_3)^a$ 右手.

这样. 一个瞬时观者的定义扩展为: $(p, (e_\mu)^a)$. $(e_0)^a = Z^a$. $\Rightarrow$ 惯性观者: 做惯性运动(time like geodesic)的无自转观者.

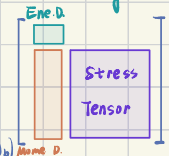
Day 50.

取一小体元，设内有质量 m，相对于斯惯性系的3速为 $\vec{u}$。则其3-动量：$\vec{p} = \gamma m \cdot \vec{u} = \frac{1}{c^2} E \cdot \vec{u}$　两侧除 V：$\frac{\vec{p}}{V} = \frac{1}{c^2} \cdot \underbrace{\frac{E}{V}}_{\text{Energy Density}} \vec{u}$.　$\Rightarrow$ 3-动量密度和能流密度相差 $\frac{1}{c^2}$

Momentum Density，单位体积内动量。

Energy Density $\cdot \vec{u}$ = Energy Flux.

我们想在希望像4-动量一样，将 ⟨能 动⟩ ⟨密度 流密度⟩ 集中在一个张量上。我们有一个(0,2) Energy-Momentum Tensor：



1)、$T_{ab} = T_{ba}$.　2). 对于孤立物质场，有 $\partial^a T_{ab} = 0$.（即能、动量守恒律的体现）

3). 对 ∀ 瞬时观者 $(p, (e_\mu)^a)$.（$(e_0)^a = Z^a$）有：(a). $\rho = T_{ab} Z^a Z^b = T_{00}$ 为该观者测得的能量密度.

(b). $w_i = -T_{ab} \cdot Z^a (e_i)^b = -T_{0i}$ 为动量密度.

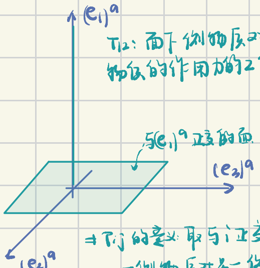
(c). $T_{ij} = T_{ab} (e_i)^a (e_j)^b$ 为应力张量（记 $\hat{T}_{ab} = T_{ij} (e^i)_a (e^j)_b$）

不难证明，用度规升上标有 $\hat{T}_{ij} = \hat{T}^{ij}$，从而 $\hat{T}^{ab}$ 也可解释为3-应力张量.

$\hat{T}_{ij} = [\underbrace{\hat{T}^{ab} (e^i)_b}_{\text{Vector}}] (e^j)_a$.　$\hat{T}^{ab} (e^i)_b$ 为 ΔS_i 一侧对他侧之力，也为单位时间沿 $(e_i)^a$ 方向穿过单位面积 ΔS_i 的3-动量.（沿 $(e_i)^a$ 方向的动量流密度）.

$\hat{T}^{ab}$ 解释为3-动量流 Tensor.　★ 相互作用(力) ⟺ 动量的交换，应力张量 ⟺ 动量流密度.

例子：T_{12} 的物理意义.



T_{12}：面下侧物质对上侧物质的作用力的2分量.

$\Rightarrow T_{ij}$ 的意义：取与 i 正交面元 ΔS_i，一侧物质对另一侧的力的 j 分量.

Day 51.

Def 1. $W^a = -T^a{}_b Z^b$ 为观者(p, Z^a)测得的4-动量密度

$W^0 = W^a(e^0)_a$ $\left[Z_a = (e_0)_a = -(e^0)_a \right]$. $\Rightarrow W^0 = W^a(e^0)_a = -T^a{}_b Z^b(-Z_a) = T_{ab}Z^aZ^b = \mu$ ⇒ 零分量恰为能量密度.

$W^i = W^i(e^i)_a = -T^a{}_b Z^b(e^i)_a = -T_{ab}Z^b(e^i)^a = -T_{ab}Z^b(e_i)^a = -T_{0i}$ ⇒ i分量恰为观者测得的动量密度.

$\Rightarrow W^a = W^0 Z^a + W^i(e_i)^a = \mu Z^a + W^i(e_i)^a = \mu Z^a + \vec{w}^a$ 这是4-动量密度的3+1分解.

$\langle P^a = EZ^a + p^a$ *. 注意：4-动量的定义无需观者. 而4-动量密度的定义中是有观者的(观者依赖的4-矢量)

Theorem 1. $\partial^a T_{ab} = 0$ 给出能量守恒.

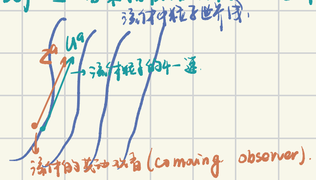
任取一惯性参照系. 其坐标为$\{t, x, y, z\}$、其中观者的四速为 $Z^a = (\frac{\partial}{\partial t})^a$、 $\partial_a W^a = \partial_a(-T^a{}_b Z^b) = -Z^b \underbrace{\partial^a T_{ab}}_{=0} - T^a{}_b \underbrace{\partial_a Z^b}_{=0}$.

从而 $\partial_a W^a = 0 \Rightarrow 0 = \partial_0 \mu + \partial_i w^i = (\frac{\partial \mu}{\partial t}) + \vec{\nabla}\cdot\vec{w}$ 从而 μ, $\vec{w}$ 分别为守恒荷与守恒流.

$c=1$. 能流密度=动量密度.

下面我们研究理想流体(perfect fluid). 动力学.

Def 1. 若某物质场的能动张量可写为: $T_{ab} = \mu U_aU_b + p\cdot(\eta_{ab} + U_aU_b) = (\mu+p)U_aU_b + p\cdot\eta_{ab}$ 我们称此物质场为理想流体 其中 μ, p 为标量场. U^a为矢量场且 $U^aU_a = -1$.
(实际是流体的4-速场).



我们在共动观者下展开流体的能动张量: 取观者 $(p, U^a|_p)$

$T_{ab}(e_0)^a(e_0)^b = T_{ab}U^aU^b = (\mu+p)U_aU_bU^aU^b + p\cdot\eta_{ab}U^aU^b = (\mu+p) + p\cdot\eta_{ab}(e_0)^a(e_0)^b = (\mu+p) - p = \mu$. 从而 μ 为共动观者测得的能量密度

$T_{ab}(e_i)^a(e_j)^b = p\eta_{ab}(e_i)^a(e_j)^b = p\cdot\delta_{ij}$ 从而共动观者测得的3-应力张量的各分量 diag[p, p, p] → 只有压强而无切向应力.
压强各向同性.

$T_{ab}(e_0)^a(e_i)^b = 0$ ⇒ 共动观者测得的能流密度为0. 或流体中无热传导.

Day 52.

继续理想流体. 这里要说、连续介质为对流体做粗粒化做了统计平均后的模型. 例如. 设有一静止箱子. 内有 ideal gas. 则其动观者的4速并非某一粒子4-速. 而是箱子的4-速.

各向同性 → 习参考系. 看起来各向同性、而非习参考系.

理想气体的压强与质量密度有如下关系: $p=\frac{1}{3}\rho\overline{u^2}$ 对于非相对论情形有 $\overline{u^2}\ll c^2 \Rightarrow \frac{p}{c^2}\ll\rho$ (取 $c=1$ 有 $p\ll\rho$). 而对于极端相对论理想气体. (包括温度为T的箱子里面的电磁辐射. 可以用"光子气"建模). 此时 p、ρ 有关系: $p=\frac{1}{3}\rho$. ($\overline{u^2}=1$). 此时 p、ρ 同一量级.

* 黑体辐射都能理想气体. 之中可以找到一个各向同性系. 使光子有向各个方向的随机运动. 探照灯中射出的光束并非理想流体. (光子的固有时不动、无法做 observer).

我们说相对于某一黑体辐射. 实际上是说相对于黑体辐射的各向同性系. U^a 为这一各向同性系的4-速度.

在牛顿力学中. 我们有如下两方程: $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u})=0$. (连续性方程). $-\vec{\nabla}p=\rho\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\right]$. (Euler Equation).

使用 $\partial^a T_{ab}=0$ $=U_aU_b\partial^a(\rho+p)+(\rho+p)(U_a\partial^aU_b+U_b\partial^aU_a)+\eta_{ab}\partial^a p$

$=U_bU^a\partial_a(\rho+p)+(\rho+p)(U^a\partial_aU_b+U_b\partial_aU^a)+\partial_b p$. 它有4个分量. 将它对其在其动观者的4-速方向与垂直于其动观者4-速方向做3+1分解.

时间分量: 以 U^b 缩并: $\underbrace{U^bU_b}_{=-1}U^a\partial_a(\rho+p)+(\rho+p)(\underbrace{U^bU^a\partial_aU_b}_{=\frac{1}{2}U^a\partial_a(U^bU_b)=0}+\underbrace{U^bU_b}_{=-1}\partial_aU^a)+U^b\partial_b p$

$\Rightarrow U^a\partial_a\rho+(\rho+p)\partial_aU^a=0$.

空间分量: 以投影映射 $h^b{}_c=\delta^b{}_c+U_cU^b$ 缩并: 第一项正交于 h 因而为0. $\Rightarrow 0=(\rho+p)(U^a\partial_aU_c+\underbrace{U^bU_cU^a\partial_aU_b}_{=\frac{1}{2}U_cU^a\partial_aU_bU^b=0})+U_cU^b\partial_b p+\partial_c p$ $\Rightarrow(\rho+p)(U^a\partial_aU_c)+U_cU^b\partial_b p+\partial_c p=0$.

特别地. 压强为0的理想流体称为尘埃. $\Rightarrow U^a\partial_aU_c=0$. 这样的粒子世界线为测地线. (无相互作用粒子).

要想回到牛顿力学. 我们要选一个惯性观者. $Z^a=(\frac{\partial}{\partial t})^a$. 则 $U^a=\gamma[(\frac{\partial}{\partial t})^a+u^a]$. (任取一个惯性观者看"流体"上的惯性系. 只要在这个系里面 $u\ll1$). 并利用 $p\ll\rho$

得到时间分量: $0=(\frac{\partial}{\partial t})^a\partial_a\rho+u^a\partial_a\rho+\rho\partial_au^a \Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t}+\partial_a(\rho u^a)=0$. 这就是质量守恒的连续性方程.

对于空间. 用 $(\frac{\partial}{\partial x^i})^c$ 与之缩并. $\Rightarrow 0=\rho\left[(\frac{\partial}{\partial t})^a\partial_au_i+u^a\partial_au_i\right]+(\frac{\partial}{\partial x^i})^c\partial_cp+u_i\left[(\frac{\partial}{\partial t})^b+u^b\right]\partial_bp=0$

$=\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+u^a\partial_au_i+\frac{\partial p}{\partial x^i}+u_i\frac{\partial p}{\partial t}+u_iu^j\frac{\partial p}{\partial x^j}=0$

在非相对论条件下还有 $u\ll1 \Rightarrow u_i\frac{\partial p}{\partial t}\ll\frac{\partial p}{\partial x^i}$ $u_iu_j\frac{\partial p}{\partial x^j}\ll\frac{\partial p}{\partial x^i}$. 所以最后包含3-速分量的两项被忽略. $\Rightarrow 0=\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u^a\partial_au_i+\frac{\partial p}{\partial x^i}$. 这恰为Euler方程.