Day 32.

Chap 5. Differential forms and its Integral.

Def 1. $\omega_{a_1\cdots a_l}\in\mathcal{T}_V(0,l)$ 称为 V 上的 l 形式. 若 $\omega_{a_1\cdots a_l}=\omega_{[a_1\cdots a_l]}$

自然地, 有 $\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}=\omega_{[\mu_1\cdots\mu_l]}$ 若在某基底使分量全反称, 则 $\omega_{a_1\cdots a_l}$ 为 l 形式.

显然, 有性质: $\omega_{a_1\cdots a_l}=\delta_\pi\,\omega_{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(l)}}$.

以及在任意基底下: $\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}=\delta_\pi\,\omega_{\mu_{\pi(1)}\cdots\mu_{\pi(l)}}$.

将 V 上全体 l 形式的集合记作 $\Lambda(l)$. 易证明 $\Lambda(l)$ 为 $\mathcal{T}_V(0,l)$ 的线性子空间. 现在要问: $\Lambda(l)$ 的维数是什么? 这应找到基底 $\Rightarrow$ 我们应发明一个操作, 代替张量积来产生基底.

Def 2. 设 ω, μ 分别为 l, m 形式, 则定义它们的楔积 (wedge prod.) (($l+m$) 形式).

$$(\omega\wedge\mu)_{a_1\cdots a_l b_1\cdots b_m}=\frac{(l+m)!}{l!\,m!}\,\omega_{[a_1\cdots a_l}\mu_{b_1\cdots b_m]}.$$

它满足结合律, 分配律, 但一般不满足交换律, 有: $\omega\wedge\mu=(-1)^{lm}\mu\wedge\omega$.

Theorem 1. 设 $\dim V=n$, 则 $\dim\Lambda(l)=\dfrac{n!}{l!\,(n-l)!}=C_n^l$ ($l\le n$, $l>n$ 时所有分量都为 0).

只证明 $n=3$, $l=2$ 的情形. 将 ω 在 $(e^\mu)_a(e^\nu)_b$ 下面展开. 注意到对于展开系数有: $\omega_{11}=\omega_{22}=\omega_{33}=0$. $\omega_{21}=-\omega_{12}$. $\omega_{31}=-\omega_{13}$. $\omega_{32}=-\omega_{23}$.

则任意 $\omega_{ab}\in\Lambda(2)$, 可用 $(e^1)_a\wedge(e^2)_b$, $(e^2)_a\wedge(e^3)_b$, $(e^3)_a\wedge(e^1)_b$ 线性表出. 以上过程可以被推广.

可以推广: $\omega_{a_1\cdots a_l}=\sum\limits_{C}\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}(e^{\mu_1})_{a_1}\wedge\cdots\wedge(e^{\mu_l})_{a_l}$ (对组合求和)

在流形 M 上的每一点指定一个 l-form, 则我们将获得一个 l-form 场. 一般会其是光滑的. 可以将 l-form 用对偶坐标基底打开: $\omega_{a_1\cdots a_l}=\sum\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}(dx^{\mu_1})_{a_1}\wedge\cdots\wedge(dx^{\mu_l})_{a_l}$.

$\{\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}=\omega_{a_1\cdots a_l}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}}\right)^{a_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu_l}}\right)^{a_l}$.

特例: 若 $l=n$, 则只有一项: $\omega_{a_1\cdots a_n}=\omega_{1\cdots n}(dx^1)_{a_1}\wedge\cdots\wedge(dx^n)_{a_n}$. 展开系数是 M 上标量场.

此后, 我们以 $\Lambda_M(l)$ 表示 M 上 l-form 场的集合.

Def 3. 流形 M 上的外微分算符 (exterior differential operator), 是映射: $d:\Lambda_M(l)\to\Lambda_M(l+1)$, $(d\omega)_{a_1\cdots a_l}=(l+1)\nabla_{[b}\omega_{a_1\cdots a_l]}$

*: 利用 $\Gamma^c{}_{ab}=\Gamma^c{}_{ba}$ 的性质, 可证明对任意 ∇_a, ∂_a, 有 $\nabla_{[b}\omega_{a_1\cdots]}=\partial_{[b}\omega_{\cdots]}$. 因此流形上无需有附加结构, ∇_b 实际可取成 ∂_b.

Example 设 ω 是 0-form, 即为标量场 f. 则 $(df)_b=\nabla_b f$. 这与之前得到的结果一致.

Theorem 2. 外微分在基底下的展开. $(d\omega)_{ba_1\cdots a_l}=\sum(d\omega_{\mu_1\cdots\mu_l})_b\wedge(dx^{\mu_1})_{a_1}\wedge\cdots(dx^{\mu_l})_{a_l}$

Theorem 3. $d\circ d=0$.

$$[d(d\omega)]_{cba_1\cdots}=(l+2)(l+1)\,\nabla_{[c}\nabla_{b}\omega_{\cdots]]}=0.$$

Def 4. 设 ω 为 M 上的 l 形式场. 则若 $d\omega=0$ 称 ω 为闭的. 若存在 $l-1$ form μ, 使 $\omega=d\mu$, 则称 ω 为恰当的 (exact). 若 ω 恰当, 则它必为闭的.

*: 闭一般为在 M 上成立, 而恰当常在局部成立, 一指 $\forall p\in M$, 可找到邻域成立, 不是指在某局部成立.

Day 33.

下面讨论流形上的积分。在$\mathbb{R}^3$中我们讨论曲线、曲面上的积分 $\int_L \vec{v}\cdot d\vec{l}$ 和 $\iint_S \vec{v}\cdot d\vec{S}$ 时应先指定曲线/曲面的方向。推而广之，计算任意流形上积分前应指定该流形的定向。

Def 1. 称n维流形是可定向的，若其上存在C^0且处处非零的n形式场。

[Example] $\mathbb{R}^3$为可定向流形，因为其上存在C^∞的3-form $\varepsilon = dx\wedge dy\wedge dz$。

不可定向的例如莫比乌斯带。（至少直观上是这样）。

Def 2. 设$\varepsilon_1, \varepsilon_2$为M上两个处处非零的0-form，若存在处处为正的标量场h，使$\varepsilon_1 = h\cdot\varepsilon_2$，则$\varepsilon_1, \varepsilon_2$给出M的同一定向。

由于n维流形M上每点n形式场只有1维，故上面任意两个n-form场必有$\varepsilon_2 = h\cdot\varepsilon_1$ ⇒ 对于一个连通流形，一个处处非零的连续函数只可能处处为正或负 ⇒ 只有两种定向。

Def 3. M上的基底场称为以ε为代表的定向后，$O\subset M$上基底场称为"右手的"，若O上存在处处为正的标量场h，使$\varepsilon = h\cdot(e^1)_{a_1}\wedge\cdots\wedge(e^n)_{a_n}$。（注：不一定是坐标基底场）。

※ 注：在"经典"操作中，我们先直接定义了"右手系"，再取$\varepsilon = dx\wedge dy\wedge dz$作为定向，我们再以此定向判断系的"手性"。

下面定义n-form场的积分。我们将其用对偶坐标基底之积展开，将展开系数（n元函数）的n重积分称为n形式场的积分。

Def 4. 设(O,ψ)为n维定向流形M上的右手坐标系，ω为开子集$G\subset O$上连续n-form场，则ω在G上积分定义为：

$$\omega = \omega_{1\ldots n}(x^1,\ldots,x^n)\cdot dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n \Rightarrow \int_G \omega = \int_{\psi[G]} \omega_{1\ldots n}(x^1,\ldots,x^n)\cdot dx^1\cdots dx^n$$

然而，在定义过程中依赖了坐标系，我们应证明该积分与坐标系无关的（适用于所有右手系）。

Day 34.

[证明]. n-形式积分的坐标不依赖性. 以$n=2$为例展开论证.

$\omega = \omega_{12}\, dx^1 \wedge dx^2 = \omega'_{12}\, dx'^1 \wedge dx'^2$. 令 $\int_G \omega = \int_{\psi[G]} \omega_{12}\, dx^1 dx^2$. $(\int_G \omega)' = \int_{\psi'[G]} \omega'_{12}\, dx'^1\, dx'^2$.

由张量变换律有: $\omega'_{12} = \frac{\partial x^1}{\partial x'^1}\frac{\partial x^2}{\partial x'^2}\omega_{12} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^1}\frac{\partial x^1}{\partial x'^2}\omega_{21} = \omega_{12}\cdot \underbrace{\det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right)}$. 坐标变换的Jacobi行列式.

由多元微积分中结论: $\int_{\psi[G]} \omega_{12}\, dx^1 dx^2 = \int_{\psi'[G]} \omega_{12} \det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right) dx'^1 dx'^2 = \int_{\psi'[G]} \omega'_{12}\, dx'^1\, dx'^2$. 从而立即得证.

* 若右手系变左手系. $J<0$. J应换成$|J|$. 因此, 左手系时, 积分在定义时应差一负号. 定义整个流形上的积分有困难(坐标域有重叠).

$v^q \in W_q$. $\forall q$.

下面考虑嵌入子流形上的积分. 考虑 S, M为 l、n 维流形. $\phi: S \to M$为嵌入. 希望讨论 $\phi[S]$ 上 l维形式的积分. 回忆$\phi[S]$上矢量场 的讨论. 这一讨论有两个可能: 1). 处处切于$\phi[S]$. 即与法矢作用处处为0. 2). 不满足1)的场. 对于l-form场, 也有这两个可能. 我们将$\phi[S]$上l形式场 称为"切于"$\phi[S]$. 若$\mu\ldots|_q$ 是W_q上的l-形式(并非V_q上的). (能将W_q的 l个元素变为实数).

由于我们将$\phi[S]$作为一独立流形看待. 因此可以不"切于" $\phi[S]$的 μ 的积分定义.

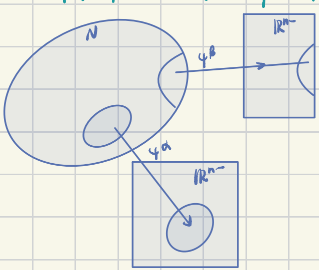
Def 1. 设$\mu\ldots$ 为l维子流形上的l 形式场. $\phi[S]$上的l形式场$\tilde{\mu}\ldots$ 称为$\mu\ldots$在$\phi[S]$上的限制, 若: $\tilde{\mu}_{a_1\ldots a_l}(w_1)^{a_1}\ldots(w_l)^{a_l} = \mu_{a_1\ldots a_l}(w_1)^{a_1}\ldots(w_l)^{a_l}$ $\forall q \in \phi[S]$. $w_1 \ldots w_l \in W_q$.

我们将$\int_{\phi[S]}\mu$ 定义作$\int_{\phi[S]}\tilde{\mu}$.

我们知道有Stokes定理: $\iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l}$

Gauss 定理: $\iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\cdot dV = \oiint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}$.

引入一个"带边流形"概念: n维"带边流形"的最简单例子为: $\mathbb{R}^{n-} = \{(x^1 \ldots x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^1 \le 0\}$. $x^1=0$的点称作$\mathbb{R}^n$的边界. 推广至一般流形: n维带边流形N 是将流形定义中$\mathbb{R}^n$ 改为$\mathbb{R}^{n-}$ $\{O_\alpha\}$ 中每一个元同胚于$\mathbb{R}^{n-}$中一个开子集. N中被映到$\mathbb{R}^{n-}$上的点 称作N的边界 ∂N (是$n-1$维流形). 内部$i(N) = N - \partial N$.



[Example]. $\mathbb{R}^3$中实心球体为3维带边流形. S^2为其边界

Day 35.

Theorem 1. Stokes 定理：设n维定向流形 M 的紧致子集 N 为 n维带边流形，ω 为 M 上 n-1 形式场，则：$\int_{i(N)} d\omega = \int_{\partial N}\omega$.

注：将 M 的定向 ε 限制在 N 上可得 N 上定向，仍记作 ε。ε 在 ∂N 的边界上自然诱导一个定向 $\bar{\varepsilon}$。以 $\mathbb{R}^{2-}$ 为例，此时 $M=\mathbb{R}^2$，$N=\mathbb{R}^{2-}$，$\partial N=\{(x^1,x^2)\mid x^1=0\}$。设 $\mathbb{R}^2$ 定向为 $\varepsilon_{ab}=(dx^1)_a\wedge(dx^2)_b$，
则 $\{x^1,x^2\}$ 在 ε_{ab} 下为右手系。由于 $x^1|_{\partial N}=0$，从而 x^2 单独作为 ∂N 的坐标系，我们要选一个定向使 x^2 为右手系 ⇒ $\bar{\varepsilon}_a=(dx^2)_a$. *在此，我们不给出证明。

[Example]. 二维上的 Stokes 公式（Green 公式）. $\iint_S\left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1}-\frac{\partial A_1}{\partial x^2}\right)dx^1dx^2=\oint_L A_l\,dl$. A^1, A^2 为一矢量场 A^a 的分量。将上述定理中 ω 取作 $A_a=\delta_{ab}A^b$，展开：$\omega=A_a=A_\mu(dx^\mu)_a$.

再求外微分：$d\omega=dA_\mu\wedge dx^\mu=\left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1}-\frac{\partial A_1}{\partial x^2}\right)dx^1\wedge dx^2$. 从而，上式左侧可直接表为 $\int_S d\omega$

而另一侧：ω 不能在 l 上积分，而 $\tilde{\omega}$ 能积。$\tilde{\omega}=\tilde{\omega}(l)(dl)_a$. $\tilde{\omega}(l)=\tilde{\omega}_a\left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^a=\omega_a\left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^a=A_a\left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^a=A_l$. ⇒ $\int_l\omega=\oint A_l\,dl$.

限制作用在切矢上，与原形式 ω 作用在切矢上.

*注意：在 $(\mathbb{R}^2,\delta_{ab})$ 中使用 Green 公式时，（由于度规原因）我们无法区分逆、协变矢量.

下面我们试着推广 Gauss Theorem。但我们先得定义一个标量场（如用在流形上的积分，我们会通过一个形式的积分来定义它，为了这样做，我们需补一些定义。

Def 2. n维可定向流形 M 上的任何一个 C^0 且处处非零的 n 形式场 ε 称作一个体元（volume element）.

在流形上给定度规场 g_{ab} 时，就可自然地指定体元。（在未给定度规时，体元只需代表同一个定向即可）。设 $\varepsilon_{a_1a_2}$ 为任一体元，$\varepsilon^{a_1a_2}=g^{a_1b_1}g^{a_2b_2}\varepsilon_{b_1b_2}$.

则我们可以得一个标量场（用具体指标代抽象指标，利用缩并所得结果在基底下的不变性，我们取最简单的正交归一基底）.

$\varepsilon^{a_1a_2}\varepsilon_{a_1a_2}=\delta^{\mu_1\nu_1}\delta^{\mu_2\nu_2}\varepsilon_{\nu_1\nu_2}\varepsilon_{\mu_1\mu_2}=\delta^{11}\delta^{22}\varepsilon_{12}\cdot\varepsilon_{12}+\delta^{22}\delta^{11}\varepsilon_{21}\cdot\varepsilon_{21}=2\cdot(\varepsilon_{12})^2$ （g 为正定度规的情形）.

Day 30.

对于洛伦兹度规上面的例子应改为: $\varepsilon^{a_1a_2}\varepsilon_{a_1a_2} = -2(\varepsilon_{12})^2$. 推而广之,有: $\varepsilon^{a_1\cdots a_n}\varepsilon_{a_1\cdots a_n} = (-1)^s n!\,(\varepsilon_{1\cdots n})^2$ $\varepsilon_{1\cdots n}$为在正交基底下的分量. s为度规号差.

而借用度规选择简单体元,是指使得体元在正交归一基底下有 $\varepsilon_{1\cdots n} = \pm 1$. 换言之,体元以级这式定样: $\varepsilon_{a_1\cdots a_n} = \pm(e^1)_{a_1}\wedge\cdots\wedge(e^n)_{a_n}$. 换言之, $\varepsilon^{a_1\cdots a_n}\varepsilon_{a_1\cdots a_n} = (-1)^s n!$

这样的 $\varepsilon_{a_1\cdots a_n}$ 称为与度规适配的体元. 结合体元与定向适配的要求,可确定唯一体元.(选择以ε为代表的定向,若为+则右手系,若为−则左手系).

Theorem 1. 用任意基底也可以构造出适配体元. 且有: $\varepsilon_{a_1\cdots a_n} = \pm\sqrt{|g|}\,(e^1)_{a_1}\wedge\cdots\wedge(e^n)_{a_n}$.

下面考虑 $(\mathbb{R}^3,\delta_{ab})$ 上的体元. 取右手笛卡尔系 $\{x,y,z\}$. 取 $\varepsilon = dx\wedge dy\wedge dz$ 来定向(显然,按定义,在该定向下$\{x,y,z\}$为右手系). 设G为$\mathbb{R}^3$子集.

考虑积分 $\int_G dx\wedge dy\wedge dz = \int_G 1\cdot dx\,dy\,dz = V_G$.

Def 1. 设ε为M上体元, f为M上C^0标量场. 则f在M上积分被定义为: $\int_M f = \int_M f\varepsilon$. 这个函数我们已定义过. * 我们约定使用适配体元来定义这个积分.

具体地,在 $(\mathbb{R}^3,\delta_{ab})$ 上, $\int_{\mathbb{R}^3} f = \int_{\mathbb{R}^3} f\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^3} F(x,y,z)\,dx\wedge dy\wedge dz = \int_{\mathbb{R}^3} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.

若在球坐标中处理. 由于 $(ds)^2 = (dr)^2 + r^2[(d\theta)^2 + (\sin^2\theta)(d\varphi)^2]$ $\Rightarrow g = r^4\sin^2\theta$ $\Rightarrow \int f = \int f\varepsilon = \int r^2\sin\theta\, dr\wedge d\theta\wedge d\varphi = \int F(r,\theta,\varphi)\, r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$.

考虑 $(\mathbb{R}^3,\delta)$ 中Gauss定理: $\iiint_V(\nabla\cdot\vec{A})\,dv = \oiint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,ds$. 下面我们说明它与Stokes定理的联系.

Theorem 2. 设M为n维流形, N为紧的n维带边流形. v^a为M上C^1矢量场. g_{ab}为M上度规. ε与D_a为与g_{ab}适配的体元. 则有:

与Gauss类似

$$\int_{i[N]}(D_bv^b)\varepsilon = \int_{\partial N} v^b\varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}$$

证明: 利用 $\int_{i[N]} d\omega = \int_{\partial i[N]}\omega$. 令 $\omega = v^b\varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}$. $d\omega = n\,D_{[c}(v^b\varepsilon_{|b|a_1\cdots a_n]})$. 它是$n$维流形上$n$-form. 则有: $n\,D_{[c}(v^b\varepsilon_{|b|a_1\cdots a_{n-1}]}) = h\,\varepsilon_{ca_1\cdots a_{n-1}}$.

上式两侧与 $\varepsilon^{ca_1\cdots a_n}$ 缩并. 右侧有 $(-1)^s h n!$ 左侧. 又有: $n\varepsilon^{ca_1\cdots a_n} D_{[c}(v^b\varepsilon_{|b|a_1\cdots a_n]}) = n\varepsilon^{[ca_1\cdots a_n]} D_c(v^b\varepsilon_{ba_1\cdots a_n})$. (利用反称性移动[ ]. 上面的可往下面).

$= n\varepsilon^{[ca_1\cdots a_n]} D_{[c}(v^b\varepsilon_{|b|a_1\cdots a_n]})$

$= n\varepsilon^{ca_1\cdots a_n} D_c(v^b\varepsilon_{ba_1\cdots a_n})$.

*补充: Theorem 3. D_a, ε 分别为与度规适配的导数和体元. 则 $D_b\varepsilon_{a_1\cdots a_n} = 0$.

Day 37.

(补). Th 1. 设 D_a, ε_a 为与度规适配的导数和体元. 则 $D_b\varepsilon_{a_1\cdots a_n}=0$.

证: 首先我们有 $\varepsilon^{a_1\cdots a_n}D_b\varepsilon_{a_1\cdots a_n}+\varepsilon_{a_1\cdots a_n}D_b\varepsilon^{a_1\cdots a_n}=0$ 而由于 $D_c g_{ab}=0$ 容易注意到上面两项相等. 从而立刻得证.

Th 2. $\varepsilon^{a_1\cdots a_j a_{j+1}\cdots a_n}\varepsilon_{a_1\cdots a_j b_{j+1}\cdots b_n}=(-1)^s\cdot j!(n-j)!\,\delta^{[a_{j+1}}{}_{[b_{j+1}}\cdots\delta^{a_n]}{}_{b_n]}$

上次我们试图证明: $\int_{i(N)}(D_b v^b)\varepsilon=\int_{\partial N}v^b\varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}$ 对于右侧 $n-1$ form. 计算其外微分:

$d\omega=n\,D_{[c}(v^b\varepsilon_{|b|a_1\cdots a_{n-1}]})=h\varepsilon_{ca_1\cdots a_{n-1}}$. 两边和 $\varepsilon^{ca_1\cdots a_{n-1}}$ 缩并. 右边: $(-1)^s hn!$ 左侧: $n\varepsilon^{ca_1\cdots a_{n-1}}D_{[c}(v^b\varepsilon_{|b|a_1\cdots a_{n-1}]})=n\varepsilon^{[ca_1\cdots a_{n-1}]}D_c(v^b\varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}})$

$=n\varepsilon^{ca_1\cdots a_{n-1}}D_c(v^b\varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}})=n\varepsilon^{ca_1\cdots a_{n-1}}\varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}D_c v^b=(-1)^s\cdot(n-1)!\,\delta^c{}_b\,D_c v^b=n!(-1)^s\cdot D_b v^b$. $\Rightarrow h=D_b v^b$. 从而结论得证.

下面准备right侧. 在看右侧的时候, 我们要考虑 ∂N 上的体元. 设 N 上的度规 g_{ab} 在 ∂N 上诱导出了 $h_{ab}=g_{ab}\mp n_a n_b$, 称与之适配的体元满足 $\hat{\varepsilon}^{a_1\cdots a_{n-1}}\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}=(-1)^{\hat{s}}(n-1)!$

配合 ∂N 的诱导定向, 得到给出 ∂N 上唯一的诱导体元.

Theorem 3. $\int_{i(N)}(D_a v^a)\varepsilon=\pm\int_{\partial N}v^a n_a\hat{\varepsilon}$.

证明. $\int_{\partial N}v^b\varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}=\int_{\partial N}\tilde{\omega}_{a_1\cdots a_{n-1}}\overset{?}{=}\int v^a n_a\hat{\varepsilon}$ (利用上面的结论).

$\tilde{\omega}_{a_1\cdots a_{n-1}}=\underset{\to\text{ 证 }k=\pm 1.}{k}\cdot v^b n_b\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}$. 设 $\{(e_0)^a=n^a,(e_1)^a\cdots(e_{n-1})^a\}$ 为 V_q 上一组正交基底 (注: 这里我们说 $(e_0)^a$ 为法矢, 实际上我们默认 $(e_1)^a,(e_2)^a\cdots(e_{n-1})^a$ 为 ∂N 的一组正交归一基底. $(e_0)^a$ 是为了将它扩充为 M 的基底时补的那个. 所以 $(e_1)^a\cdots(e_{n-1})^a$ 全在曲面上). 用 $(e_1)^a\cdots(e_{n-1})^a$ 与上式缩并.

右侧 $=k\cdot v^b n_b\hat{\varepsilon}_{1,2,\cdots n-1}=\pm k\cdot v^b(e^0)_b\cdot\hat{\varepsilon}_{1,2,\cdots n-1}=\pm k\cdot v^0\cdot\hat{\varepsilon}_{1,2,\cdots n-1}=\pm k\cdot v^0$.

左侧 $=\tilde{\omega}_{a_1\cdots a_{n-1}}(e_1)^{a_1}\cdots(e_{n-1})^{a_{n-1}}=\omega_{a_1\cdots a_{n-1}}(e_1)^{a_1}\cdots(e_{n-1})^{a_{n-1}}=v^b\varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}(e_1)^{a_1}\cdots(e_{n-1})^{a_{n-1}}=v^b\varepsilon_{b1\cdots(n-1)}=v^0\cdot\varepsilon_{0\cdots(n-1)}=+1\cdot v^0$, $k=\pm 1$.

从而我们完成证明. Theorem 3. 正是一般情形下我们说的 Gauss 定理.

Day 38.

$\Lambda_p(l)$ 代表 $p\in M$ 处所有 l-form 的集合，它的维度 $\dim\Lambda_p(l) = \dim\Lambda_p(n-l) = C_n^l$. 从而，我们可建立 $\Lambda_M(l)$ 与 $\Lambda_M(n-l)$ 之间的同构映射。

Def 1. 对于 $\forall\,\omega\in\Lambda_M(l)$，定义 ω 的对偶微分形式为：$^*\omega_{a_1\cdots a_{n-l}} = \frac{1}{l!}\omega^{b_1\cdots b_l}\varepsilon_{b_1\cdots b_l a_1\cdots a_{n-l}}$ 其中，$\omega^{b_1\cdots b_l} = g^{b_1c_1}\cdots g^{b_lc_l}\omega_{c_1\cdots c_l}$.

[Example] 对于标量场 f. $^*f = f\varepsilon_{a_1\cdots a_n}$. 从而在流形上标量场的积分可写成 $\int f = \int {}^*f$. 另有结论：$^{**}\omega = (-1)^{s+l(n-l)}\omega$.

下面，我们可以用这套工具分析 $(\mathbb{R}^3, \delta_{ab})$ 中矢量分析的内容。

1) 在 $(\mathbb{R}^3,\delta_{ab})$ 中，我们有 $\omega^a = \delta_{ab}\omega_b$. 且有 $\omega^\mu=\omega_\mu$. 所以在 $(\mathbb{R}^3,\delta_{ab})$ 中，我们不必分开矢量和对偶矢量。对于 2-form field，我们使用 $*:\Lambda(2)\to\Lambda(1)$ 将其与矢量场认同。对于 3-form field，它自然和标量场认同。

2). 点乘对应于 $A_aB^a = \delta_{ab}A^aB^b$. 但两矢量场的叉乘？取 A^a B^b. 令 $A_a=\delta_{ab}A^b$ $B_b=\delta_{ba}B^a$. $\omega_{ab} = A_a\wedge B_b = 2A_{[a}B_{b]}$.
其对偶 $^*\omega_c = \frac{1}{2}\omega^{ab}\varepsilon_{abc} = \frac{1}{2}\cdot 2A^{[a}B^{b]}\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{abc}A^aB^b = \varepsilon_{abc}A^aB^b$ 通过考察 ε 的分量，可知 ε_{ijk} 为 Levi-Civita 符号。取 $^*\omega_c$ 在笛卡尔系分量有 $^*\omega_k=\varepsilon_{ijk}A^iB^j$.

3). 在矢量场论中，我们常计算 $\vec\nabla f$, $\vec\nabla\cdot\vec A$, $\vec\nabla\times\vec A$. $\vec\nabla$ 实际就是笛卡尔系上的普通导子。从而 $\vec\nabla f=\partial_a f$. $\vec\nabla\cdot\vec A=\partial_aA^a$. $\vec\nabla\times\vec A=\varepsilon^{abc}\partial_aA_b$. (仿照前面的过程可证明这正确).
$\vec\nabla\cdot(\vec A\vec B)=\partial_a(A^aB^b)$. $\vec\nabla\vec A=\partial^aA^b$ $\nabla^2 f=\partial_a\partial^a f$. $\nabla^2\vec A=\partial_a\partial^aA^b$

4). 我们还可以换个表示方法：$\vec\nabla f = df$. $\vec\nabla\cdot\vec A={}^*d({}^*A_a)$ $\vec\nabla\times\vec A={}^*(dA_a)$ (这里右侧皆为对偶矢，省略开指标).

5). 在电动力学中，我们有 ① $\oint\vec E\cdot dl=0\Rightarrow\vec\nabla\times\vec E=0$. 从而 $\forall\phi$，使 $\vec E=\vec\nabla\phi$.
② $\oiint\vec B\cdot dl=0\Rightarrow\vec\nabla\cdot\vec B=0$ 从而 $\forall\vec A$，使 $\vec B=\vec\nabla\times\vec A$ 如何证明？

①: $\vec\nabla\times\vec E=0\Leftrightarrow{}^*(dE_a)=0\Leftrightarrow dE_a=0$. 由于在 $\mathbb{R}^3$ 上闭 $\Leftrightarrow$ 恰当，故 $dE_a=0\Leftrightarrow\forall\phi$ 使 $E_a=d\phi$ 从而 $\vec E=\nabla\phi$.

②: $\vec\nabla\cdot\vec B=0\Leftrightarrow{}^*(d{}^*B)=0\Leftrightarrow d{}^*B=0\Leftrightarrow\exists A$. ${}^*B=dA$. 两边取对偶 $B={}^*(dA)$.

补充材料：标架理论

之前，我们用黎曼张量描述 D_aD_b 作用在对偶矢上的不对易性，算的时候，我们要借助一套坐标基底打开：$D_a\omega_b = \partial_a\omega_b - \Gamma^c{}_{ab}\omega_c$.
而现在，我们借助一套任意指定的基底场 $\{(e_\mu)^a\}$ 来计算它。

我们先给出克氏符的一个几何意义：考虑 $(e_\mu)^a$ 沿着 $(e_\tau)^a$ 的(协变)导数：$\underbrace{(e_\tau)^b D_b(e_\mu)^a}_{\text{这也是个矢量}} = \underline{\gamma^\sigma{}_{\mu\tau}}(e_\sigma)^a$ "connection coef." 而在 $(e)^a$ 为坐标基矢时，$\gamma^\sigma{}_{\mu\tau}$ 恰为克氏符

⇒克氏符描绘的是坐标标架的一个基矢在另一个基矢上的导数。说得再通俗直观一些：坐标标架的"旋转"或"倾斜"使克氏符不为0.

从上式可看出：$\gamma^\nu{}_{\mu\tau} = (e^\nu)_a (e_\tau)^b D_b(e_\mu)^a$. $\gamma^\nu{}_{\mu\tau}$ 的意义：基矢μ在τ方向的导在ν方向上的分量。议在研究不同基矢沿着μ的导数在ν上分量，并以此定义"联络1-形式"

$$(\omega_\mu{}^\nu)_a = -\gamma^\nu{}_{\mu\tau}(e^\tau)_a$$
$$= -(e^\tau)_a(e^\nu)_c(e_\tau)^b D_b(e_\mu)^c = -(e^\nu)_c D_a(e_\mu)^c \overset{\text{莱布尼茨律}}{=} (e_\mu)^c D_a(e^\nu)_c$$

由于所有 $(\omega_\mu{}^\nu)_a$ 的所有分量正是联络系数(非坐标基底时的克氏符)，所以可认为 $\{(\omega_\mu{}^\nu)_a\}$ 包含了 D_a 借基底场 $\{(e_\mu)^a\}$ 的体现.

联络1-形式满足以下方程：

Theorem 1. Cartan 第一结构方程. $de^\nu = -e^\mu\wedge\omega_\mu{}^\nu$.

证明：$-(e^\mu)_a\wedge(\omega_\mu{}^\nu)_b = -(e^\mu)_a\wedge[(e_\mu)^c D_a(e^\nu)_c] = -2\underbrace{(e^\mu)_{[a}}\underbrace{(e_\mu)^c} D_{b]}(e^\nu)_c$ （外微分定义）

$= -2\,\delta^c{}_{[a}D_{b]}(e^\nu)_c$ $(e^\mu)_a$ 与 $(e_\mu)^c$ 的对偶

$= -2D_{[a}(e^\nu)_{b]} = (de^\nu)_{ab}$ （$\delta^c{}_a$ 的恒等映射性质）.

令 $R_{ab\mu}{}^\nu = R_{abc}{}^d(e_\mu)^c(e^\nu)_d$. 由于R对于前两个指标的反称性，$R_{ab\mu}{}^\nu$ 可看作"第μ,ν个2形式场"（μ,ν 也可以是指标，也可以是形式场的编号.
但注意：$(\omega_\mu{}^\nu)_a$ 的 μ,ν 只可为编号.

Theorem 2. Cartan 第二结构方程：给出了曲率2-形式与联络1-形式之间的关系 $R_\mu{}^\nu = d\omega_\mu{}^\nu + \omega_\mu{}^\lambda\wedge\omega_\lambda{}^\nu$.

证明：由 Riemann Tensor 定义：$R_{abc}{}^d(e^\nu)_d = 2D_{[a}D_{b]}(e^\nu)_c$ 从而 $R_{ab\mu}{}^\nu = 2(e_\mu)^c D_{[a}D_{b]}(e^\nu)_c$.

⇒ $(e_\mu)^c D_aD_b(e^\nu)_c = D_a[(e_\mu)^c D_b(e^\nu)_c] - [D_a(e_\mu)^c]D_b(e^\nu)_c$

$= D_a(\omega_\mu{}^\nu)_b - [D_a(e_\mu)^d]\,\underline{\delta^c{}_d}\,D_b(e^\nu)_c$

$= D_a(\omega_\mu{}^\nu)_b - [\underline{D_a(e_\mu)^d](e^\lambda)_a}\underline{(e_\lambda)^d D_b(e^\nu)_c}$

$= D_a(\omega_\mu{}^\nu)_b + (\omega_\mu{}^\lambda)_a(\omega_\lambda{}^\nu)_b$

⇒ $R_{ab\mu}{}^\nu = 2D_{[a}\omega_\mu{}^\nu{}_{b]} + 2\omega_\mu{}^\lambda{}_{[a}\omega_\lambda{}^\nu{}_{b]} = (d\omega_\mu{}^\nu)_{ab} + (\omega_\mu{}^\lambda\wedge\omega_\lambda{}^\nu)_{ab}$. 若要求得曲率张量在所选标架下的分量则只需 $R_{\rho\sigma\mu}{}^\nu = R_{ab\mu}{}^\nu(e_\rho)^a(e_\sigma)^b$.
若流形上有与导子适配的度规，使 $D_a g_{bc}=0$. 记 $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$ 为 g_{ab} g^{ab} 在指定标架下的分量. 并记 $(e_\mu)_a = g_{ab}(e_\mu)^b$. 则自然有 $(e^\mu)_a = g^{\mu\nu}(e_\nu)_a$.

类似地可以用度规对联络1-形式进行具体指标升降 $(\omega_{\mu\nu})_a = (\omega_\mu{}^\sigma)_a g_{\nu\sigma} = g_{\nu\sigma}(e_\mu)^c D_a(e^\sigma)_c$.

若一个标架使得 $D_a g^{\mu\nu} = 0, \forall \mu,\nu$ ($g^{\mu\nu}$为常值)，则将这套标架称为刚性标架 (rigid frame). 例如对于洛伦兹度规有 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.

对刚性标架显有 $(\omega_{\mu\nu})_a = (e_\mu)_b D_a (e_\nu)_b$.

Theorem 3. 对于刚性标架有 $(\omega_{\mu\nu})_a = -(\omega_{\nu\mu})_a$

证：$(\omega_{\mu\nu})_a = D_a[(e_\mu)_b(e_\nu)_b] - (e_\nu)^b D_a(e_\mu)_b = -(e_\nu)^b D(e_\mu)^b = -(\omega_{\nu\mu})_a$. 从而对于刚性标架，这些1-形式中只有 $n(n-1)/2$ 个独立.

在标架下计算R的分量的流程：a) 计算 D_a 在所选标架下的全部联络1-形式 $\omega_\mu{}^\nu$. b) 由第二结构方程得出曲率2-形式.

下面介绍如何在刚性标架下得出 $\omega_\mu{}^\nu$. 此外还需要借用一坐标系$\{x^\mu\}$. 记 $(e_\nu)_\lambda = (e_\nu)_a \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right)^a$. $(e_\mu)^\lambda = (e_\mu)^a (dx^\lambda)_a$. 为标架和对偶标架在坐标系下分量.

令

$$\Lambda_{\mu\nu\rho} = \left[\frac{\partial(e_\nu)_\lambda}{\partial x^\tau} - \frac{\partial(e_\nu)_\tau}{\partial x^\lambda}\right](e_\mu)^\lambda (e_\rho)^\tau$$

$$\Lambda_{\rho\nu\mu} = \left[\frac{\partial(e_\nu)_\lambda}{\partial x^\tau} - \frac{\partial(e_\nu)_\tau}{\partial x^\lambda}\right](e_\mu)^\tau (e_\rho)^\lambda$$

相当于 $\Lambda_{\mu\nu\rho}$ 中 $\lambda\tau$ 位置对调 $\Rightarrow \Lambda_{\mu\nu\rho} = -\Lambda_{\rho\nu\mu}$.

可以通过以下定理得出所有联络1-形式的所有分量：

Theorem 4. $\omega_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}(\Lambda_{\mu\nu\rho} + \Lambda_{\rho\mu\nu} - \Lambda_{\nu\rho\mu})$.

证明：由克氏符对下指标的对称性有：$(e_\nu)_{\lambda,\tau} - (e_\nu)_{\tau,\lambda} = (e_\nu)_{\lambda;\tau} - (e_\nu)_{\tau;\lambda}$.

从而上式改写为：

$$\Lambda_{\mu\nu\rho} = [D_a(e_\nu)_b - D_b(e_\nu)_a]\left(\frac{\partial}{\partial x^\tau}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right)^b (e_\mu)^\lambda (e_\rho)^\tau$$

$$= [D_a(e_\nu)_b - D_b(e_\nu)_a](e_\mu)^b (e_\rho)^a = \omega_{\mu\nu\rho} - \omega_{\rho\nu\mu}.$$

从而可进一步完成证明.