DAY3

Chap 2 Differential Manifold and Tensor Field.

我们补充一些概念。

复合映射：若我们有映射 $f: X\to Y$，$g: Y\to Z$，我们可以得到一个 $X\to Z$ 的映射 $g\circ f$，这称为复合映射。

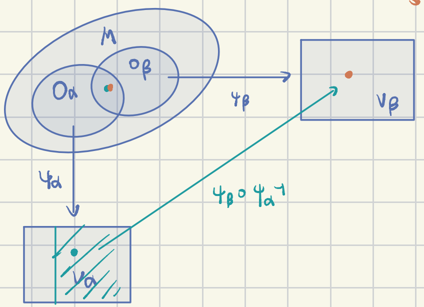
在研究物理问题时，我们通常要依赖于某个"背景空间"，例如牛顿力学和电动力学中的 $\mathbb{R}^3$，哈密顿力学中的相空间等。为了统一表述这些背景空间，我们需引入流形(manifold)。微分流形即对拓扑空间添加微分结构。直观地说，一个n维微分流形像 $\mathbb{R}^n$。

Def 1. 拓扑空间 M 被称为 n 维微分流形，若 M 有一个开覆盖 $\{O_\alpha\}$，即 $M=\bigcup_\alpha O_\alpha$，且这个开覆盖满足：

a). $\forall\ O_\alpha$，存在一个拓扑同胚（既单又满，正逆连续）$\psi_\alpha: O_\alpha\to V_\alpha$，$V_\alpha$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中由 $\mathcal{T}_u$ 衡量的开子集。（局部与 $\mathbb{R}^n$ 的相似性）.

b). 若 $O_\alpha\cap O_\beta$ 非空，则复合映射 $\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}$ 是 C^∞ 的（任意阶导存在并连续）。（图间的相容性/compatibility）

从 $\psi_\alpha(O_\alpha\cap O_\beta)$ 到 $\psi_\beta(O_\alpha\cap O_\beta)$ 的。
这相当于n个n元函数，在性质良好的情况下，
可以求n阶导数。



这样，取出 $p\in O_\alpha$，则 $\psi_\alpha(p)\in\mathbb{R}^n$，有n个自然坐标，我们将其称为p在映射 ψ_α 下获得的坐标。我们称 (O_α,ψ_α) 构成一个局部坐标系，其坐标域为 O_α。$O_\alpha\cap O_\beta$ 内的点至少有两组坐标 x^μ 和 x'^ν，则它们之间关系用n个n元函数表达，这称为一个坐标变换。由相容性条件，每个n元函数是 C^∞ 的。

Def 2. 我们将坐标系 (O_α,ψ_α) 称为图(chart)。满足a),b)的图的集合 $\{(O_\alpha,\psi_\alpha)\}$ 称为图册(atlas)

Example 1. $M=(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}_u)$，选一张"地图"（$O_1=\mathbb{R}^2$，$\psi_1=$恒等映射），这就被称为平凡流形。

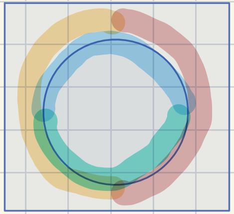
若你选取极坐标，实际上就是将某个与 O_1 相关的 O_2 内的点用某个 ψ_2 映射到 $\mathbb{R}^2$ 的子集上。

Example 2. $M=(S^1,\mathcal{S})$ $\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的 $\mathcal{T}_u$ 在 S^2 诱导的拓扑

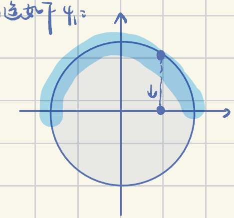
DAY 4

(接上节). Example 2. $M=(S^1,\mathcal{G})$. $\mathcal{G}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的 $\mathcal{T}_u$ 在 S^1 上诱导的拓扑. 下证 M 是微分流形.

由于 S^1 与 $\mathbb{R}$ 不同胚. 所以图册中不可能一个图. 我们取四个图



构造如下 ψ_1:



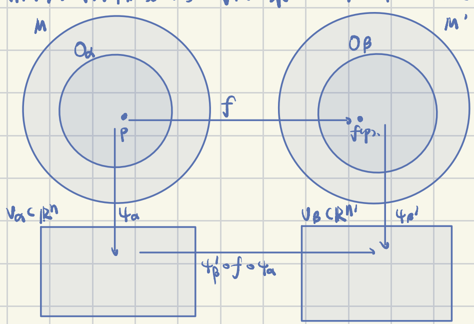
可证明 $\psi_1 \sim \psi_4$ 满足相容条件.

Example. 3. $M=(S^2,\mathcal{G})$.

其证明可以仿照上例.自然写成. 取上下左右前后六张图

注意. 设对于某一拓扑空间 M. 我们可以使用图册 $\{(O_\alpha,\psi_\alpha)\}$ 或 $\{(O'_\alpha,\psi'_\alpha)\}$. 将 M 定义成微分流形. 我们现在可以问这两个图册是否相容.
若存在 O_α. O_β', 使得 $O_\alpha\cap O_\beta'\neq\emptyset$. 且 $O_\alpha\cap O_\beta'$ 上的 $\psi_\beta'\circ\psi_\alpha^{-1}$ 不满足 C^∞ 条件. 此时. 我们称 $\{(O_\alpha,\psi_\alpha)\}$ 和 $\{(O_\beta',\psi_\beta')\}$ 将 M 定义为两个不同的流形. 并说两个图册是不同的微分结构.
否则. 它们只是定义了同一个微分流形. 我们可以制造一个更大的图册 $\{(O_\alpha,\psi_\alpha),(O'_\alpha,\psi'_\alpha)\}$. 此后.我们提到流形时. 总是默认使用最大的图册. 这使得我们可以任意进行坐标变换.

注意. 我们可以讨论微分流形之间的映射. 我们不仅可以讨论这样的映射的连续性,还可以讨论其可微性.



如图. 我们只需考察复合映射 $\psi_\beta'\circ f\circ\psi_\alpha^{-1}$ 的 C^r 性. 即可定义 f 的 C^r 性.

类比表示两个拓扑空间之间很好的映射"拓扑同胚". 我们可以定义微分同胚映射 f:

a). f 是既单又满的. b). f 和 f^{-1} 是 C^∞ 的.

特别地.我们将 $M\to\mathbb{R}^1$ 的映射称为 M 上的标量场/函数. (注:不能将 $M\to\mathbb{R}^1$ 直接表述为"n 元函数". 因为所谓 n 个自变量依赖于坐标系).

这是绝对的. 不依赖坐标选择的

这是相对的 依赖坐标选择.

Example 4. 真空中位于 q 点的点电荷的电势是 $\mathbb{R}^3-\{q\}$ 上的函数.