Day 28.

下面我们在配备了度规的流形上讨论、有同胚：$\phi: M\to N$．　$\phi^* g_{ab}$ 和 g_{ab} 是一般不同的．

Def. 1.　称 $\phi: M\to M$ 为等度规(isometry)映射．若 $\phi^* g_{ab} = g_{ab}$．

Def. 2.　(M, g_{ab}) 上的矢量场 $\xi^a \in \mathscr{F}(1,0)$．称为 Killing 矢量场．若它给出的单同群是等度规群．$\Rightarrow \phi_t^* g^{ab} - g^{ab} = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_\xi g^{ab} = 0$．

$$0 = \mathcal{L}_\xi g_{ab} = \xi^c D_c g_{ab} + g_{cb} D_a \xi^c + g_{ac} D_b \xi^c$$　取一个与度规适配的导子．

$$= D_a(g_{cb}\xi^c) + D_b(g_{ac}\xi^c) = D_a\xi_b + D_b\xi_a$$

$D_a\xi_b + D_b\xi_a = 0$ 被称为 Killing 方程．或 $D_{(a}\xi_{b)} = 0$ 或 $D_a\xi_b = D_{[a}\xi_{b]}$．

此外．若存在坐标系 $\{x^\mu\}$．使 g_{ab} 的全部分量 $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^1} = 0$．则 $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^a$ 为基灵场．(由李导数分量计算式直接得到)．

Theorem 3.　设 ξ^a 为基灵场．T^a 为测地线切矢．则 $T^a D_a(T^b\xi_b) = 0$．换言之．$T^b\xi_b$ 在测地线上常值．

Pf: $T^a D_a(T^b\xi_b) = \xi_b T^a D_a T^b + T^b T^a D_a\xi_b = T^b T^a D_{[a}\xi_{b]} = 0$．

设 ξ^a．η^a 是 Killing 场．则线性组合 $\alpha\xi^a + \beta\eta^a$ 也是 Killing 场．$\to$ M上Killing场是矢量空间．　可证明．$[\xi, \eta]^a$ 也是．

Theorem 4.　(M, g_{ab}) 上最多有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个 Killing场．

等度规映射可看作一种"保度规"对称变换．e.g. 若 $\phi: p\to q$．　p处 $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^a \xrightarrow{\phi_*} q$处 $\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)^a$．则 g_{ab} 与 $\phi_* g_{ab}$ 在$\{x^\mu\}$、$\{y^\mu\}$下分量相同．

$\exists$ 每一个(独立) Killing field 代表一个对称性．要找这些全部对称性．则要求通解．(某些情形可猜出来)．

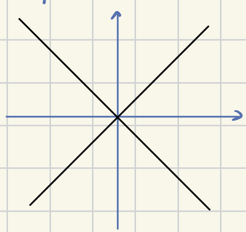
[Example]　(1). $(\mathbb{R}^2, g_{ab})$．$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$．　猜：$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a$．$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a$．　或：$(ds)^2 = r^2(d\varphi)^2 + (dr)^2$　$\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^a = -y\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a + x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a$ 也是 Killing 场．$\exists$ 平移、旋转不变性．

2). $(\mathbb{R}^3, g_{ab})$．　$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a$　$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a$　$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a$．　以及 $-y\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a + x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a$　　$-z\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a + y\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a$．　$-x\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a + z\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a$

3). $(\mathbb{R}^2, \eta_{ab})$．　$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$　$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a$　做坐标变换：$\{x, t\}\to\{\psi, \eta\}$．$\Rightarrow x = \psi\cosh\eta$　$t = \psi\sinh\eta$．$\Rightarrow (ds)^2 = (d\psi)^2 - \psi^2(d\eta)^2$．　$\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^a$．　而且 $\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^a = t\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a + x\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$　"boost"．

第二坐标的积分曲线 $\Leftrightarrow$
第一坐标为常数 $x^2 - t^2 = 1$ $(x>1)$

4). $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$．



Day 29.

我们首先补全上次的例子：找到 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 上的所有 Killing vector field.（共10个）.

a). 4个平移：$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$、$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a$ $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a$ $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a$

b). 3个空间转动（与 $(\mathbb{R}^3, \delta)$ 的情况相同）. $-y\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a + x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a$, $-z\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a + y\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a$. $-x\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a + z\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a$.

c). 3个'boost'（伪转动） $t\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a + x\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$. $t\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a + y\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$. $t\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a + z\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$.

$(x'^\mu)_p = x^\mu(q)$.

Theorem 1. 设 $\{x, t\}$ 为 $(\mathbb{R}^2, \eta_{ab})$ 的坐标系. $\phi_\lambda: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 为 Killing 场 $\xi^a = t\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a + x\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$ 诱导的单参等度规群的群元，则由 ϕ_λ 诱导的坐标变换是洛伦兹变换.

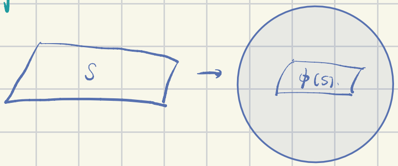
这个Killing场的积分曲线是双曲线. 我们将找到它的参数表达式. 设其积分曲线的参数方程为：$\frac{dx^\mu(\eta)}{d\eta} = \xi^\mu$. $\xi^a = t\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a + x\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$. $\Rightarrow$ $\frac{dx(\eta)}{d\eta} = t(\eta)$. $\frac{dt(\eta)}{d\eta} = x(\eta)$.

又有初始条件（积分曲线过 p 点）. $x(0) = x_p$. $t(0) = t_p$. $\Rightarrow \begin{cases} x(\eta) = x_p \cdot \cosh\eta + t_p \cdot \sinh\eta \\ t(\eta) = x_p \cdot \sinh\eta + t_p \cdot \cosh\eta \end{cases}$. 设 $q = \phi_\lambda(p)$. 则 q 为曲线上参数为 λ 的点. $\Rightarrow \begin{cases} x_p' = x_q = x_p \cdot \mathrm{ch}\lambda + t_p \cdot \mathrm{sh}\lambda \\ t_p' = t_q = x_p \cdot \mathrm{sh}\lambda + t_p \cdot \mathrm{ch}\lambda \end{cases}$

令 $v = \tanh\lambda$. $\gamma = (1-v^2)^{-1/2} = \cosh\lambda$. 从而我们有：$x' = \gamma(x + vt)$ $t' = \gamma(t + vx)$.

Theorem 2. 设 $\{x^\mu\}$ 为 $(\mathbb{R}^n, \eta_{ab})$ 的洛伦兹坐标系. 则 $\{x'^\mu\}$ 也是洛伦兹坐标系的充要条件是 $\{x'^\mu\}$ 是由 $\{x^\mu\}$ 经由等度规映射 $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 得到的.

Def. 1. 设 S, M 为流形, 且 $\dim S \le \dim M$. 我们将映射 $\phi: S \to M$ 称为嵌入（Embedding）. 若 ϕ 是一一的, C^∞ 的, 且推前映射 $\phi_*: V_p \to V_{\phi(p)}$ 非退化. $(\phi_* v^a = 0 \Rightarrow v^a = 0)$.



可以证明, S 的拓扑和流形结构会被自然带到 $\phi[S]$ 上去, 从而 $S \to \phi[S]$ 是微分同胚. 为此, 我们常将 $\phi[S]$ 称为嵌入子流形.

若 $\dim S = n-1$. 则称 $\phi[S] \subset M$ 为 M 的一张超曲面（hypersurface）.

[Example]. 设 S 为 $\mathbb{R}^3$ 中单位球面 S^2, 则 $\phi: S^2 \to \mathbb{R}^3$ 给出 $\mathbb{R}^3$ 的嵌入.

（直观上）曲面的法矢虽然不唯一但它们之间相差一个常值.

Day 30

考虑嵌入 $\phi: S\to M$ 它将 $p\mapsto q$. 由于q点M中的点, 故将M在q处切空间称为V_q. 然而V_q中的某些矢量 $v^a\in V_q$ 并不切于子流形 $\phi[S]$.
将切于$\phi[S]$的矢量组成的集合称为 W_q. 显然W_q是V_q的子空间. 记 $w^a\in W_q$. 现在我们可以将(欧氏空间中)超曲面的法矢推广至一般情形.
由于"正交性"的定义需要 metric tensor, 所以我们没办法直接定义某个n^a正交于所有 w^a, 所以我们要借助"法余矢"的定义.

Def 1. 法对偶矢量/法余切矢量(normal covector). 称非零对偶矢量 $n_a\in V_q^*$ 是$\phi[S]$在q处法余矢, 则 $\forall w^a\in W_q$, 都有 $n_a w^a=0$.

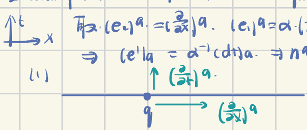
Theorem 1. 超曲面上任一点q, 必有法余矢, 法余矢不唯一, 且两个法余矢间仅差一个常因子.
设$\{(e_2)^a,\dots(e_n)^a\}$为W_q的一组基, 可将其扩张成V_q的一组基$\{(e_1)^a,\dots(e_n)^a\}$. 将其对偶基底记作$\{(e^1)_a \cdots (e^n)_a\}$. 令 $n_a=(e^1)_a$. 则能验证出它合定义.
只能差一个常数也是显然的.

Theorem 2. 若 $D_a f|_{f=c} = df|_{f=c}\neq 0$. 则 $f=c$ 给出流形M上的一个超曲面 $\phi[S]$. 设 $q\in\phi[S]$. $D_a f|_q$ 恰为$\phi[S]$在q点的法余矢!
$w^a\in W_q$ 切于过q的$\phi[S]$上某曲线. $\Rightarrow w^a D_a(f) = \underbrace{w(f) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(f)}_{w\text{在某曲线的切矢}}=0$
在有度规后, 设 n_b 为法余矢, 则:
$n^a=g^{ab}n_b$. 容易证明: $g_{ab}n^a w^b = n_b w^b=0$. 从而我们将$n_b$用度规升上去后的 n^a 称为$\phi[S]$在q点的法矢 (normal vector).

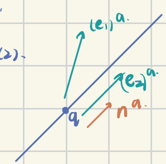
Theorem 3. (反直觉的事实). 法矢n^a可能$\in W_q$. $n^a\in W_q$ 当且仅当 n^a 类光 $(n^a n_a=0)$.
正着证: 由于$n^a\in W_q$, 则 $n_a n^a=0$.
反着证: 对任一法余矢 n_a 存在基底$\{(e_\mu)^a\}$ 使 $(e_2)^a\cdots(e_n)^a\in W_q$. 且 $n_a=(e^1)_a$. n^a在该基底下第一分量 $n^1=n^a(e^1)_a=n^a n_a=0 \Rightarrow n^a\in W_q$ 自然得证.

[Example] $S=\mathbb{R}$. $M=(\mathbb{R}^2,\eta_{ab})$. 考虑$M$上三种超曲面的法矢.

(1) 取 $(e_2)^a=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a$. $(e_1)^a=\alpha\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a+\beta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a$.
$\Rightarrow (e^1)_a=\alpha^{-1}(dt)_a \Rightarrow n^a=\alpha^{-1}g^{ab}(dt)_b=-\alpha^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$.



(2)



取 $(e_2)^a=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a+\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$. $(e_1)^a=\alpha\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a+\beta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a$. $\alpha\neq\beta$.
$\Rightarrow (e^1)_a=(\alpha-\beta)^{-1}[(dt)_a-(dx)_a]$.
$n^a=-(\alpha-\beta)^{-1}(e_2)^a \in W_q$, 且它类光.

Day 31.

Def. 1. 类空超曲面的法矢类时，类时超曲面法矢类空，而类光超曲面法矢类光。

Def 2. 设 $\phi[S]$ 为 M 中嵌入子流形，$q\in\phi[S]$，则 W_q 处张量 h_{ab} 称为 V_q 上度规 g_{ab} 生出的诱导度规，若 $h_{ab}w_1^a w_2^b = g_{ab}w_1^a w_2^b$ $\forall w_1^a, w_1^b\in W_q$.

若 $\phi[S]$ 为类时/空超曲面，则 h_{ab} 可由归一化法矢表示，$h_{ab}=g_{ab}\mp n_a n_b$. ($n^a n_a=+1$ 时取 -1，反之取 $+1$).

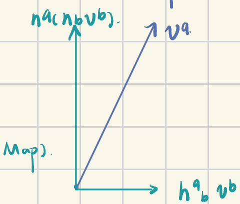
若 $\phi[S]$ 类光，则 $\exists$ 法矢 $n^a\in W_q$. $h_{ab}n^a w^b = g_{ab}n^a w^b = n_a w^b = 0$. 此时 h_{ab} 是退化的，因而并非度规，从而类光超曲面无诱导度规。

令 $h^a{}_b = g^{ac}h_{cb} = g^{ac}g_{cb}\mp g^{ac}n_c n_b = \delta^a{}_b \mp n^a n_b$. 考虑将其作用在 $v^a\in V_q$ 上。

$h^a{}_b v^b = v^a \mp n^a(n_b v^b)$，或：$v^a = h^a{}_b v^b \pm n^a(n_b v^b)$.

$$n_a h^a{}_b = n_a\delta^a{}_b \mp n_a n^a n_b = n_b \mp (\pm1) n_b = 0.$$

从而 $h^a{}_b$ 称为 V_q 到 W_q 的投影映射 (Projection Map).



补充材料

[选读 4-4-1]. 中[5]

[4-4-3] 设 V_q 为4维，则 W_q 为3维。根据定义，h_{ab} 只能与 W_q 中的矢量作用，因而它实际上是一个3维张量。

但是：$\bar{h}_{ab} = g_{ab} \mp n_a n_b$ 中的 $\bar{h}_{ab}$ 却是4维张量。为什么我们还将其称作诱导度规？

这是由于 $\{T_{ab} \in \mathcal{T}_{V_q}(0,2) \mid T_{ab}n^a = 0,\ T_{ab}n^b = 0\}$ 与 $\mathcal{T}_{W_q}(0,2)$ 自然同构。从而我们不再区分4维的 $\bar{h}_{ab}$ 和3维 h_{ab}。

考虑 h_{ab} 作用在两个法矢上：$h_{ab}n^a n^b = g_{ab}n^a n^b - n_a n^a n_b n^b = 0$.

对于 $\forall v^a$，有 $\tilde{v}^a = h^a{}_b v^b \pm n^a(n_b v^b)$.

$h_{ab}(n^a n_d v^d)(n^b n_c v^c)$

$= g_{ab}(n^a n_d v^d)(n^b n_c v^c) = n_d v^d n_c v^c$

$\Rightarrow h_{ab}$ 作用在垂直于超曲面上的矢量的结果为0.