Day 26

Def 1. 推前映射 ϕ_*: 对于 $\forall p\in M$, $\phi_*: \mathcal{T}_{V_p}(k,0) \longrightarrow \mathcal{T}_{V_{\phi(p)}}(k,0)$. 对于 $T\in\mathcal{T}_{V_p}$, 其像 $\phi_*T\in\mathcal{T}_{V_{\phi(p)}}$ 定义为,

$$(\phi_*T)^{a_1\cdots a_k}(\omega^1)_{a_1}\cdots(\omega^k)_{a_k} = T^{a_1\cdots a_k}(\phi^*\omega^1)_{a_1}\cdots(\phi^*\omega^k)_{a_k}.$$

为什么 ϕ_* 不能推前 M 上的矢量场? 例如: $\mathcal{T}_M(1,0)\longrightarrow\mathcal{T}_N(1,0)$?

$\forall T\in\mathcal{T}_M(1,0)$, 定义 $(\phi_*T)^a|_q(f) = T|_{\phi^{-1}(q)}(\phi^*f)$.

而 ϕ^{-1} 不一定可逆. 换言之, 由于我们不要求 ϕ "one-one, onto". 故 M 与 N 并非平权的.

* 实际上, 我们前面的定义在讲 $\forall T\in\mathcal{T}_M(1,0)$, $(\phi_*T)|_{\phi(p)}(f)=T|_p(\phi^*f)$. 换言之, 我们只定义了 range $\phi(\cdot)\subset N$ 上的矢量场.
从而, 在一般映射前提下, pull back 从 Field → Field, 而 push forward 从 Field → 部分上的 Field. 特别地, 当 ϕ 是微分同胚, 则可以将推前也做成 Field → Field 映射.
此外, 我们还可做一件事: 将 $\phi^{-1}: N\to M$ 作为"原始映射", 构造出的拉回 $\phi^{-1*}: \mathcal{F}_M(0,l)\to\mathcal{F}_N(0,l)$. 而这可以看作 ϕ 的推前 ϕ_*.
将 ϕ_* 的定义进一步外推到 $\phi_*: \mathcal{T}_M(k,l)\longrightarrow\mathcal{T}_N(k,l)$.

Def 2. 推广后的推前和拉回.

取 $T\in\mathcal{T}_M(k,l)$, 将其推至 $\mathcal{T}_N(k,l)$:

$$(\phi_*T)^{a_1\cdots a_k}{}_{a_1\cdots a_l}\Big|_q(\omega^1)_{a_1}\cdots(\omega^k)_{a_k}(v_1)^{a_1}\cdots(v_l)^{a_l} = (T)^{a_1\cdots a_k}{}_{a_1\cdots a_l}\Big|_{\phi^{-1}(q)}(\phi^*\omega)_{a_1\cdots a_l}(\phi^*v)_{a_1\cdots a_l}$$

其中 $\phi^*\omega$ 用正常的拉回, 而 ϕ^*v 实际上是 $\phi^{-1}{}_*v$.

取 $T\in\mathcal{T}_N(k,l)$, 将其拉回 $\mathcal{T}_M(k,l)$:

$$(\phi^*T)^{a_1\cdots a_k}{}_{a_1\cdots a_l}\Big|_p(\omega)_a(v)^a = T|_{\phi(p)}(\phi_*\omega)_a(\phi_*v)^a$$

$\phi_*\omega$ 应理解为 $\phi^{-1*}\omega$.

设 $\phi: M\to N$ 是同胚. $\{x^\mu\}$ $\{y^\mu\}$ 分别为 M, N 上局部坐标系, 且有 $p\in O_1$, $\phi(p)\in O_2$, $p=\phi^{-1}(O_2)$. 我们可以在 $\phi^{-1}(O_2)$ 内再借助 ϕ 定义一组新坐标 $\{x'^\mu\}$: 像点坐标是原象新坐标.
$\Rightarrow x'^\mu(q) = y^\mu(\phi(q))$ 从而在 $O_1\cap\phi^{-1}(O_2)$ 中有两个坐标变换. 对于这一坐标变换, 我们有两个观点.

① 主动 (active) 观点: ϕ 将 $p\mapsto\phi(p)$, 将 $T\mapsto\phi_*T$.

② 被动 (passive) 观点: p 和 p 处张量 T 都没变, 而只是坐标系发生变换.

Theorem 1. 两个观点的等价性. $(\phi_*T)^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}|_{\phi(p)} = T'^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}|_p$ (无论用哪个观点, 张量"变换"前后的分量相同).

证明的提示: 设 $C(t)$ 是 M 中曲线, T^a 为曲线在 $C(t_0)$ 处切矢. 则 ϕ_*T^a 为 $\phi(C(t))$ 在 $\phi(C(t_0))$ 处的切矢. "像的切矢" = "切矢的像".

首先, $\{x'^\mu\}$ 中的一条坐标线必为 $\{y^\mu\}$ 中坐标线(的象), (e.g. x'^1 线 $\mapsto$ y^1 线). $\Rightarrow$

$$\phi_*\left[\left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\right)^a\Big|_p\right] = \left(\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right)\Big|_{\phi(p)}$$

$$\phi_*\left[(dx'^\mu)_a|_p\right] = (dy^\mu)_a|_{\phi(p)}$$

补充材料与证明

习题1. 证明推前映射确实定义了矢量.

线性: $(\phi_* v)(f+g) = v(\phi^*(f+g))$. 由于拉回是线性的, 自然得证.

莱布尼兹律: $(\phi_* v)(fg) = v(\phi^*(fg)) = v(\phi^* f \cdot \phi^* g)$. 得证.

习题2. 证明像的切矢是原像切矢的推前.

曲线 $C(t)$ 的切矢为: $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a\Big|_{t=t_0}$

而 $\phi(C(t))$ 的切矢作用在任意 f 上: $\frac{\partial f(\phi(C(t)))}{\partial t}$. $f(\cdot)$ 是 N 上函数. $\phi(\cdot)$ 是 N 上的点.

将 $C(t)$ 的切矢推前: $\left[\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a\right](f) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a(\phi^* f) = \frac{\partial[\phi^* f(C(t))]}{\partial t} = \frac{\partial f(\phi(C(t)))}{\partial t}$

从而 $\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$ 与 $\phi(C(t))$ 的切矢作用在任意 f 上有相同值 → OK.

映射 $\phi: M\to N$ 的两个坐标. $x'^\mu(q) = y^\mu(\phi(q))$. 故当 q 点沿着 x'^μ 坐标线移动时, $\phi(q)$ 沿着 y^μ 坐标线移动

$\Rightarrow \phi_*\left[\left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\right)^a\Big|_q\right] = \left(\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right)^a\Big|_{\phi(q)}$. 可以证明 $\phi_*[(dx'^\mu)_a|_q] = (dy^\mu)_a|_{\phi(q)}$.

从而下面证明两边等价性: $(\phi_* T)^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}|_{\phi(p)} = T'^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}|_p$.

张量在新坐标的分量: $T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}|_p (dx'^{\nu_1})_a|_p \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x'^{\mu_1}}\right)^b\Big|_p$.

新 表:

$$\left(\phi_* T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}|_{\phi(p)}\right)(dy^{\nu_1})_a|_{\phi(p)}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial y^{\mu_1}}\right)^b\Big|_{\phi(p)}$$ → 推前张量的定义.

由推前的定义

$$= T^{a_1\cdots}{}_{b\cdots}|_p\,\left[\phi^*(dy^{\nu_1})_a|_{\phi(p)}\right]\left[\phi^*\left(\frac{\partial}{\partial y^{\mu_1}}\right)^b\Big|_{\phi(p)}\right]$$

$$= T^a{}_b|_p\,\left[(dx'^{\nu_1})_a|_p\right]\left[\phi^{-1}{}_*\left(\frac{\partial}{\partial y^{\mu_1}}\right)^b\Big|_{\phi(p)}\right]$$

由拉回的定义.

*其实我们可以看出在 ϕ 为同胚的情形下, 拉回和推前互逆.

$$= T^a{}_b|_p\,\left[(dx'^{\nu_1})_a|_p\right]\left[\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\mu_1}}\right)^b\Big|_p\right]$$

补充: $\phi_*[(dx'^\mu)_a]|_p v^a$, $p\in N$, $v^a\in V_p$.

$$= (dx'^\mu)_a|_{\phi^{-1}(p)}(\phi^* v^a) = (\phi^* v^a)(x'^\mu)|_{\phi^{-1}(p)} = v^a(\phi_* x'^\mu)|_p = v^a(y^\mu)|_p = (dy^\mu)_a|_p v^a$$

$\Rightarrow \phi_*[(dx'^\mu)_a] = (dy^\mu)_a$.

选读：进一步说明等价性. 设 T_{ab} 为 M 上的 T.F. 在 x^σ 下的分量为 x^σ 的一组函数 $T_{\mu\nu}(x^\sigma)$. 若有坐标变换 $\{x^\sigma\}\to\{x'^\sigma\}$ 为 x'^σ 的函数. 两组分量 $T'_{\mu\nu}$ 和 $T_{\mu\nu}$ 一般不同.

有两个办法从 $T_{\mu\nu}\to T'_{\mu\nu}$. 1). 被动途径. 只对坐标变换, 而不做点和张量的变换.

2). 主动途径：找同胚 $\phi: M\to N$. $\tilde{T}_{ab}=\phi_* T_{ab}$. 又有一组分量 $\tilde{T}_{\mu\nu}(y^\sigma)$. 我们已知 "新张量@旧坐标 = 旧张量@新坐标".

故若想使得 $\tilde{T}_{\mu\nu}=T'_{\mu\nu}$. 只要使 $\phi: M\to N$ 诱导出的坐标变换恰好与 $\{x^\sigma\}\to\{x'^\sigma\}$ 一致. 此时有：

取 $p\in M$. $q=\phi(p)\in N$. $\Rightarrow \tilde{T}_{\mu\nu}(y^\sigma(q))=\tilde{T}_{\mu\nu}|_q \Rightarrow (\phi_* T)_{\mu\nu}|_q=T'_{\mu\nu}|_p=T'_{\mu\nu}(x'^\sigma(p))=T'_{\mu\nu}(y^\sigma(q))$.

另外. 补充些可能有用的 Theorem.

Th 1. 若 $\phi: M\to N$ 为 C^∞ 映射 $\forall T\in \mathscr{T}_N(0,l)$. $T'\in\mathscr{T}_N(0,l')$. 有：

$\phi^*(T\otimes T')=\phi^*(T)\otimes\phi^*(T')$.

$\forall T\in \mathscr{T}_{V_p}(k,0)$. $T'\in\mathscr{T}_{V_p}(k',0)$.

$\phi_*(T\otimes T')=\phi_*(T)\otimes\phi_*(T')$.

特别地, 若 $\phi: M\to N$ 为微分同胚. 则 $\forall T\in\mathscr{T}_M(k,l)$. $T'\in\mathscr{T}_M(k',l')$. 有：

$\phi_*(T\otimes T')=\phi_*(T)\otimes\phi_*(T')$.

证明：考虑拉回 $\phi^*: \mathscr{T}_N(0,l)\to\mathscr{T}_M(0,l)$.

$(\phi^* T_{a_1\cdots a_l}S_{b_1\cdots b_k})|_p (v_1)^{a_1}\cdots(v_l)^{a_l}(u_1)^{b_1}\cdots(u_k)^{b_k} = T_{a_1\cdots a_l}S_{b_1\cdots b_k}|_{\phi(p)}(\phi_* v_1)^{a_1}\cdots(\phi_* v_l)^{a_l}(\phi_* u_1)^{b_1}\cdots(\phi_* u_k)^{b_k}$

$(\phi^* T_{a_1\cdots a_l})|_p(\phi^* S_{b_1\cdots b_k})\ (v)\ (u)$ $=$ (按内积定义). $T|_{\phi(p)}(\phi_* v)$. $S|_{\phi(p)}(\phi_* u)$.

由于它们作用在同一组矢量上所得值相等. 再由这组矢量任意性, 这两个张量应相等.

Th2. 设 $\phi: M\to N$ 为同胚. 则 ϕ_* (及 ϕ^*) 可与缩并交换.

证明：看最简单的情况. 令 $T=T^a{}_b$. 则 $\phi_*(CT)=C(\phi_* T)$ 为标量场. 只需证它们在任意 $\phi(p)$ 成立. 将张量用坐标分量式展开并使用诱导的同胚.

$\phi_* T^a{}_b=(\phi_* T^\mu{}_\nu)(\phi_*(e_\mu)^a)(\phi_*(e^\nu)_b)$. 从而 $C(\phi_* T)=(\phi_* T^\mu{}_\nu)(\phi_*(e_\mu)^a)(\phi_*(e^\nu)_a)$. 将 $(e_\mu)^a$. $(e^\nu)_a$ 取为坐标基矢. 则 $[\phi_*(e_\mu)^a][\phi_*(e^\nu)_a]=(\frac{\partial}{\partial y^\mu})^a(dy^\nu)_a=\delta^\nu{}_\mu$.

从而有 $C(\phi_* T)=(\phi_* T^\mu{}_\nu)\delta^\nu{}_\mu=(\phi_* T^\mu{}_\nu\delta^\nu{}_\mu)=\phi_*(T^\mu{}_\mu)=\phi_*(CT)$.

(标量场. 当以坐标函数看待).

Day 27.

設M上有一局部光滑矢量场 v^a，它给出一个单参群 [$\phi(\cdot,p)$ 的轨道是矢量场从p点开始的积分曲线]. $\{\phi_t \mid t\in\mathbb{R}\}$. $\phi_t: M\to M$. 它是 $\phi: M\to N$ 的特例.

假设我们有这一个 Tensor Field $T^a{}_b$ 　 $\phi^*: \mathcal{T}_N(k,l)\longrightarrow \mathcal{T}_M(k,l)$. 　 $\phi^* T^a{}_b$ 为M上的另一个 Tensor Field. 我们将它与 $T^a{}_b$ 作差.

Def 1. Lie Derivative.

$$\mathcal{L}_v T^a{}_b = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\phi_t^* T^a{}_b - T^a{}_b\right)$$ 称为 $T^a{}_b$ 沿 v 的李导数. 　它是线性映射. 且 $\mathcal{L}_v$ 与缩并可交换顺序.

我们从最简单的情形看李导数如何计算

$$\mathcal{L}_v f|_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\phi_t^* f - f)|_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(f(\phi_t(p)) - f(p)\right)$$ 　＊注意：$\phi(0,p)$ 与 $\phi(t,p)$ 在从p出发的积分曲线C上，分别为C(0) 和C(t).

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(C(t)) - f(C(0))] = \frac{d}{dt}(f\circ C)|_{t=0} = v(f).\ (\text{切矢的定义}).$$

由于求Lie导时总需要 vector field. 我们借此选一个坐标系. 例如在n=2时将 x^1 选作沿 v^a 的积分曲线 $v^a = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^a$. 而 x^2 是与 x^1 横截的曲线. 该系称为 v^a 的适配坐标系 adapted.

Theorem 1. $T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}$ 沿 v^a 的 lie导数在适配坐标系中分量: $(\mathcal{L}_v T)^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l} = \dfrac{\partial T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}}{\partial x^1}$

证明：以 n=2. k=l=1 为例：

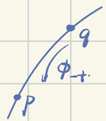
$$(\mathcal{L}_v T)^\mu{}_\nu = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[(\phi_t^* T)^\mu{}_\nu|_p - T^\mu{}_\nu|_p\right] \quad \forall p\in M. \qquad \text{而 } \phi_t^* = (\phi_t^{-1})_* = (\phi_{-t})_*$$

从而：$(\phi_t^* T)^\mu{}_\nu|_p = (\phi_{-t*} T)^\mu{}_\nu|_p$ 　 设 $\phi_t(p) = q$. 而 $\phi_{-t}(q) = p$. "老点"为q. 而"新点"为p. 将"老系"{x^μ}就取为{x^μ}.(适配坐标). 而新系为{x'^μ}.

(用之前结论). $= T'^\mu{}_\nu|_q$ 新系 老新点 老点

$$\Rightarrow x'^\mu(q) = x^\mu(\phi_{-t}(q)) = x^\mu(p).$$

$$= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\cdot\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\, T^\rho{}_\sigma|_q.$$



现在应求 $x'^\mu(x)$. $x^\mu(x)$. 我们在p附近找新老坐标之间的关系. 以便求偏导.

根据适配坐标系的定义. 有: $x'^1(q) = x^1(p) = x^1(q) - t$ 　(利用p. q在同一 x^1 坐标线上).

$x'^2(q) = x^2(p) = x^2(q)$.

从而. 原式 $= \dfrac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\cdot\dfrac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\cdot T^\rho{}_\sigma = T^\mu{}_\nu|_q$.

$$\Rightarrow (\mathcal{L}_v T)^\mu{}_\nu = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(T^\mu{}_\nu|_q - T^\mu{}_\nu|_p\right) = \frac{\partial T^{\mu\cdots}{}_{\nu\cdots}}{\partial x^1}$$ 　＊本式也是张量分量但有坐标依赖. 因此还不能写成张量等式.

Theorem 2. 矢量场的李导数 $\mathcal{L}_v u^a = [v,u]^a = v^b\nabla_b u^a - u^b\nabla_b v^a$.

李在右任一坐标系下研究分量.

$$[v,u]^\mu = (dx^\mu)_a [v,u]^a$$

$$= (dx^\mu)_a [v^b \partial_b u^a - u^b \underbrace{\partial_b v^a}_{=0}].$$

$$= v^b \partial_b((dx^\mu)_a u^a) = v^b \partial_b (u^\mu). = v(u^\mu). = \frac{\partial u^\mu}{\partial x^1} = (\mathcal{L}_v u)^\mu.$$

左右两侧都是张量 ⇒ 可以推广到任意系上.

Theorem 3、 对偶矢量的李导数. $\mathcal{L}_v w_a = v^b D_b w_a + w_b D_a v^b.$

Theorem 4. 任意张量的李导数. $\mathcal{L}_v T^{a\cdots}{}_{b\cdots} =$