Day 23.

上面，我们给出了 Riemann Curvature 的定义. 我们来看一些基本的例子.

Example 1. $(\mathbb{R}^n, \delta_{ab})$. 此时与度规适配的导数算符恰为 ∂_a.

从而可以计算， $R_{abc}{}^{d} w_d = (\partial_a \partial_b - \partial_b \partial_a) w_c = 0$ (利用对坐标的偏导可交换).

Example 2. $(\mathbb{R}^n, \eta_{ab})$. 此时与度规适配的导数算符仍为 ∂_a，从而上面的式子依然成立.

我们将这样黎曼曲率张量为0的空间称为平直空间 (flat space). 由于闵氏、欧氏空间都是平直空间，我们将闵氏空间称为"伪欧氏"空间

Theorem 1. $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) T^{c_1 \cdots c_k}{}_{d_1 \cdots d_l} = -\sum_{i=1}^{k} R_{abe}{}^{c_i} T^{c_1 \cdots e \cdots c_k}{}_{d_1 \cdots d_l} + \sum_{j=1}^{l} R_{abd_j}{}^{e} T^{c_1 \cdots c_k}{}_{d_1 \cdots e \cdots d_l}$.

Theorem 2. Riemann Curvature 的性质.

1). $R_{abc}{}^{d} = -R_{bac}{}^{d}$ (对第1个、第2个位置的反对称性).

2). $R_{[abc]}{}^{d} = 0$. (cyclic / 循环恒等式).

3). $\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^{e} = 0$ (Bianchi / 比安基恒等式)

4). $R_{abcd} = -R_{adbc}$ (对后两个位置的反对称性).

5). $R_{abcd} = R_{cdab}$ (对"前后两组"的对称性).

现在我们证明 2) ~ 4).

2). 将它作用在一个对偶矢. (最简单的情形).

$\because R_{abc}{}^{d} w_d = (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) w_c$

$\therefore R_{[abc]}{}^{d} w_d = \nabla_{[a} \nabla_b w_{c]} - \nabla_{[b} \nabla_a w_{c]} = 2 \nabla_{[a} \nabla_b w_{c]}$ 因此，只需证 $\nabla_{[a} \nabla_b w_{c]} = 0$. 往下证，需要借一个坐标系.

$$\nabla_a (\nabla_b w_c) = \partial_a (\nabla_b w_c) - \Gamma^{d}{}_{ab} \nabla_d w_c - \Gamma^{d}{}_{ac} \nabla_b w_d$$

$$= \partial_a (\partial_b w_c - \Gamma^{e}{}_{bc} w_e) - \Gamma^{d}{}_{ab} \nabla_d w_c - \Gamma^{d}{}_{ac} \nabla_b w_d$$

$$= (\partial_a \partial_b w_c - \Gamma^{e}{}_{bc} \partial_a w_e - w_e \partial_a \Gamma^{e}{}_{bc}) - \Gamma^{d}{}_{ab} \nabla_d w_c - \Gamma^{d}{}_{ac} \nabla_b w_d$$

(加全反称) $= \partial_{[a} \partial_b w_{c]} - \Gamma^{e}{}_{[bc} \partial_{a]} w_e - w_e \partial_{[a} \Gamma^{e}{}_{bc]} - \Gamma^{d}{}_{[ab} \nabla_{|d|} w_{c]} - \Gamma^{d}{}_{[ac} \nabla_{b]} w_d$

由于 $\partial_a \partial_b = \partial_{(a} \partial_{b)}$. 而 $\Gamma^{e}{}_{bc} = \Gamma^{e}{}_{(bc)}$. 因此利用这两个对称性，我们发现上式每项都为0.

剩余的证明将在补充材料中写出

由于Riemann Tensor比较复杂，一种可行的处理方式是将其分成 Trace part 和 Trace free part.

我们之前说过如何缩并 $T^a{}_b$: $T^a{}_a = T(e^{\mu *}, e_\mu) = T^\mu{}_\mu$

而对于 T_{ab} 则应先用度规升指标.. $T^a{}_b = g^{ac}T_{cb}$. 从而 $T^a{}_a = g^{ac}T_{ca} = g^{ac}T_{ac}$. 我们将其定义为 (0,2) Tensor的Trace.

具体地，我们考虑Riemann Tensor的Trace. 作为一个(0,4) Tensor，类似地，我们可以定义6个trace: $g^{ab}R_{abcd}$ $g^{ac}R_{abcd}$ g^{ad}.. g^{bc}.. g^{bd}.. g^{cd}. 由于( )和[ ]缩并为0 $\Rightarrow$ 第1个,6个为0.

又由于 $g^{bd}R_{abcd} = g^{bd}R_{badc} \overset{\text{相同}}{\longleftrightarrow} g^{ac}R_{abcd}$. 从而第2,5个实际上是一个Tensor. 第3,4个也是一样的. 且 3,4 与 2,5 只差一个负号. 从而以上六个迹中只有一个独立分量.

Day 24.

(复习一下. Riemann Tensor 有对前两指标的反称、后两个的反称、前后两组交换对称、循环不等式和比安基恒等式).

下面考虑 Riemann 降指标后的 R_{abcd} 与度规张量 g^{ab} 缩并后自行不变("迹") 六个迹中只有一个独立 利用这些性质可看出. $g^{ac}R_{abcd}$ 与 $g^{bd}R_{abcd}$ 实质上一样. 只不过可直接相等.
所以我们可以将独立的这一个称为 Ricci Tensor. 例如可取 $g^{bd}R_{abcd}$ (注:它可以看作先升指标再缩并, 先升: $g^{ed}R_{abcd}=R_{abc}{}^{e}$, 再令 e, b 缩并 $\Rightarrow g^{bd}=R_{abc}{}^{b}$).

Def 1. 将 Riemann Tensor 缩并得到的结果称为 Ricci Tensor. : $R_{ac}=R_{abc}{}^{b}$.

* 注: Ricci Tensor 的来源可有两个解释. a). 通过 g^{ab} 与 R_{abcd} 缩并的六个迹中独立的那个来定义. 2). 直接缩并 Riemann Tensor. (在没有度规时, 也可以谈 Ricci Tensor).

Def 2. Ricci Tensor 与度规缩并后的 Trace. 称为标量曲率. $R=g^{ac}R_{ac}$.

除以上两部分之外还应有 trace loss 的部分.

Def 3. Weyl Tensor.

$$C_{abcd}=R_{abcd}-\frac{2}{n-2}\left(g_{a[c}\underline{\underline{R_{d]b}}}-g_{b[c}\underline{\underline{R_{d]a}}}\right)+\frac{2}{(n-1)(n-2)}\underline{\underline{R}}\,g_{a[c}g_{d]b}$$

Theorem 1. Weyl Tensor 的性质:

1). $C_{abcd}=-C_{bacd}=-C_{abdc}=C_{cdab}$, $C_{[abc]d}=0$.

2). C_{abcd} 与 $g^{(\cdot\cdot)}$ 缩并所得的各类 Trace 均为 0.

Def 4. Einstein Tensor. $G_{ab}=R_{ab}-\frac{1}{2}Rg_{ab}$.

Theorem 2. 性质: $\nabla^{a}G_{ab}=0$.

另外. 我们有一个计算的问题: 如何从度规计算 Riemann Tensor. (度规 → 与之适配的联络 → Riemann Tensor). 为了方便计算 Tensor field, 我们选一个 basis field. 再写出 Tensor 的分量.

一种最简单的基底场是 $\{(\frac{\partial}{\partial x^\mu})^a\}$ 和 $\{(dx^\mu)_a\}$. (坐标基底). 还有一类非坐标基底, 记作 $\{(e_\mu)^a\}$ $\{(e^\mu)_a\}$. 坐标基底最重要的性质是其中两个对易. 例如. $[\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}]=0$

这里我们用坐标基底做.

$$R_{abc}{}^{d}w_d=(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)w_c=2\nabla_{[a}\nabla_{b]}w_c$$

$\Rightarrow$ 先算 $\nabla_a\nabla_b w_c=\partial_a(\nabla_b w_c)-\Gamma^{d}{}_{ab}\nabla_d w_c-\Gamma^{d}{}_{ac}\nabla_b w_d$.

$$=\partial_a(\partial_b w_c-\Gamma^{e}{}_{bc}w_e)-(\;)-(\;)$$

补上反称: $=\cancel{\partial_{[a}\partial_{b]}w_c}-\Gamma^{e}{}_{bc}\partial_a w_e-w_e\partial_{[a}\Gamma^{e}{}_{b]c}-\cancel{\Gamma^{d}{}_{[ab]}}\nabla_d w_c-\Gamma^{d}{}_{ac}(\partial_b w_d-\Gamma^{e}{}_{bd}w_e)$.

$\cancel{\Gamma^{e}{}_{c[b}\partial_{a]}w_e}$ ⟷ $-\cancel{\Gamma^{d}{}_{c[a}\partial_{b]}w_d}+\Gamma^{d}{}_{c[a}\Gamma^{e}{}_{b]d}w_e$

$$2\nabla_{[a}\nabla_{b]}w_c=-2w_e\partial_{[a}\Gamma^{e}{}_{b]c}+2\Gamma^{d}{}_{c[a}\Gamma^{e}{}_{b]d}w_e$$

为了方便地把作用对象丢掉，我们取一般指标

$$R_{abc}{}^{d}\omega_d = -2\omega_d\partial_{[a}\Gamma^{d}{}_{b]c} + 2\Gamma^{e}{}_{d[a}\Gamma^{d}{}_{b]e}\omega_d$$

从而可以将 ω_d 丢去。$R_{abc}{}^{d} = -(\partial_a\Gamma^{d}{}_{bc} - \partial_b\Gamma^{d}{}_{ac}) + \Gamma^{e}{}_{ca}\Gamma^{d}{}_{be} - \Gamma^{e}{}_{cb}\Gamma^{d}{}_{ae}$.

然后，我们要将坐标分量写下来。

$$R_{\mu\nu\sigma}{}^{\rho} = \partial_\nu\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} - \partial_\mu\Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma} + \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}$$

最后，我们谈谈内禀曲率和外在曲率的差别。$R_{abc}{}^{d}$ 代表了曲面的"弯曲"性质，它与直觉的"弯曲"有什么联系和区别？

在直觉上，我们谈及柱面、球面的弯曲时，我们是在三维中看二维的弯曲，这样可以叫外在(extrinsic)曲率。而黎曼曲率则是内禀(intrinsic)曲率，无需将流形嵌入高维空间中。

所谓"内禀的弯曲"说的实际上是以下三个等价性质：

1). 导数算符的非对易性。$(D_aD_b - D_bD_a)\omega_c = R_{abc}{}^{d}\omega_d$.

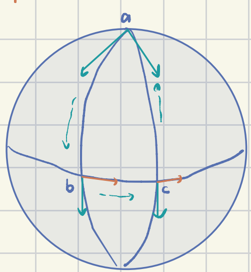
2). 矢量平行移动的曲线依赖性("和乐性")。—— 等价说法：平移一圈之后和原来不一样。

3). 存在初始平行而后来不平行的测地线。

* 内禀曲率和外曲率有区别。一个例子是圆柱

2) 的例子：

3).



沿 a → b → c → a 平移