Day 21.

在上一次中，我们说明了与广度规适配的导数算符。一个重要结论是：与欧氏空间度规 δ_{ab} 相适配的联络之 ∂_c 特别地，对于三维，∂_a 正是 $\vec{\nabla}$。

下面我们介绍所谓测地线

Def 2. (M, D_a) 上的曲线 $\gamma(t)$ 被称为测地线 (geodesic)，若其切矢 T^a 满足 $T^b D_b T^a = 0$。（曲线的切矢沿着曲线平行移动）

* 若定义 (M, g_{ab}) 上的测地线，实际上说的是 (M, D_c) 上的测地线，其中 $D_c g_{ab} = 0$。

称矢量场 v^a 沿 γ 平移，若 $\frac{dv^\mu}{dt} + \Gamma^\mu{}_{\gamma\sigma} T^\gamma v^\sigma = 0$。 现在，$v^\mu = T^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}$，从而测地线的参数式为：$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu{}_{\gamma\sigma} \frac{dx^\gamma}{dt}\frac{dx^\sigma}{dt} = 0$。在卡氏系中 $\Gamma^\mu{}_{\gamma\sigma} = 0 \Rightarrow$ 从而测地线是 $\mathbb{R}^3$ 中直线的推广。

Example. 设 S^2 是三维欧氏空间中的二维球面，由诱导得到球面度规（去表示嵌在3D欧氏空间中的球面，考虑球面上的元素，其线元长度 $ds^2 = (dx)^2+(dy)^2+(dz)^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$，而在 $r=R$ 上，$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$）

从而被 $(\mathbb{R}^3, \delta_{ab})$ 诱导出的球面度规为 $\begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\sin^2\theta \end{bmatrix}$（在坐标基底 $(\frac{\partial}{\partial\theta})^a$，$(\frac{\partial}{\partial\varphi})^a$ 下的展开）。可以证明，球面上的测地线均为大圆弧。

Theorem 1. 在 (M, D_a) 上，给定测地线 $T^b D_b T^a = 0$。将曲线重参化后，该式一般不满足，$\gamma'(t')$ 的切矢满足 $T'^b D_b T'^a = \underline{\alpha} T'^a$。增加了某种切向变化率

[proof] $T^a = (\frac{\partial}{\partial t})^a = (\frac{\partial}{\partial t'})^a \frac{dt'}{dt} = \frac{dt'}{dt} T'^a$.

从而 $0 = T^b D_b T^a = (\frac{dt'}{dt} T'^b) D_b (\frac{dt'}{dt} T'^a) = (\frac{dt'}{dt})^2 T'^b D_b T'^a + T'^a \frac{dt'}{dt} \underline{T'^b D_b(\frac{dt'}{dt})} = (\frac{d}{dt'})^b \partial_b(\frac{dt'}{dt}) = \frac{d}{dt'}(\frac{dt'}{dt})$

$\frac{dt'}{dt} \cdot \frac{d}{dt'}(\frac{dt'}{dt}) = \frac{d}{dt}(\frac{dt'}{dt}) = \frac{d^2t'}{dt^2}$

从而有 $\alpha = -(\frac{dt}{dt'})^2 \cdot \frac{d^2t'}{dt^2}$

Theorem 2. 设曲线 $\gamma(t)$ 的切矢满足 $T^b D_b T^a = \alpha \cdot T^a$（$\alpha$ 为 $\gamma(t)$ 上的函数），则存在 $t' = t'(t)$ 使 $\gamma'(t')$ 为测地线。

Def 2. 能使 $T^b D_b T^a = \alpha T^a$ 的曲线成为测地线的参数称为仿射参数 (affline parameter).

Theorem 3. 若 t 为仿射参数，则 t' 也为仿射参数的充要条件为 $t' = at + b$.

Theorem 4.（一点一矢定一测）。(M, D_a) 上一点 p 及 p 点矢量 v^a 决定唯一测地线 $\gamma(t)$，其中 $\gamma(0) = p$，$\gamma(t)$ 在 p 处切矢为 v^a.

[proof] 借助坐标系，则测地线定义等价于关于 $x^\mu(t)$ 的 n 个二阶 ODE，每个 ODE 给定两初始条件 $\exists$ 有唯一解.

补充材料.

补充A：矢量沿曲线的平移. 我们先考虑一下在欧氏空间中矢量平移的特例.

Def 1 欧氏空间中p点矢量 $\vec{\tilde{v}}$ 称为 q点矢量 $\vec{v}$ 平移至p点的结果. 若二者在同一笛卡尔坐标下分量相等.

Def 2. 欧氏空间中曲线 $C(t)$ 上矢量场 $\vec{v}$ 沿线导数定义为：$\frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[\vec{\tilde{v}}_p - \vec{v}_p]$. 其中 $\vec{\tilde{v}}_p$ 是将q点矢量平移到p所得结果. $\Delta t = t(q)-t(p)$ 为两点间参数差.

且可证. $\frac{d\vec{v}}{dt}$ 在抽象指标记号中是 $T^b\partial_b v^a$.

[proof] 二者都是矢量. 从而验证它们在笛卡尔坐标下分量相等.

$T^b\partial_b v^a$ 的第i分量 $=(dx^i)_a T^b\partial_b v^a = T^b\partial_b[(dx^i)_a v^a] = T^b\partial_b(v^i) = T^b(v^i) = \frac{dv^i(t)}{dt}$.

↑因为基底矢量不随坐标变化.

而 $\frac{d\vec{v}}{dt}\Big|_p$ 的第i分量 $= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(\tilde{v}^i|_p - v^i|_p) \overset{\text{Def 1}}{=} \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(v^i|_q - v^i|_p) = \frac{dv^i}{dt}\Big|_p$. 从而在欧氏空间有：$\frac{d\vec{v}}{dt} = T^b\partial_b v^a$

从而在欧氏空间中我们有：沿曲线 $\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=0 \iff \vec{v}$ 沿曲线平移. 在推广到任意流形上时. 我们有：

Def 3. 设 v^a 是流形 (M,∇_a) 上的矢量场. T^b 是 $C(t)$ 的切矢. 而q点 $C(t)$ 上的邻点. 从而有：$T^b\nabla_b v^a|_p = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(\tilde{v}^a|_p - v^a|_p)$. 其中 $\Delta t = t(q)-t(p)$. $\tilde{v}^a|_p$ 是 $v^a|_q$ 平移至p点的结果.

[proof] 不难验证以上命题有如下等价命题：设 $\psi_{s,t}$ 是 $V_{C(s)}$ 到 $V_{C(t)}$ 的平移映射. 从而：$T^b\nabla_b v^a = \frac{d}{ds}[\psi_{s,t}v(s)]^a\big|_{s=t}$. 不难证明 $\psi_{s,t}: V_{C(s)}\to V_{C(t)}$ 是同构.

设 $\tilde{v}^a$ 是由 $v^a(s)$ 决定的沿 $C(t)$ 的矢量场. 换言之 $\tilde{v}^a(t) = [\psi_{s,t}v(s)]^a$. $T^b\nabla_b\tilde{v}^a = 0$. 将其写成分量式：$\tilde{v}^\mu(t) = (\psi_{s,t})^\mu{}_\nu v^\nu(s)$. $\frac{d\tilde{v}^\mu(t)}{dt} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}T^\sigma\tilde{v}^\nu = 0$.

代入得到：$\frac{d}{dt}[(\psi_{s,t})^\mu{}_\nu v^\nu(s)] + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}T^\sigma(\psi_{s,t})^\nu{}_\rho v^\rho(s) = 0$. 取 $t=s$. 则 $\psi_{s,s}$ 是恒等映射. 从而 $\frac{d}{dt}[(\psi_{s,s})^\mu{}_\nu v^\nu(s)] + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}T^\sigma v^\nu(s) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}[(\psi_{s,t})^\mu{}_\nu]\big|_{t=s} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}T^\sigma\big|_{t=s} = 0$.

另一方面. $\psi_{t,s}$ 是 $\psi_{s,t}$ 的逆映射. 换言之 $(\psi_{s,t})^\mu{}_\rho(\psi_{t,s})^\rho{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ 从而 $\frac{d[(\psi_{s,t})^\mu{}_\rho(\psi_{t,s})^\rho{}_\nu]}{dt}\Big|_{t=s} = 0 = \frac{d[(\psi_{s,t})^\mu{}_\nu]}{dt}\Big|_{t=s} + \frac{d[(\psi_{t,s})^\mu{}_\nu]}{ds}\Big|_{t=s} = 0$

从而回到最初要证明的问题，我们还是拿分量证：

$$\frac{d}{ds}[\psi_{s,t}v(s)]^\mu\Big|_{s=t} = \frac{d}{ds}[(\psi_{s,t})^\mu{}_\nu v^\nu(s)]\Big|_{s=t}$$

$$= \frac{d}{ds}[(\psi_{s,t})^\mu{}_\nu]\Big|_{s=t}v^\nu(t) + (\psi_{s,t})^\mu{}_\nu\big|_{s=t}\frac{dv^\nu(s)}{ds}\Big|_{s=t}$$

$$= -\frac{d}{ds}[(\psi_{s,t})^\mu{}_\nu]\Big|_{s=t}v^\nu(t) + \delta^\mu{}_\nu\frac{dv^\nu(s)}{ds}\Big|_{s=t}$$

$$= (\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}T^\sigma)\big|_t v^\nu(t) + \frac{dv^\mu(s)}{ds}\Big|_{s=t}$$

$$= (\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}T^\sigma v^\nu)\big|_t + \frac{dv^\mu(s)}{ds}\Big|_{s=t} = (T^b\nabla_b v^a)^\mu\big|_t.$$

一句话总结：平行移动定义中的 $T^b\nabla_b v^a$ 是求矢量场沿线的导数. 平移的矢量场沿线的导数为0.

[补充B] 测地线的定义与"短程线"之间的关联

证明：变分法. 设该曲线 $C(t)$. $x^\mu(t)$ 是它在某系上的参数式. $p=C(t_1)$. $q=C(t_2)$. 根据前面. 线长可以写成.

$l=\int_{t_1}^{t_2}(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt})^{1/2}dt$ 这里设 $C(t)$ 是类空曲线. 设有一个临近无限小类空曲线 $C'(t)$. 且它满足 $x^\mu(t_1)=x'^\mu(t_1)$. $x^\mu(t_2)=x'^\mu(t_2)$. 变分 $\delta x^\mu(t) = x'^\mu(t)-x^\mu(t)$. 无限小

从而 $\delta g_{\mu\nu}\big|_{x^\sigma(t)} = g_{\mu\nu}(x^\sigma(t)+\delta x^\sigma(t)) - g_{\mu\nu}(x^\sigma(t)) = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\delta x^\sigma(t)$

$$\delta\left(\frac{dx^\mu}{dt}\right) = \frac{d(x^\mu(t)+\delta x^\mu(t))}{dt} - \frac{dx^\mu(t)}{dt} = \frac{d(\delta x^\mu(t))}{dt}$$

在分别计算了这两个变分后，我们可以计算线长的变分。

$$l+\delta l = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\left(g_{\mu\nu}(x_\sigma(t)) + \frac{\partial g_{\mu\nu}(x_\sigma(t))}{\partial x^\sigma}\cdot\delta x^\sigma(t)\right)\cdot\left(\frac{dx^\mu}{dt}+\frac{d(\delta x^\mu(t))}{dt}\right)\left(\frac{dx^\nu}{dt}+\frac{d(\delta x^\nu(t))}{dt}\right)\right\}^{1/2} dt$$

$$\Rightarrow \delta l = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu(t)}{dt}\cdot\frac{dx^\nu(t)}{dt}\right)^{1/2}\left[g_{\mu\nu}\left(\frac{dx^\mu}{dt}\right)\frac{d(\delta x^\nu)}{dt} + g_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{dt}\cdot\frac{d(\delta x^\mu)}{dt} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\cdot(\delta x^\sigma)\frac{dx^\mu}{dt}\cdot\frac{dx^\nu}{dt}\right]dt$$

由于线长与曲线参数化无关，不妨选择一个最简单的参数——所谓线长参数，它使得 $g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu(t)}{dt}\cdot\frac{dx^\nu(t)}{dt} = 1$

从而我们有：

$$\delta l = \int_{t_1}^{t_2}\left[g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{d(\delta x^\nu)}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}(\delta x^\sigma)\cdot\frac{dx^\mu}{dt}\cdot\frac{dx^\nu}{dt}\right]dt$$

全微分直接积出来，然而 δx^ν 在起止点为0。

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{d}{dt}\underline{\left(g_{\mu\nu}\cdot\frac{dx^\mu}{dt}\cdot\delta x^\nu\right)} - \frac{d}{dt}\left(g_{\mu\nu}\cdot\frac{dx^\mu}{dt}\right)\cdot\delta x^\nu + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}(\delta x^\sigma)\cdot\frac{dx^\mu}{dt}\cdot\frac{dx^\nu}{dt}\right]dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left[-\frac{d}{dt}\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\right)\cdot\delta x^\nu + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}(\delta x^\sigma)\cdot\frac{dx^\mu}{dt}\cdot\frac{dx^\nu}{dt}\right]dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left[-\frac{d}{dt}\left(g_{\mu\sigma}\cdot\frac{dx^\mu}{dt}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\frac{dx^\mu}{dt}\cdot\frac{dx^\nu}{dt}\right]\cdot(\delta x^\sigma)\cdot dt$$

由于 δx^σ 的任意性，我们有：

$$-\frac{dg_{\mu\sigma}}{dt}\cdot\frac{dx^\mu}{dt} - g_{\mu\sigma}\cdot\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\cdot\frac{dx^\mu}{dt}\cdot\frac{dx^\nu}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}\cdot\frac{dx^\nu}{dt}\cdot\frac{dx^\mu}{dt} - g_{\mu\sigma}\cdot\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\cdot\frac{dx^\mu}{dt}\cdot\frac{dx^\nu}{dt} = 0$$

上式两侧同乘 $g^{\rho\sigma}$，则有：

(为了凑一个克氏符形式)

$$0 = -\frac{d^2x^\rho}{dt^2} - g^{\rho\sigma}\left(g_{\mu\sigma,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\sigma}\right)\cdot\frac{dx^\mu}{dt}\cdot\frac{dx^\nu}{dt}$$

$$= -\frac{d^2x^\rho}{dt^2} - \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\left(g_{\sigma\mu,\nu} + \underline{g_{\nu\sigma,\mu}} - g_{\mu\nu,\sigma}\right)\frac{dx^\mu}{dt}\cdot\frac{dx^\nu}{dt}$$

$$= -\frac{d^2x^\rho}{dt^2} - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\cdot\frac{dx^\mu}{dt}\cdot\frac{dx^\nu}{dt}$$

这里的拆：$g_{\mu\sigma,\nu} = g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\mu,\nu}$ (对称性)

$\downarrow$

$g_{\sigma\nu,\mu}$ (哑指标，交换 μ、ν 不改变结果)

$\downarrow$

$g_{\nu\sigma,\mu}$ (对称性)

从而我们证明了文中测地线的定义与“短程线”的定义等效。

Day 22.

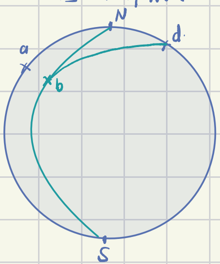
我们知道，定义一条曲线类时/类光/类空是由 $g_{ab}T^aT^b$ 与0的关系定义的。那么，在一条测地线上，这个量是否会变号？

我们计算这个量沿线的导数：$T^c\nabla_c(g_{ab}T^aT^b) = T^c(\nabla_c g_{ab})T^aT^b + T^c(\nabla_c T^a)T^b g_{ab} + T^c(\nabla_c T^b)T^a g_{ab} = 0$ 换言之，测地线切矢的模方 $g_{ab}T^aT^b$ 是常数。

换言之，测地线只有类时、类光和类空的，不存在"不伦不类"的测地线。由于我们已有"两点之间直线最短"的性质，我们自然想问，是否有"两点之间，测地线最短"？

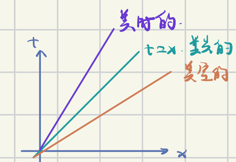
Theorem 1. 设 g_{ab} 是流形 M 上的洛伦兹度规场，$p,q\in M$。则 p,q 间的光滑类时/类空曲线为测地线当且仅当其线长取极值。

这里的"极值"使用的是泛函极值的定义。我们举例子说明测地线不一定可以保证线长度最短。这个例子是在正定度规下进行的。



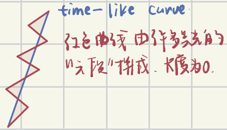
例如，SaNd 是 S→d 的测地线。如图我们给出另条与SaN很接近的曲线，并在上面取一点b使得 Sa=Sb。通过使用球大圆连接bd，我们可以构造与测地线临近的曲线 Sbd。从而有 $l_{SaNd}=l_{SbNd}>l_{Sbd}$。从而 SaNd 并非是连接 ad 两点的最短曲线。

这里，S和N互为一对"共轭点"。换言之，测地线的长度取最小值的必要条件是测地线上没有共轭点对。（直观来看，共轭点对是指两点间可找到两条无穷近测地线）



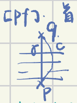
下面我们看洛伦兹度规的情形。作为例子，取二维闵氏时空。$ds^2=\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -(dx^0)^2+(dx^1)^2 = -(dt)^2+(dx)^2$，这就是狭相中所谓"无间隔"。

若可以找到一条类时曲线将 p.q 两点连接，则称 p.q 两点是有类时联系的。可以显然发现，对于 p.q 点间的类时线 c，总可以找到临近的比它更短的曲线。



实际上我们可以证明：对于闵氏时空，两个有类时联系的点间的测地线必为最长类时曲线。

Cpf) 首先采取洛伦兹变换将 pq 转至t轴方向。取一条临近曲线c，以水平线分割测地线 γ 和类时曲线c。



从而容易证明测地线 γ 已是 p.q 两点间的最长类时线。

总而言之，在任何度规下，最长/最短 ⇒ 极值 ⇒ 测地，而测地不可推出最长/最短。

下面我们介绍所谓黎曼曲率张量。我们将 $(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)$ 称为导数算符的对易子。众所周知，$(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)f=0$。但是作用到一般张量场上的时候，这种对易性不一定成立。

Theorem 2. 设 ω_c,ω_c' 都是 M 上的对偶矢量，且有 $\omega_c|_p=\omega_c'|_p$，则有：$[(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)\omega_c']_p = [(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)\omega_c]_p$。

从而 $(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)$ 的值只与张量场在p点的值有关，它可以使得 (0,1)型 → (0,3)型。从而它可以看作 p 点的 (1,3)型 Tensor。

Def 2 导数算符的黎曼曲率张量场 (Riemann Curvature Tensor) 定义为：$(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)\omega_c = R_{abc}{}^d\omega_d$。

补充材料.

用测地线可定义 (M, g_{ab}) 上的指数映射和 Riemann 法坐标.

指数映射是从 p 点切空间 $V_p \to M$ 的映射. 取 $v^a \in V_p$. 定义指数映射 $\exp(v^a) = \gamma(1)$. 其中 $\gamma(t)$ 是由 (p, v^a) 决定的测地线.

$\exp(\cdot)$ 可以是从 V_p 的子集到 M 的映射. 例如将 $\gamma(1)$ 挖去,则 v^a 无像. 此时映射 $V_p \to M$ 不到上. 若两条测地线恰巧相交,则不一一.

但可以对其定义域.值域做限制使之一一到上.

Theorem 1. $\forall p \in M$, 存在 V_p (看作 n 维流形) 中存在含有零元的开子集 $\hat{V}_p$ 与 M 中存在含 p 的开子集 N. 使 $\exp_p: \hat{V}_p \to N$ 为微分同胚.

利用指数映射作为同胚的桥梁, 我们可定义所谓 Riemann 法坐标.

Def 1. $p \in M$ 的邻域 N 称为 p 点的法邻域, 若 V_p 存在开子集 $\hat{V}_p$ 使 $\exp: \hat{V}_p \to N$ 微分同胚.

这可以使我们在 p 的邻域 N 中定义坐标: 任取 V_p 的一套基底 $\{(e_\mu)^a\}$. 将 $q \in N$ 在 $\exp_p$ 下的逆像 (也即 V_p 中的向量). $v^a = \exp^{-1}(q) \in \hat{V}_p$

在基底 $\{(e_\mu)^a\}$ 下的分量定义为 q 点的坐标. 这样,我们定义了一个 Riemannian Normal Coordinate. 它的坐标域为 N.

Theorem 2. 设 (N, ψ) 是 p 点的黎曼法坐标系. 则 N 中过 p 的任一测地线 $\gamma(t)$, 在 ψ 映射下的像 $\psi(\gamma(t))$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中过原点的直线.

(直观:初始速度越大. 在 t=1 的时间内走得越远).

由于 p 点是测地线的出发点. 故对于测地线 $\gamma(t)$, 有 $p = \gamma(0)$.

设 v_1^a 为测地线在 p 处的切矢: $v_1^a = (\frac{\partial}{\partial t})^a|_p$. q_1 是终点 $q_1 = \gamma(1)$. 则由指数映射的定义. $q_1 = \exp_p(v_1^a)$.

在测地线上再选一点 q. 使 $q = \gamma(t_q)$. 将 $\gamma(t)$ 做重参化. 令 $\gamma'(t') = \gamma(t)$, $t' = \alpha^{-1} t$. 选 α 使 $\gamma'(1) = q$. 由 $\exp(\cdot)$ 的定义有: $\exp(v^a) = q$.

(核心想法: $\exp(\cdot)$ 定义的时候只能找到 $\gamma(1)$ 的原像. 但我们可以通过重参数化将任一点参数改为 1. 从而对任一点 $\gamma(1)$ 找原像. 而 $\exp(\cdot)$ 是同一个).

找到 $\gamma'(1)$ 的原像: $v^a = (\frac{\partial}{\partial t'})^a|_p = [(\frac{\partial}{\partial t})^a (\frac{dt}{dt'})]|_p = \alpha v_1^a$. $\Rightarrow x^\mu(q) = v^\mu = \alpha v_1^\mu$. 由于 $t' = 1 \Rightarrow \alpha = t_q$ (即 q 点原本的参数).

对于 $\forall q \in \gamma(t)$ 都可重复以上证明. 从而 $x^\mu(q) = v_1^\mu \cdot t_q$. 从而得证.

Theorem 3. (M, g_{ab}) 上. 与 g_{ab} 适配的联络 ∇_a 在 p 点的黎曼法坐标系中克氏符 $\Gamma^c{}_{ab}|_p = 0$. 换言之, 在黎曼法坐标系中. 联络 ∇_a 正交普通导数算符 ∂_a.

证明: 把测地线以 RN 坐标写下分量满足的 ODE: $\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\sigma}{dt} = 0$ 由于直线 $\Rightarrow \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\sigma}{dt} = 0$. 将以上式写在 p 点. 则 $\frac{dx^\nu}{dt} = T^\nu$. $\frac{dx^\sigma}{dt} = T^\sigma$.

为测地线在 p 点切矢分量. 由于 $\forall \nu, \sigma$. $\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}|_p T^\nu T^\sigma = 0 \Rightarrow \Gamma^c{}_{ab}|_p = 0$.

※ 实际上,以上证明可以推广到: 测地线中任一点, 而所有由 p 发出的测地线将扫过坐标域 N. ∃ 实际上以上证明对 N 中 $\forall p \in N$ 成立.
?