Day 19.

首先我们要说明：为什么我们将克氏符称为 Tensor，而别的书中称之。众所周知，任意两个导数算子 $\nabla_a - \tilde{\nabla}_a = C^c{}_{ab} = C^c{}_{ba}$.

若有一个坐标域 O，我们可以在 O 中定义导数算符 ∂_a，$\partial_a T^b{}_c = (dx^\mu)_a \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b (dx^\sigma)_c\, \partial_\mu T^\nu{}_\sigma$　我们记 $\Gamma^c{}_{ab} = \nabla_a - \partial_a$.

若取两个坐标系 $\{x_\mu\}$、$\{x_{\mu'}\}$，则可定义 ∂_a 和 ∂_a'。我们记 $\Gamma^c{}_{ab} = \nabla_a - \partial_a$，$\Gamma'^c{}_{ab} = \nabla_a - \partial_a'$ 作为一个张量可用任一坐标基展开。

	$\{x^\mu\}$	$\{x'^\mu\}$
$\Gamma^c{}_{ab}$	$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$	符合变换律 $\Gamma'^\sigma{}_{\mu\nu}$
$\Gamma'^c{}_{ab}$	$\Gamma'^\sigma{}_{\mu\nu}$	$\Gamma'^\sigma{}_{\mu\nu}$

不符合。

* 因此克氏符是一个坐标系依赖的张量。

e.g. 考虑 $\partial_a v^b = (dx^\mu)_a \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b \underbrace{\partial_\mu v^\nu}_{v^\nu{}_{,\mu}} \neq \partial_a' v^b$，它也是一个坐标系依赖的 Tensor.

$v^\nu{}_{,\mu} \rightarrow$ 有些教科书说这不构成张量的分量。

$\partial_a' v_b = (dx'^\mu)_a \left(\frac{\partial}{\partial x'^\nu}\right)^b \underbrace{\partial_\mu' v'^\nu}_{v'^\nu{}_{,\mu}}$

而 $\nabla_a v^b = (dx^\mu)_a \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b v^\nu{}_{;\mu} = (dx'^\mu)_a \left(\frac{\partial}{\partial x'^\nu}\right)^b v'^\nu{}_{;\mu}$　$v^\nu{}_{;\mu}$ 和 $v'^\nu{}_{;\mu}$ 当然满足张量分量变换律。有些书上将之称为 v^a 的协变导数。

Theorem 1. 容易证明协变/坐标导数的分量间的关系：$v^\nu{}_{;\mu} = v^\nu{}_{,\mu} + \Gamma^\nu{}_{\mu\sigma} v^\sigma$.　$\omega_{\nu;\mu} = \omega_{\nu,\mu} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\omega_\sigma$.

使用无挠导数算符可以写两个矢量场对易子的表达式。

Theorem 2. $[u,v]^a = u^b \nabla_b v^a - v^b \nabla_b u^a$　由于对易子的定义不依赖于流形上的任何附加结构，因此 ∇_b 是非唯一确定的而是任意的。

[proof]. $[u,v](f) = u(v(f)) - v(u(f)) = u^b \nabla_b (v^a \nabla_a f) - v^b \nabla_b (u^a \nabla_a f)$.

$= u^b (\nabla_b v^a) \nabla_a f + v^a u^b \nabla_b \nabla_a f - v^b (\nabla_b u^a) f - \underbrace{u^a v^b \nabla_b \nabla_a f}_{\text{换 } a.b} = u^b v^a \nabla_a \nabla_b f$

(无挠性) $= (u^b \nabla_b v^a - v^b \nabla_b u^a) \nabla_a f$.

另一方面 $[u,v](f) = [u,v]^a \nabla_a f \Rightarrow$ 得证.

下面进入一个重要概念：矢量沿曲线的平行移动.

Def 1. 在流形 M 上选定导数算符 ∇_a。设 v^a 是沿 $C(t)$ 的矢量场，称 v^a 沿 $C(t)$ 平行移动(parallel transported along $C(t)$)，若 $T^b \nabla_b v^a = 0$.　$T^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$ 为曲线的切矢.

现在，我们在曲线上一点 $C(t_0)$ 处指定 v^a，我们是否可以通过平移，得到沿 $C(t)$ 的矢量场？事实上，这样的场是存在唯一的。

Th2.

补充证明：我们证明其一也，另也同理。$\nabla_a \omega_b - \partial_a \omega_b = \Gamma^c{}_{ab}\omega_c$　在坐标基底下打开 $\Rightarrow$　$\omega_{\nu;\mu} (dx^\mu)_a (dx^\nu)_b - \omega_{\nu,\mu} (dx^\mu)_a (dx^\nu)_b = \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right)^c (dx^\mu)_a (dx^\nu)_b \underline{(dx^\alpha)_c}\, \omega_\alpha$

将"脚手架"移除，或两边同时作用在坐标基底上 $\rightarrow$.　$\Leftarrow$　$= \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} (dx^\mu)_a (dx^\nu)_b \cdot \omega_\sigma$

补充说明：导数算符作用在恒等映射。导数算符与缩并可换序等价于 $\underline{\nabla_a \delta^b{}_c} \Rightarrow$　因此，导算符作用在恒等映射得 0.

[proof] 这是入门看证。设 ∇_a 满足定义 (a)~(d)，则将其作用在任一矢量场上.

$\nabla_a v^b = \nabla_a (\delta^b{}_c v^c) = \nabla_a (C(\delta^b{}_c v^d)) = C\nabla_a (\delta^b{}_c v^d) = C(v^d \nabla_a \delta^b{}_c + \delta^b{}_c \nabla_a v^d) = v^c \nabla_a \delta^b{}_c + \delta^b{}_c \nabla_a v^c = v^c \nabla_a \delta^b{}_c + \nabla_a v^b \Rightarrow v^c \nabla_a \delta^b{}_c = 0$　$\forall v^c \Rightarrow \nabla_a \delta^b{}_c = 0$.

Day 20.

续：我们要证明：在给定曲线上取定 $C(t_0)$，在此点给出 v^a，我们可通过平移，生成 $C(t)$ 上的矢量场。

将平移的定义展开：$T^b D_b v^a = T^b(\partial_b v^a + \Gamma^a{}_{bc} v^c)$.

(用坐标基底展开).

$$= T^b \left[(dx^\gamma)_b \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \partial_\gamma v^\mu + \Gamma^a{}_{bc} v^c \right]$$

$$= T^\gamma \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \partial_\gamma v^\mu + \Gamma^a{}_{bc} T^b v^c$$

(抽象指标换具体).

$$= T^\gamma \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \partial_\gamma v^\mu + \Gamma^a{}_{\gamma\sigma} T^\gamma v^\sigma \xrightarrow{\text{展开}} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \Gamma^\mu{}_{\gamma\sigma} T^\gamma v^\sigma$$

$$= \left(T^\gamma \partial_\gamma v^\mu + \Gamma^\mu{}_{\gamma\sigma} T^\gamma v^\sigma \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a$$

而平行移动要求 $T^b D_b v^a = 0$.

$$\frac{dx^\gamma(t)}{dt}\frac{\partial v^\mu(x(t))}{\partial x^\gamma} = \frac{dv^\mu(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dv^\mu(t)}{dt} + \Gamma^\mu{}_{\gamma\sigma} T^\gamma v^\sigma = 0, \quad \text{for all } \mu = 1 \cdots n.$$

这是关于 n 个待求函数 $v^\mu(t)$ 的 n 个一阶 ODE，只需给定 $C(t_0)$ 处初始条件 $v^\mu(t_0)$，即有唯一解。

现在考虑 M 上两点 p, q 处切空间中的矢量 $v^a \in V_p$，$u^a \in V_q$，它们是无法比较的！但是我们可以从 p 到 q 连接一条曲线，协变导数 D_a 可在曲线上诱导一个"平移矢量场"，从而可以将 v^a 平移至 V_q 中与 u^a 进行比较。⚠ 将 $v^a \in V_p$ 平移至 V_q 的操作，一般是曲线依赖的。

换言之，协变导数算符建立了流形上任意两点的切空间之间的联系。因此，我们将 D_a 称为联络(connection)。

现在，我们希望流形上的联络与度规之间产生某种联系，或者说某种约束。作为最朴素的想法，我们希望与欧氏空间一样，两矢量沿某曲线被平移时，其内积不变。

标量的导数

$$\Rightarrow \underbrace{T^c}_{\text{沿曲线方向}} D_c(g_{ab} v^a u^b) = 0 \Rightarrow g_{ab} v^a \underbrace{T^c D_c u^b}_{\text{平移，得0}} + g_{ab} u^b \underbrace{T^c D_c v^a}_{\text{平移，得0}} + \underbrace{v^a u^b}_{v^a, u^b \text{是任意矢量场，} T^c \text{是任意切矢}} T^c D_c g_{ab} = 0 \Rightarrow D_c g_{ab} = 0.$$

Theorem 1. $D_a g_{bc} = 0$ 确定了唯一与度规适配的联络.

[proof]. 先任取 $\tilde{D}_a$. $D_a g_{bc} = \tilde{D}_a g_{bc} - C^d{}_{ab} g_{dc} - C^d{}_{ac} g_{bd} = \tilde{D}_a g_{bc} - C_{cab} - C_{bac} = 0$

$\Rightarrow C_{cab} + C_{bac} = \tilde{D}_a g_{bc}$. 通过轮换指标自然有：$C_{cba} + C_{abc} = \tilde{D}_b g_{ac}$　$C_{bca} + C_{acb} = \tilde{D}_c g_{ab}$

利用三个 $C\ldots$ 之间两两相等关系，立刻有：$C_{cab} = \frac{1}{2}(\tilde{D}_a g_{bc} + \tilde{D}_b g_{ac} - \tilde{D}_c g_{ab})$.

$C^c{}_{ab} = g^{cd} C_{dab} = \frac{1}{2} g^{cd}(\tilde{D}_a g_{bd} + \tilde{D}_b g_{ad} - \tilde{D}_d g_{ab})$.　(*).　(算出的"度规适配"的那个导数算符差别).

从而，给任意 $\tilde{D}_a$，得到目标的 D_a，存在性得证。若还有另一 D_a' 已满足，则 $D_a' g_{bd} = D_b' g_{ad} = D_d' g_{ab} = 0 \Rightarrow C^c{}_{ab} = 0$，从而 $D_a' = D_a$，于是唯一性也得证。

⚠ 给出一个 D_a，不一定可以找到 g_{bc} 与之适配。

现在，我们要计算克氏符：$\Gamma^c{}_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd}(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab})$ 的各个分量。

具体指标：

$$\Gamma^\sigma{}_{\mu\gamma} = \Gamma^c{}_{ab} (dx^\sigma)_c \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\right)^b = \frac{1}{2} g^{cd}(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}) (dx^\sigma)_c \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\right)^b$$

$$= \frac{1}{2} g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\gamma\rho} + \partial_\gamma g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\gamma}) = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho}(g_{\gamma\rho,\mu} + g_{\mu\rho,\gamma} - g_{\mu\gamma,\rho})$$

在四维时空中，$\Gamma^a{}_{bc}$ 有 40 个自由的分量。