Day 17.

在 $\mathbb{R}^3$ 中的矢量分析中，我们有导数算符 $D = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$. 作用在标量场上得矢量场 (gradient)，作用在矢量场上出标量场 (divergence).

*在我们通常讨论的情形下，由于存在欧氏度规 δ_{ab}，故欧氏空间矢量 v^a 与对偶矢量 $v_a = \delta_{ab}v^b$ 自然认同。因此我们不区分逆变、协变。而在一般流形上可能没有 metric，因而必须区分。

函数本来是 $(0,0)$ 型 Tensor，作用一下似乎变成了 $(1,0)$ Tensor。但是在讨论的时候，我们认为 $\mathbb{R}^3$ 的结果是一个 vector field 与 dual vector field 自然认同的结果。但实际上应为 $(0,1)$ Tensor.

因此我们对于导数算符做出如下推广：

Def 1. 以 $\mathscr{F}_M(k,l)$ 代表流形 M 上全体 C^∞ (k,l) 型 Tensor Field 集合，将映射 $D: \mathscr{F}_M(k,l) \to \mathscr{F}_M(k,l+1)$ 称作 M 上的无挠导数算符，若它满足以下条件：

* 我们常将其记作 D_a，但这只代表它作用在 Tensor 后的变化 $(k,l) \to (k,l+1)$，不代表它自己是 dual vector.

a). 线性性：$D_a(\alpha T^{\cdots}_{\cdots} + \beta S^{\cdots}_{\cdots}) = \alpha DT^{\cdots}_{\cdots} + \beta DS^{\cdots}_{\cdots}$

b). 莱布尼兹律：$D_a(T^{\cdots}_{\cdots} S^{\cdots}_{\cdots}) = T D_a S^{\cdots}_{\cdots} + S D_a T^{\cdots}_{\cdots}$

c). 导数算符和缩并可以换序。注：可以写为 $D \circ C = C \circ D$. 以后将使用如下的写法：$D_a(\underbrace{v^b w_b}_{\text{先缩并后求导}}) = \underbrace{v^b D_a w_b + w_b D_a v^b}_{\text{先求导，再缩并.}}$

d). $v(f) = v^a[D_a(f)]$ 这个可以认为是从 $(\mathbb{R}^3, \delta_{ab})$ 中开始来的。考虑其上的一个矢量场 $v^a = v^1(\frac{\partial}{\partial x})^a + v^2(\frac{\partial}{\partial y})^a + v^3(\frac{\partial}{\partial y})^a$. 将其作用在 f 上有 $v(f) = v^1(\frac{\partial f}{\partial x}) + \cdots = \vec{v} \cdot \underbrace{\vec{D}(f)}_{\text{这里是对偶矢量.}} = v^a(D_a f)$

矢量作用在标量场上 = 矢量作用在求导后所得的对偶矢量上.

e). 无挠 (torsion free) 性：$D_a D_b f = D_b D_a f$.

选读：导数算符的"局域性"。

导数算符的性质：设 $T_1, T_2 \in \mathscr{F}_M(k,l)$，在 $p \in M$ 的某邻域 N 内相等，即 $T_1|_N = T_2|_N$，则 $D_a T_1|_p = D_a T_2|_p$.

假若张量场 T 仅在 $p \in M$ 的邻域 U 上有定义，但按定义 D_a 只能作用在 M 上的张量场，可考虑将 T "延拓" 至 M 上。根据上面导数算符的性质，只需找 $\tilde{T} \in \mathscr{F}_M(k,l)$，且对于 p 的邻域 N $(N \subset U)$，使得 $\tilde{T}|_N = T|_N$。虽然合法的 $\tilde{T}$ 有无穷多个，但 $D_a \tilde{T}$ 的结果都相同。于是我们可用 $D_a \tilde{T}$ 为 $D_a T$ 下定义.

Day 18.

在任一流形M上，有很多符合要求的无挠导数算符. 根据前面的讨论：$v(f) = v^a \nabla_a f = (df)_a v^a$ 所以得到：$(df)_a = \nabla_a f$ (想起很早的梯度).

那么，两个无挠导数算符作用在f上没有区别：$\nabla_a f = \tilde{\nabla}_a f = (df)_a$. 它们的区别仅体现在对非(0,0)型张量作用上. 设我们有两个对偶矢 ω_b, ω_b'. 且 $\omega_b = \omega_b' = \mu_b$ (ω_b, ω_b'都是μ_b的延拓).

则 $\nabla_a \omega_b'|_p$ 与 $\nabla_a \omega_b|_p$ 一般不相同. $\tilde{\nabla}_a \omega_b'|_p$ 与 $\tilde{\nabla}_a \omega_b|_p$ 同样一般不相同.

Theorem 1.
但是，我们claim：$[(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\omega_b]|_p = [(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\omega_b']|_p$ 二导数算符的差作用在两个向量场上得到相同结果.

pf: 换言之：$[\nabla_a(\underbrace{\omega_b' - \omega_b}_{\Omega_b})]|_p = [\tilde{\nabla}_a(\underbrace{\omega_b' - \omega_b}_{\Omega_b})]|_p$ 两个导数算符作用在向量场的差上得相同结果. (换言之作用在一个对偶矢的0点处相同).

从而待证问题：$\nabla_a \Omega_b = \tilde{\nabla}_a \Omega_b$ 将Ω_b在对偶基下打开. $[\nabla_a \Omega_b]|_p = [\nabla_a(\Omega_\mu (dx^\mu)_b)]|_p = [\Omega_\mu \nabla_a (dx^\mu)_b]|_p + [(dx^\mu)_b \nabla_a(\Omega_\mu)]|_p$.

$\omega_b = \omega_b'|_p \Rightarrow \Omega_\mu|_p = 0$ $\qquad$ $d(\Omega_\mu)_a$ 与∇_a无关.

这样，给定 $\mu_a \in V_p^*$，可以自然地给出一个 (0,2) Tensor. (先将μ_a延拓到M上得对偶矢场ω_b. 由于$(\nabla_a - \tilde{\nabla}_a)\omega_b$不依赖于$\omega_b$，从而我们完成目标).

*这个映射只依赖于p点的值.

由于 $(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)$ 是 $\mathcal{T}_{V_p}(0,1) \longrightarrow \mathcal{T}_{V_p}(0,2)$. 显然，将一个(1,2)型作用在(0,1)型(对偶矢)上再缩并可以得到同样的效果. 因此，$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)$可视为p点的(1,2)型张量.

我们将它对对偶矢量的作用写为：$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\omega_b = C^c{}_{ab}\omega_c \Rightarrow \nabla_a \omega_b = \tilde{\nabla}_a \omega_b - C^c{}_{ab}\omega_c$ 一个重要性质是 $C^c{}_{ab} = C^c{}_{ba}$. 这依赖于无挠性.

Theorem 2. 同样，我们可以证明：两个无挠导数算符之差作用在一个矢量场上，也只依赖于该矢量场在p点的值. 我们有：$(\nabla_a v^b - \tilde{\nabla}_a v^b) = C^b{}_{ac} v^c \Rightarrow \nabla_a v^b = \tilde{\nabla}_a v^b + C^b{}_{ac} v^c$.

Theorem 3. 更一般地，∇_a与$\tilde{\nabla}_a$作用在(k,l)型张量场上的差值只与p点取值有关. 有(k+l)项. 具体地：

$$\nabla_a T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l} = \tilde{\nabla}_a T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l} + \sum_i C^{b_i}{}_{ad} T^{b_1\cdots d\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l} - \sum_j C^d{}_{ac_j} T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots d\cdots c_l}.$$

例如. $\nabla_a T^b{}_c = \tilde{\nabla}_a T^b{}_c + C^b{}_{ad} T^d{}_c - C^d{}_{ac} T^b{}_d$. ($C^c{}_{ab}$ 要和T的每个上下slot各缩并一次)

下面我们给一个例子：在流形M上取坐标域O. 在O上定义 $\mathcal{T}(k,l) \to \mathcal{T}(k,l+1)$ 的映射∂_a，以(1,1)型Tensor为例：$\partial_a T^b{}_c$, $T^b{}_c = T^\nu{}_\sigma \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b (dx^\sigma)_c$.

$\partial_a T^b{}_c = \left(\frac{\partial T^\nu{}_\sigma}{\partial x^\mu}\right)(dx^\mu)_a \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b (dx^\sigma)_c$. 从而对于这个例子，导数的坐标分量等于原张量的坐标分量对坐标(逐个)的偏导数. 可以验证：∂_a满足要求，是无挠导数算子.

Def 1. ∇_a是与坐标系无关的，而∂_a是与坐标系有关的. 我们将与坐标系无关的导数算符称为协变导数算符 (Covariant Derivative). 在上文中我们定义的∇_a与∂_a之间的差别，

使用 $C^c{}_{ab}$ * 这里记作 $\Gamma^c{}_{ab}$. 称为∇_a在该坐标系下的克氏符 (Christoffel Symbol).

补充证明：$C^c{}_{ab}$对于两个下指标的对称性. 由前面已知，无挠导数作用在标量场上得结果一样 ⇒ 记 $\omega_b = \nabla_b f = \tilde{\nabla}_b f$. 再作用一次，做出我们的差距

$$\nabla_a \omega_b = \tilde{\nabla}_a \omega_b - C^c{}_{ab}\omega_c \Rightarrow \begin{cases} \nabla_a \nabla_b f = \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b f - C^c{}_{ab}\nabla_c f \\ \nabla_b \nabla_a f = \tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_a f - C^c{}_{ba}\nabla_c f \end{cases}$$

由无挠性条件有：$C^c{}_{ab}\nabla_c f = C^c{}_{ba}\nabla_c f$.

令 $T^c{}_{ab} = C^c{}_{ab} - C^c{}_{ba}$ 则 $T^c{}_{ab}\nabla_c f = 0$.

将$T^c{}_{ab}$在任一坐标基底下打开，分量为 $T^\sigma{}_{\mu\nu} = T^c{}_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b \overset{=0}{(dx^\sigma)_c}$ 由于f = x^σ时 $T^c{}_{ab}\nabla_c f = T^c{}_{ab}(dx^\sigma)_c = 0$

⇒ $\forall \mu, \nu, \sigma$, $T^\sigma{}_{\mu\nu} = 0$ ⇒ $T^c{}_{ab} = 0$ 从而对称性得证.