Day 15

使用之前的张量符号有以下问题：1). 使用不带指标的字母则无法区分是否为张量、是$(\cdot,\cdot)$型张量. 2). 若用分量$T^{\mu\nu}{}_{\sigma}$, 则是基底依赖的！因此我们需要抽象指标记号.

抽象指标记号的规则：

1) (k,l) type tensor 用k个上标，l个下标. 矢量: v^a 对偶矢: ω_a. (2,1)型 Tensor: $T^{ab}{}_{c}$.

v^b, v^a 代表相同矢量. 注意"指标平衡", 例如 $a v^a + v^a = w^a$.

2). 重复上下抽象指标, 代表对这两个指标缩并. $T^a{}_a = T(e^{\mu *}, e_\mu) = T^\mu{}_\mu$. $T^{ab}{}_a = T(e^{\mu *}, \cdot, e_\mu)$.

3). 省略张量积符号. 设 $T \in \mathcal{T}_V(2,1)$, $S \in \mathcal{T}_V(1,1)$, 则 $T \otimes S$ 写成 $T^{ab}{}_c S^d{}_e$

$\omega \otimes \mu(v,u) = \omega(v)\cdot\mu(u) = \omega_a v^a \mu_b u^b \rightarrow$ 先张量积再缩并. 它也可以写成 $\omega_a \mu_b v^a u^b$. 作用顺序不变 (作用顺序由字母决定, 都是先张量积再缩并).

$= \mu_b \omega_a v^a u^b \longrightarrow \omega_a \mu_b = \mu_b \omega_a$. 而 $\omega_a \mu_b \neq \omega_b \mu_a$.

4). 希腊字母指标代表分量. 例如:

$$\begin{cases} T = T^{\mu\nu}{}_{\sigma}\, e_\mu \otimes e_\nu \otimes e^{\sigma *} \\ T^{ab}{}_{c} = T^{\mu\nu}{}_{\sigma}\, \underset{\text{第}\mu\text{个}}{(e_\mu)}{}^{a}\,(e_\nu)^b\,(e^\sigma)_c \end{cases}$$

→代表该矢量

$$T^{\mu\nu}{}_{\sigma} = T^{ab}{}_{c}\, \underbrace{(\overset{\text{第}\mu\text{个}}{e^\mu})_a}_{\text{作用 = 张量积+缩并}}\,(e^\nu)_b\,(e_\sigma)^c$$

类似地若 $T \in \mathcal{T}_V(0,2)$, 则T记作 T_{ab}. $T(\cdot, e_\mu)$ 记作 $T_{ab}(e_\mu)^b = T_{a\mu}$

5). 根据"张量面面观". $T^a{}_b: V \to V$ 将 $T^a{}_b$ 作用在v上为: $T^a{}_b v^b \in V$.

$T^a{}_b: V^* \to V^*$ 将 $T^a{}_b$ 作用在ω上为: $T^a{}_b \omega_a \in V^*$.

现在, 我们挑选 $\delta^a{}_b$ 代表 $V \to V$ 的恒等映射. 即 $\forall v^b$, $\delta^a{}_b v^b = v^a$. 而 v^b 和 v^a 代表同一个矢量! ☆注意: 这是$\delta^a{}_b$的定义!

可以证明它有其他性质: $\forall \omega_a \in V^*$, $\delta^a{}_b \omega_a = \omega_b$. 因此它也为 $V^* \to V^*$ 的恒等映射. 若它与其他张量先积后缩并, 例如 $\delta^a{}_b T_{ac} = T_{bc}$. $\delta^a{}_b T^{cb}{}_e = T^{ca}{}_e$

为 $\{(e_\mu)^a\}$, $\{(e^\nu)_a\}$ 下展开. $\delta^\mu{}_\nu = \delta^a{}_b (e_\nu)^b (e^\mu)_a = \begin{cases} +1, & \mu=\nu \\ 0, & \mu\neq\nu \end{cases}$ 以 $\delta^1{}_1$ 为例. $\delta^1{}_1 = \delta^a{}_b (e_1)^b (e^1)_a = (e_1)^a (e^1)_a = 1$.

6). 设V上有一度规 g, 则记为 g_{ab} 而已. g_{ab} 给出了 $V \to V^*$ 的同构. 将其作用在 v^b 上, 则得到 $g_{ab} v^b \in V^*$. 我们可自然地将 $g_{ab} v^b$ 与其原像 v^a 认同.

我们将这个与原像对应的对偶矢记为 $v_a = g_{ab} v^b$, v_a 和 v^b 作为像和原像可以代表相同物理对象.

Day 16.

我们继续讨论抽象指标记号: $v_a = g_{ab}v^b \in V^*$. 由于g是 $V \to V^*$ 的映射, 则其逆映射 $g^{-1}: V^* \to V$ 容易看出是(2,0)型. 我们将其记作 $g^{ab}: V^* \to V^*$.

我们自然可以将 ω_b 与其像 $g^{ab}\omega_b$ 认同, 或将记号 $\omega^a = g^{ab}\omega_b$ 与 ω_b 认同.

我们有 $v_a = g_{ab}v^b$ 不妨再将 g^{ab} 作用于它, 则 $v^c = g^{ca}(g_{ab}v^b) = (g^{ca}g_{ab})v^b$ 从而 $g^{ca}g_{ab} = \delta^c{}_b$ 是恒等映射.

在以上讨论中, 我们可看出 g_{ab} 有降指标的功能, 而其逆映射 g^{ab} 有升指标功能. 例如, $g_{ab}T^{cb}{}_e = T^c{}_{ae}$

* 所谓的用度规升降指标, 实际上是将度规与张量做"积并"运算, 从而得到一个新张量!

下面我们使用分量进行指标升降. 例如, $g^{ca}g_{ab} = \delta^c{}_b$ 对应 $g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = \delta^\mu{}_\sigma$ 证明: $g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = g^{ab}(e^\mu)_a(e^\nu)_b\, g_{cd}(e_\nu)^c(e_\sigma)^d$

我们有[结论] $(e^\nu)_b(e_\nu)^c = \delta_b{}^c$ (将其作用在基矢上可验证). 从而 $g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = g^{ab}(e^\mu)_a\, g_{bd}(e_\sigma)^d = \delta^a{}_d(e^\mu)_a(e_\sigma)^d = (e^\mu)_a(e_\sigma)^a = \delta^\mu{}_\sigma$ 从而度规张量排成的矩阵互逆.

这是张量积, 若有缩并就"作用"

这是缩并. "积并"="作用".

*: 特别地, 我们常使用 v^i v^j, v^k 代表矢量v的空间分量, 它们虽是拉丁字母, 但是是具体指标.

设若我们考虑坐标基矢. 我们可能会问 是否有 $g_{ab}(\frac{\partial}{\partial x^\mu})^b = (dx^\mu)_a$? 很遗憾, 这不对! 正确的是: $g_{ab}(\frac{\partial}{\partial x^\mu})^b = g_{\mu\nu}(dx^\nu)_a$ [易证]. 类似地, $g^{ab}(dx^\mu)_b = g^{\nu\mu}(\frac{\partial}{\partial x^\nu})^a$

然而若我们研究的n维欧氏空间 并取笛卡尔坐标系. 则有 $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. 其逆阵 $g^{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. 从而 $g_{ab}(\frac{\partial}{\partial x^\mu})^b = (dx^\mu)_a$. 另一个同理.

另一个特殊的是四维闵氏时空.

$$\begin{cases} \eta_{ab}(\frac{\partial}{\partial x^0})^a = -dx^0 \\ \eta_{ab}(\frac{\partial}{\partial x^i})^a = dx^i \end{cases} \qquad \begin{cases} \eta^{ab}(dx^0)_b = -(\frac{\partial}{\partial x^0})^a \\ \eta^{ab}(dx^i)_b = (\frac{\partial}{\partial x^i})^a \end{cases}$$

由于矢量和对偶矢量的分量在坐标变换时的行为不同. 故我们又将其称为 逆变(Contravariant)矢量和 协变(covariant)矢量. 上/下指标称为逆/协变指标.

对于一个(0,2)型Tensor, 若 $T(v,u) = T(u,v)$, 则我们说它是对称的. 由于 $T(u,v) = T_{ab}v^a u^b$. $T(v,u) = T_{ab}v^b u^a = T_{ba}v^a u^b$ 若 $T(v,u) = T(u,v) \Rightarrow T_{ab} = T_{ba}$.

* 换言之, 对于一个一般的Tensor. 写下 $T_{ab} = T_{bc}$ 是不行的(指标不平衡). 但你可以对对称张量这样写.

下面考虑 $T^a{}_b$ 和 $T_b{}^a$ 它们的区别仅在使用度规升降指标时出现. $g_{ca}T^a{}_b = T_{cb}$. $g_{ca}T_b{}^a = T_{bc}$. 因此, 只有在度规降(升)指标后 $T_{cb} = T_{bc}$, 才可以写 $T^a{}_b = T_b{}^a$.

* 若不使用度规升降指标, $T^a{}_b$ 和 $T_b{}^a$ 都可写成 T^a_b. 但在使用度规升降时会出现问题. 所以我们上下、前后都要区分. 虽然有 $\delta^a{}_b = \delta_b{}^a$. 故 $\delta^a{}_b$ 可不区分前后.

Def 2. (0,2)型张量的对称部分 $T_{(ab)}$ 和 反称部分 $T_{[ab]}$ 记作:

$$T_{(ab)} = \frac{1}{2}(T_{ab} + T_{ba}). \qquad T_{[ab]} = \frac{1}{2}(T_{ab} - T_{ba}).$$

✿ 对于一般的(0,l)型, $\delta_\pi = +1$ 时表示 π 为奇排列, $\delta_\pi = -1$ 时表示 π 是偶排列.

$$T_{(a_1 \cdots a_l)} = \frac{1}{l!}\sum_\pi T_{a_{\pi(1)} \cdots a_{\pi(l)}}. \qquad T_{[a_1 \cdots a_l]} = \frac{1}{l!}\sum_\pi \delta(\pi)\, T_{a_{\pi(1)} \cdots a_{\pi(l)}}.$$

被作用的矢量任意交换顺序, 结果不变. $T_{a_1 \cdots a_l} = T_{a_{\pi(1)} \cdots a_{\pi(l)}}$.

被作用的矢量在奇偶排列下, 结果为相反数. $T_{a_1 \cdots a_l} = \delta_\pi T_{a_{\pi(1)} \cdots a_{\pi(l)}}$.

一阶(0,l)型张量满足对称的证明: a). 由全对称张量及张量对称化的定义 $T_{abc} = T_{(abc)} = T_{(acb)} = T_{acb}$

b). 由全反称张量及张量反称化的定义. $T_{abc} = T_{[abc]} = -T_{[acb]} = -T_{acb}$.

下面给出一些有用的计算法则.

a). 缩并时, 括号有"传染性". e.g. $T_{[a,b,c]}S^{a,b,c} = T_{[a,b,c]}S^{[a,b,c]} = T_{abc}S^{[abc]}$.

b). 括号内的同种括号可以任意增删. e.g. $T_{[[ab]c]}$ 是指先对 T_{abc} 做了全反称化得到 $T_{[abc]}$ 的基础上再对 a.b 两个(抽象)指标反称化. $T_{[[ab]c]} = \frac{1}{2}(T_{[ab]c]} - T_{[ba]c]})$

c). 括号内出现异种括号得零. e.g. $T_{[(ab)c]}=0$

d). 异种括号缩并得零. e.g. $T^{[ab]}S_{(abc)}=0$.

e). 全对称张量反称化后得零. 反之亦然

$$\begin{cases} T_{a_1\cdots a_l} = T_{(a_1\cdots a_l)} \Rightarrow T_{[a_1\cdots a_l]}=0 \\ T_{a_1\cdots a_l} = T_{[a_1\cdots a_l]} \Rightarrow T_{(a_1\cdots a_l)}=0. \end{cases}$$

※证明引文. 在前面, 我们证明了度规张量在任一基底下的矩阵表示有逆. (分量等式 $g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma}=\delta^{\mu}{}_{\sigma}$). 换言之, 度规 g_{ab} 的非退化性(保证了)其系数矩阵的非退化性.

反之, 若存在基底 $\{(e_\mu)^a\}$ 与其对偶基底 $\{(e^\mu)_a\}$, 使这组基底下 $g_{\mu\nu}$ 非退化, 则 $g_{\mu\nu}$ 有逆 $g^{\mu\nu}$. 令 g_{ab} 的逆映射在这组基底下展开成 $g^{ab} = g^{\mu\nu}(e_\mu)^a(e_\nu)^b$.

而 $g_{ab} = g_{\mu\nu}(e^\mu)_a(e^\nu)_b$

※注意区分! $(e^\nu)^a(e_\nu)_b$ 是多个积出一个(1,1)型张量 $\delta^a{}_b$.

$(e^\nu)^a(e_\nu)_a$ 是 e^ν 作用在 e_ν 上 (作用=积并). 得数字 $\delta^\nu{}_\nu$

将正逆映射"积并": $g^{ab}g_{bc} = \underline{\underline{g}}^{\mu\nu}(e_\mu)^a(e_{\underline{\nu}})^b \, g_{\underline{\underline{\alpha}}\beta}(e^{\underline{\alpha}})_b(e^\beta)_c$

$$= g^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}\delta^{\alpha}{}_{\nu}\,(e_\mu)^a(e^\beta)_c$$

$$= \underbrace{g^{\mu\nu}g_{\nu\beta}}\,(e_\mu)^a(e^\beta)_c$$

按上面的分量等式化简.

$$= \delta^{\underline{\mu}}{}_{\underline{\beta}}\,(e_\mu)^a(e^{\underline{\beta}})_c$$

不够的抽象指标.

$$= (e_\mu)^a(e^\mu)_c = \delta^a{}_c \quad \text{=恒等映射.}$$

从而 g_{ab} 可逆. 而知它是非退化的.