Day 13

对于 $v,u\in V$、我们可以求和、做数乘、但是至今我们似乎一直未提到内积运算。显然，在一个没有任何附加结构的V上，无法定义内积这个运算。为定义内积之前，我们要有新的定义：

Def 1. V上的一个度规张量 (Metric Tensor)，是V上的 $(0,2)$ 型张量，它满足：

1). 对称的：$g(u,v)=g(v,u)$

2). 非退化的：若 $\forall u\in V$，$g(u,v)=0 \Rightarrow v=\vec{0}\in V$。（换言之，度规张量在某一基底下各分量排成的矩阵的行列式非零）。

注意：$\langle v|v\rangle$ 有正定性，而 $g(v,v)$ 是可以为负的。

Def 2. $v\in V$ 的长度定义为 $|v|=\sqrt{|g(v,v)|}$。矢量 $v,u\in V$ 被称为正交的，则 $g(v,u)=0$。一个基底 $\{e_\mu\}$ 被称为正交归一的，则 $\forall \mu,\nu$，$g(e_\mu,e_\nu)=\begin{cases}0 & \mu\neq\nu\\ \pm1 & \mu=\nu\end{cases}$

Def 3. 将一个度规用正交归一基底写成对角阵后，对角元均为+1的度规称为正定度规，或黎曼的 (Riemannian)；对角元全为−1的度规称为负定的，其余度规称为不定的。

最常用的不定度规是只有一个对角元为−1的度规（洛伦兹/Lorentzian）、对角元之和称为度规的"号差"。（结论：对角元中+1与−1的个数与所选正交归一基底无关）。

注意：本书中使用号差为+2的洛伦兹度规 $(-1,+1,+1,+1)$。

Def 4. 带 Lorentzian 度规 g 的空间 (V,g) 中矢量分三类：
$$\begin{cases} g(v,v)>0 & \text{spacelike 类空}\\ g(v,v)=0 & \text{lightlike 类光}\\ g(v,v)<0 & \text{timelike 类时}\end{cases}$$

度规 g 自然地给出了 $V\to V^*$ 的线性同构。只需注意到 $g(v,\cdot)\in V^*$。（"同构"这一性质的正确性由度规的非退化性得到）。

下面，我们可以考虑流形 M 上的度规张量场。我们先考虑 $\mathbb{R}^2$ 上的线长。

$$(dl)^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2=\left[\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2\right](dt)^2=\left[(T^1)^2+(T^2)^2\right](dt)^2=\underbrace{\|T\|}_{\text{切矢的长度}}{}^2(dt)^2\Rightarrow dl=|T|\,dt\Rightarrow l=\int|T|\,dt$$

所以，将它推广到流形上：$l=\int\sqrt{g(T,T)}\,dt$

Day 14

在使用正定度规时，我们可以将线长简单地推广到一般的带度规流形上，即：$l=\int\sqrt{g(T,T)}\,dt$。 但是，若曲线每一点的切矢都是类时的（"类时曲线"），这会不对（在 Lorentzian 度规下）。类空、类光曲线的线长仍以 $l=\int\sqrt{g(T,T)}\,dt$ 表达。而对类时曲线，我们必须将线长定义为 $l=\int\sqrt{|g(T,T)|}\,dt$。 ＊对于非类空/类时的曲线，其线长没有定义。

＊可以证明：线长不依赖于曲线的参数化。在以上定义中未出现坐标，因此线长与坐标无关。但是，我们可以借助坐标系来方便地计算线长。

若曲线落在坐标域内，$\Rightarrow g(T,T)=g\left(T^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu},\,T^\nu\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)=T^\mu T^\nu g_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}$ $\Rightarrow l=\int\sqrt{\left|g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}\right|}\,dt=\int\sqrt{|g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu|}$ 类空/类时曲线的线长可以作为线长参数。

我们引入所谓"元线长"。$ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$。从而，我们可以将线长写作：$l=\sqrt{(ds)^2}$（类空），$l=\sqrt{-(ds)^2}$（类时）。 ＊在类时线上，$g(T,T)<0\Rightarrow(ds)^2<0$

Def. 1. (M,g) 称为广义黎曼空间。若 g 为正定的，则 (M,g) 称为黎曼空间。若 g 为 Lorentzian，则 (M,g) 称为 pseudo-Riemannian Space（伪黎曼空间）。

Example 1. 设 $\{x^\mu\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的自然坐标，在上面定义度规场 $\delta=\delta_{\mu\nu}dx^\mu\otimes dx^\nu$，则 $(\mathbb{R}^n,\delta)$ 称为 n 维欧氏空间。从而，δ 在坐标对偶基底下的分量为 $\mathrm{diag}(1,1,1,1)$。

从而线元的长度 $(ds)^2=\delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$。若 $n=2$，$(ds)^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2$。 容易注意到：$\delta\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha},\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)=\delta_{\mu\nu}\,dx^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)dx^\nu\left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)=\delta_{\mu\nu}\delta^\mu{}_\alpha\delta^\nu{}_\beta=\delta_{\alpha\beta}$，故坐标基底 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right\}$ 为正交归一的。

但是，满足正交归一的条件的基底并不只有一个，其他的例如：
$\begin{cases}x'=x+a\\ y'=y+b\end{cases}$（平移） $\begin{cases}x'=-x\\ y'=y\end{cases}$ $\begin{cases}x'=x\\ y'=-y\end{cases}$（反射） $\begin{cases}x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha\\ y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha\end{cases}$（旋转）
⇒ 将原坐标作平移、反射、旋转后得到的新坐标基矢，对 δ 而言基矢也正交归一。

n 维欧氏空间中的某一坐标系的坐标基底若是正交归一的，则该坐标系称为笛卡尔坐标系。

Def 2. 设 $\{x^\mu\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的自然坐标，在 $\mathbb{R}^n$ 上定义度规张量场 $\eta=\eta_{\mu\nu}dx^\mu\otimes dx^\nu$，
$$\eta_{\mu\nu}=\begin{cases}0 & \mu\neq\nu\\ -1 & \mu=\nu=0\\ +1 & \mu=\nu=1,\cdots,n-1\end{cases}$$
对于 $n=4$，闵氏时空中的线元 $(ds)^2=-(dx^0)^2+(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2$。

不难注意到：$\eta\left(\frac{d}{dx^\alpha},\frac{d}{dx^\beta}\right)=\delta_{\alpha\beta}$。从而我们有一组正交归一基底。可以证明：由下述变换式所定义的新坐标系 $\{t',x'\}$ 也是正交归一的：$t'=t\cdot\mathrm{ch}\lambda+x\cdot\mathrm{sh}\lambda$，$x'=t\,\mathrm{sh}\lambda+x\,\mathrm{ch}\lambda$。这一操作称为伪转动（boost）。（这组坐标称为伪笛卡尔坐标）

回忆一下我们是怎么搞出一个坐标域上线长公式的。 欧氏曲线：$l=\int|T|dt\Rightarrow(ds)=|T|$ ⇒ 一般曲线 $ds=\sqrt{g(T,T)}\,dt$

$$ds=\sqrt{g_{ab}\left(\frac{dx^\mu}{dt}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a\left(\frac{dx^\nu}{dt}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b}\,dt=\sqrt{\left(\frac{dx^\mu}{dt}\right)\left(\frac{dx^\nu}{dt}\right)g_{\mu\nu}}\,dt=\sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}$$
⇒ 我们凑出了"$(ds)^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$"

然而，它的真正含义 $[(ds)^2]_{ab}=g_{\mu\nu}(dx^\mu)_a(dx^\nu)_b$ 为度规在对偶基矢上展开 ⇒ $[(ds)^2]_{ab}=g_{ab}$.

$$\Rightarrow\int\sqrt{ds^2}\Rightarrow\int\sqrt{g_{\mu\nu}(dx^\mu)_a(dx^\nu)_b\left(\frac{dx^\mu}{dt}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a\left(\frac{dx^\nu}{dt}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b}\,dt=\sqrt{g_{\mu\nu}\left(\frac{dx^\mu}{dt}\right)\left(\frac{dx^\nu}{dt}\right)}\,dt$$