Day 110.

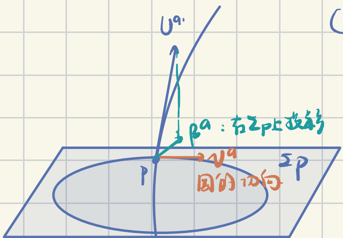
Chapter 9. 施瓦西时空

首先，我们考虑如何求解施瓦西时空中星体的运动。这应求解施瓦西时空中测地线。写出测地线的方程：$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau}=0$。

考虑一条类时或类光测地线 $\gamma(\tau)$，借施瓦西坐标系，我们可写出其切矢：$U^a=\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^a=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a\frac{dt}{d\tau}+\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a\frac{dr}{d\tau}+\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^a\frac{d\theta}{d\tau}+\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^a\frac{d\varphi}{d\tau}$。

我们对其进行"巧妙"求解。

<u>**Thm1**</u> 对于测地线，总可适当地选取施瓦西坐标，使它们的 θ 值恒为 $\frac{1}{2}\pi$。



(p, V^a) 给出 S^2 上一个大圆，将这个大圆作赤道 $(\theta=\frac{\pi}{2})$，从而 $\theta(p)=\frac{\pi}{2}$，$\left.\frac{d\theta}{d\tau}\right|_p=0$。由于度规的线元有 $\theta\to\pi-\theta$ 变换下的对称性，

从而可保证测地线始终沿着 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 而行。下面要利用4速归一性质。let $k=-g_{ab}U^aU^b$

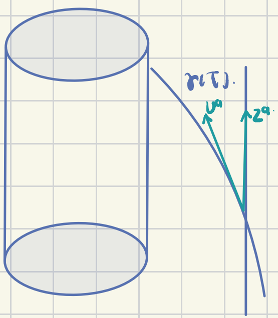
$$\Rightarrow -k=g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^b=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2.$$

$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$、$\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^a$ 均为 Killing 矢量场。我们知道 Killing 场与测地切矢之内积沿测地线为常值。

let $E=-g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^b$，$L=g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^b$。从而有 $E=\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}$，$L=r^2\frac{d\varphi}{d\tau}$。

从而有 $-k=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}E^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+\frac{L^2}{r^2}$。这是关于 $r(\tau)$ 的一阶 ODE，原则上可解。

下面，给出E和L的物理意义



$-Z_aP^a=E_{当}=g_{ab}Z^aP^b$　又有 $Z^a=\chi^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$　$g_{ab}Z^aZ^b=\chi^{-2}g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b=\chi^{-2}\xi^b\xi_b\Rightarrow\chi=\left(-\xi^b\xi_b\right)^{1/2}$

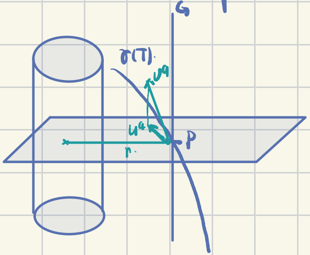
而 $E=-g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^b=-g_{ab}\chi Z^a\frac{1}{m}P^b=\frac{\chi(r)}{m}E_{当}$　在<u>无限远处</u>，$E=\frac{1}{m}E_{当}$，$E_{当}$ 沿测地线并非常量。

这是正常的，由于 $E_{当}$ = "动能"，是不含引力势能的。而 E 为包含引力势能的总能量。

Day 111

上一次我们给出了测地线上的角动量守恒量: $L = g_{ab}(\frac{\partial}{\partial\varphi})^a(\frac{\partial}{\partial\tau})^b$. 我们给出P点的正交归一4-标架: $(e_0)^a = (1-\frac{2M}{r})^{-1/2}(\frac{\partial}{\partial t})^a = Z^a$, $(e_1)^a = (1-\frac{2M}{r})^{1/2}(\frac{\partial}{\partial r})^a$, $(e_2)^a = r^{-1}(\frac{\partial}{\partial\theta})^a$, $(e_3)^a = r^{-1}(\frac{\partial}{\partial\varphi})^a$.

静态观者的局部标架. 角动量定义: $j^a = \varepsilon^a{}_{bc} r^b p^c$.



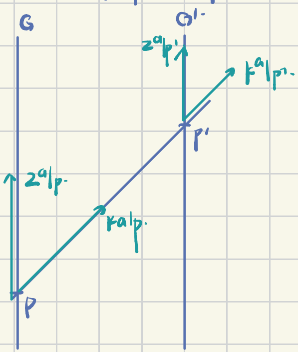
$\Rightarrow j^a = \varepsilon^a{}_{bc}\, r(e_1)^b \gamma m u^c$. 注意到我们只讨论赤道面 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的情况. 从而 u^c 只有一个分量. 由于 $\varepsilon^a{}_{bc}$ 的反称性我们有:

$j^a = \varepsilon^a{}_{bc}\, r(e_1)^b \gamma m u^3 (e_3)^c$. $j_a = \varepsilon_{a13}\, r\gamma m u^3 = \varepsilon_{213}\, r\gamma m u^3 (e^2)_a$.

计算它的大小: $\|j^a\| = \|r\gamma m u^3\| = \|r\gamma m u^a (e_3)_a\|$. 利用 $U^a = \gamma(Z^a+u^a)$. $\Rightarrow \gamma u^a = U^a - \gamma Z^a$.

$\Rightarrow \|j^a\| = \|r m U^a (e^3)_a\| = \|r^2 m U^a (d\varphi)_a\| = \|r^2 m \frac{d\varphi}{d\tau}\| = mL$ 从而知L的意义为角动量.

在讲解两个实验中, 我们可以对广义相对论预言的结果做出实验验证. <u>引力红移</u>, <u>水星近日点进动</u>, <u>光线偏折</u>



对着G, G'对应的静态观者做测量, 测出的角频率为 $\omega = -(k_a Z^a)|_p$ $\omega' = -(k_a Z^a)|_{p'}$. 取 $\chi = -(\xi^b\xi_b)^{1/2}$. 由 $Z^aZ_a=-1$ 得出:

$\omega = [(-k_a\xi^a)\chi^{-1}]|_p$. $\omega' = [(-k_a\xi^a)\chi^{-1}]|_{p'}$. 而 $k_a\xi^a$ 在测地线上为常数. 从而立刻有 $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\chi}{\chi'}$ 或 $\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\chi'}{\chi}$.

再利用 $\chi^2 = -\xi^b\xi_b = -g_{ab}(\frac{\partial}{\partial t})^a(\frac{\partial}{\partial t})^b = -g_{00} = 1-\frac{2M}{r}$. $\Rightarrow \lambda'/\lambda = (1-2M/r')^{1/2}(1-2M/r)^{-1/2}$.

利用所谓"穆斯堡尔效应", 可验证这一效应. (原则上, 以上推导适用于任何稳态时空).

Day. 122.

观测发现: 水星的轨道并非闭合椭圆. 其近日点发生进动、进动角速度约为 5600 SoA | Cent. 其中可被其他星球的引力摄动解释的有5557 SoA. 剩下的可被GR解释.

只考虑太阳的引力场(略去水星引力). 我们先从牛顿引力论开始. 由机械能守恒: $\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(r\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]+U(r)=A$. 我们消去 t. 求轨道方程.

上式两侧乘 $\left(\frac{dt}{d\varphi}\right)^2\cdot\frac{1}{m}=\frac{r^4}{L^2 m}$ $\Rightarrow$ $\frac{A}{mL^2}r^4=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+r^2\right]-\frac{M}{L^2}\cdot r^3$. 为了求解, 先整理一下. $0=\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+r^2-\frac{2M}{L^2}r^3-\frac{2A}{mL^2}r^4$. 经典做法是换元令 $\mu=\frac{1}{r}$. (Binet方程).

从而立刻有: $\frac{dr}{d\varphi}=-\mu^{-2}\frac{d\mu}{d\varphi}$ $\Rightarrow$ $\mu^{-4}\left(\frac{d\mu}{d\varphi}\right)^2+\mu^{-2}-\frac{2M}{L^2}\mu^{-3}-\frac{2A}{mL^2}\mu^{-4}$. 同乘 μ^4. 有: $0=\left(\frac{d\mu}{d\varphi}\right)^2+\mu^2-\frac{2M}{L^2}\cdot\mu-\frac{2A}{mL^2}$. 两侧对 φ 求导 $\frac{d\mu}{d\varphi}\left(\frac{d^2\mu}{d\varphi^2}+\mu-\frac{M}{L^2}\right)=0$.

我们有两解: $d\mu/d\varphi=0$ (圆轨道). 或 $\frac{d^2\mu}{d\varphi^2}+\mu=\frac{M}{L^2}$. 这是谐振动方程. 从而立刻从中得出: $\mu(\varphi)=\frac{M}{L^2}(1+e\cos\varphi)$. $e=1+\frac{2AL^2}{mM^2}$.

而在GR情形下. 我们应求解施瓦西时空中测地线方程. 考虑类时测地线. $1=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}E^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+\frac{L^2}{r^2}$ 为了同样从其中求出轨道方程, 我们同样将两侧除以 $\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2$

<这里的 $L=r^2\cdot\frac{d\varphi}{d\tau}$, 而牛顿力学中 $L=r^2\cdot\frac{d\varphi}{dt}$. 但考虑到低速弱场条件下 $d\tau\sim dt$. 所以可认为二者在本问题下近似相等>.

整理可得: $\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-\frac{E^2r^4}{L^2}+r^2\left(1+\frac{r^2}{L^2}\right)\left(1-\frac{2M}{r}\right)=0$. 仍做换元. $\mu=\frac{1}{r}$. 有 $\left(\frac{d\mu}{d\varphi}\right)^2+\mu^2=\frac{1}{L^2}(E^2-1)+\frac{2M}{L^2}\mu+2M\cdot\mu^3$. 两侧对 φ 求导. $\frac{d^2\mu}{d\varphi^2}+\mu=\frac{M}{L^2}+\underline{\underline{3M\mu^2}}$.

通过代回常数. 可知 $3M\mu^2\ll\mu$ 所以这是一项极小的修正. 可以直接在 $\mu_0(\varphi)=\frac{M}{L^2}(1+\cos\varphi)$ 上做修正. 令新解为 $\mu_0(\varphi)+\mu_1$. 从而得到 μ_1 满足的方程:

$\frac{d^2\mu_1}{d\varphi^2}+\mu_1=\frac{M}{L^2}+3M\mu_0^2$ 可以验证它的解为: $\mu_1(\varphi)=\mu_0(\varphi)+\frac{3M^3}{L^4}\left(1+e\varphi\cdot\sin\varphi+e^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cos2\varphi\right)\right)$. $e^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cos2\varphi\right)$ 项不改变极值点. 从而不随时间累积影响

只需关注 $\frac{3M^3}{L^4}e\varphi\cdot\sin\varphi$ 这一项. 从而: $\mu_1(\varphi)=\frac{M}{L^2}\left[1+e\cos\varphi+\frac{3M^2}{L^2}\cdot\varphi\cdot\sin\varphi)\right]$. 可验证 $\varepsilon=3M^2/L^2$ 为小量. 从而在 $\cos\varepsilon\varphi\sim1$. $\sin\varepsilon\varphi\sim\varepsilon\varphi$ 的时候下. 由两角和公式有:

$\mu_1(\varphi)\cong\frac{M}{L^2}(1+e\cos(\varphi-\varepsilon\varphi))$. 我们寻找 $\hat{\varphi}$. 使它满足 $\cos(\hat{\varphi}-\varepsilon\hat{\varphi})=1$ 又最接近 2π 的 φ 值. 从而 $\hat{\varphi}\cong2\pi(1+\varepsilon)$. 代入数值. 可算出 $\Delta\varphi=2\pi\varepsilon\sim43$ SOA/Cent.

Day 123.

最后一个可验证GR的实验是所谓"引力透镜"，或者在经过大质量天体时星光偏折。这需要利用类光测地线方程：$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - \frac{E^2r^4}{L^2} + r^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)=0$.

令 $\mu = r^{-1}$，上式变为：$\left(\frac{d\mu}{d\varphi}\right)^2 + \mu^2 = \frac{E^2}{L^2} + 2M\mu^3$。求导有：$\frac{d^2\mu}{d\varphi^2} + \mu = 3M\mu^2$。采用同样的近似方法求解这一方程。先看零阶近似：$\frac{d^2\mu}{d\varphi^2} + \mu = 0 \Rightarrow \mu(\varphi) = \frac{1}{l}\sin\varphi$.

这显然为极坐标中直线方程。再考虑一阶近似：$\mu_1(\varphi) = \frac{1}{l}\sin\varphi + \frac{M}{l^2}(1-\cos\varphi)^2$。在0阶近似下，有 $\mu_0(0)=\mu_0(\pi)=0$，这意味着轨道上极角为0、π时光子在无穷远处。

而对于一阶近似，有 $\mu_1(0)=0$，而 $\mu_1(\pi)\neq 0$。从而极角为π时光子并未到无穷远。设$\pi+\beta$时光子确实到无穷远。且 $\beta \ll 1$，从而有 $\sin(\pi+\beta)\sim -\beta$，$\cos(\pi+\beta)\sim -1$，$\Rightarrow \beta = 4M/l$.

取 $l = R_\odot$，即在太阳表面"擦过"的光，有 $\beta \sim 1.75$ s.o.A. 由于我们无法在太阳的强光中看星星，从而人们在日全食时进行了验证。

<历史的注记：施瓦西度规是一位军官在一战战场上解出的，而以上测量发生在一战后不久>。<牛顿+狭相得出的结果为 $2M/l$。>

下面，我们研究球对称恒星的演化。为了讨论这个问题，我们应当考虑对称星体内部的度规，所谓施瓦西内解。我们从球对称度规开始。

$(ds)^2 = -\exp(2\cdot A(r))\cdot(dt)^2 + \exp(2\cdot B(r))\cdot(dr)^2 + r^2\left((d\theta)^2+\sin^2\theta(d\varphi)^2\right)$ 恒星内物质场通常用理想流体近似，从而我们有：$T_{ab}=(\rho+p)\cdot U_aU_b + p\cdot g_{ab}$.

我们假定星体是静态的，从而星体内流体的4速与Killing场平行。利用4速归一性很容易得到：$U^a=\exp(-A)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$，$U_a = -\exp(A)\cdot(dt)_a$。可以写出T的所有非零分量：

$T_{00}=\rho\cdot\exp(2A)$. $T_{11}=p\cdot\exp(2B)$. $T_{22}=pr^2$. $T_{33}=p\,r^2\cdot\sin^2\theta$. 现在，我们不再像真空或电磁真空一样有 $R=0$ 的性质，求解更困难。

$R_{\mu\nu} - R\cdot g_{\mu\nu}/2 = 8\pi T_{\mu\nu}$。用度规升指标有：$R^\mu{}_\nu - R\cdot\delta^\mu{}_\nu/2 = 8\pi T^\mu{}_\nu$。由球对称度规可以直接给出标量曲率，从而将 $R^\mu{}_\nu - R\cdot\delta^\mu{}_\nu$ 代入有：

$$\begin{cases} -8\pi\rho = -\exp(-2B)\cdot(2B'\cdot r^{-1} - r^{-2}) - r^{-2} \\ 8\pi p = -\exp(-2B)\cdot(2A'\cdot r^{-1} + r^{-2}) - r^{-2} \\ 8\pi p = -\exp(-2B)\cdot\left(A'' - A'B' + A'^2 + (A'-B')r^{-1}\right) \end{cases}$$

Day 114.

我们一个一个方程来看。第一个方程两侧同乘 $-r^2$，有：$8\pi\rho\cdot r^2 = 2r\cdot\exp(-2B)\cdot B' - \exp(-2B)+1 = 1-\frac{d}{dr}\left(r\cdot\exp(-2B)\right)$。两侧从0到r积分有：

$r\cdot\exp(-2B(r)) = r-2m(r)+c$。其中 $m(r)$ 形式上为"质量"：$m(r)=4\pi\int_0^r \rho(x)\cdot x^2\cdot dx$。若 $c\neq0$，则 $\exp(-2B(r))$ 在 $r\to0$ 处 $\to+\infty$，即 $g^{11}\to\infty$，这显然是不合理的，从而 $c=0$。

从而有：$g_{11}(r)=\left(1-\frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}$。并可以看出真空解中 $M=4\pi\int_0^R\rho(x)\cdot x^2\cdot dx$。注意：这个东西看起来像质量，但实际并非。请看：$(ds)^2=\left(1-\frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}(dr)^2+r^2\left((d\theta)^2+\sin^2\theta\,(d\varphi)^2\right)$

从而体积元 $\epsilon=\sqrt{h}\cdot dr\wedge d\theta\wedge d\varphi=\left(1-\frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}r^2\sin\theta\cdot(dr\wedge d\theta\wedge d\varphi)$。从而实际上 $\int\rho(r)\cdot\epsilon=\int\rho(r)\cdot\left[1-\frac{2m(r)}{r}\right]^{-1/2}\cdot r^2\sin\theta\cdot dr\wedge d\theta\wedge d\varphi=4\pi\int\rho(r)\cdot\left[1-\frac{2m(r)}{r}\right]^{-1/2}\neq M$。

这里的 $\rho(r)$ 应解释为星体内静态观者做每个局部测量出的能量密度，包括静能、内能等等，但不包含引力势能。$\rho(r)$ 不含引力势能这一事实与引力势能的非局域性有关。

而 M 与总质量（包括引力势能）有关。

现在已使用 $\rho(r)$ 表示 $B(r)$。下面解 $A(r)$。容易从方程(2)中给出：$\frac{dA}{dr}=\frac{m(r)+4\pi pr^3}{r(1-2m(r))}$。$p(r)$ 与 $\rho(r)$ 具体关系应使用物态方程求得。我们可以考虑所谓牛顿近似：

$g_{11}\sim1=\left(1-\frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}\Rightarrow m(r)\ll r$；$p\ll\rho\Rightarrow pr^3\ll\rho r^3\sim m(r)$。从而我们有 $\frac{dA}{dr}=\frac{m(r)}{r^2}$。对比牛顿理论中的引力势，$\frac{d\phi}{dr}=m(r)/r^2$。

从而在牛顿近似下，A 相当于牛顿力学中的引力势，它正是泊松方程 $\nabla^2\phi=4\pi\rho$ 在球对称下的写法。

下面，方程(3)，等价于 $\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^b\nabla^a T_{ab}=0$。从第一篇可知，$\frac{dp}{dr}=-(\rho+p)\cdot\frac{m(r)+4\pi pr^3}{r(r-2m(r))}$。从而所有方程有：$A(r)$、$m(r)$、$p(r)$、$\rho(r)$。

方程有：$\frac{dA(r)}{dr}=\cdots$　$\frac{dp(r)}{dr}=\cdots$　$\frac{dm(r)}{dr}=4\pi\rho(r)\cdot r^2$。少一个方程，正是所谓物态方程 $f(p,\rho)=0$。我们取一最简单物态方程：不可压缩流体：$\rho=\text{Const}$。

(总结一下得到的过程：第一个式给出 $B(m(r))$，和 $\frac{dm(r)}{dr}$。第二个给出 $\frac{dA(r)}{dr}$。第三个 $\frac{dp(r)}{dr}$。再补上 $f(p,\rho)=0$。

Day 115~116

之前我们利用(3)方程得出: $\frac{dp}{dr}=-(p+\rho)\frac{dA}{dr}$. 其牛顿近似: $\frac{dp}{dr}=-\frac{\rho m(r)}{r^2}$ 这个方程可借由牛顿引力论中的平衡方程给出. 从而这里的p就是压强.
描述恒星的方程组. $m(r)$、$A(r)$、$p(r)$ 由三个方程控制. 原则上有唯一解(在指定初条件). 由 $m(r)=4\pi\int\rho(r)\cdot r^2\cdot dr$ 知 $m(0)=0$ 这无法指定. 我们能指定 $p(0)$.
在 $p>0$ 且 $\rho>0$ 时, 我们有 $dp/dr<0$. 从而星球表面是 $p(R)=0$ 处. 然后求出 R 后, 可根据 $A(r)$ 在星球内外部的连续性给出 $A(0)$. 从而实际上只指定 $p(0)$ 可定一组解.
下面考虑最简单的不可压缩流体 ($\rho=\text{const}$). 从而有 $m(r)=\frac{4}{3}\pi\rho r^3$. 取星体中心压强 p_0. 有 $p(r)=-\frac{2}{3}\pi\rho^2r^2+p_0$. $\Rightarrow p(r)=\frac{2}{3}\pi\rho^2(R^2-r^2)$. (牛顿近似).
在考虑GR效应的情形下: $p(r)=\rho\frac{\gamma-\beta(r)}{\beta(r)-3\gamma}$, 其中 $\gamma=\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{1/2}$, $\beta(r)=\left(1-\frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2}$, $p_0=\rho\frac{\gamma-1}{1-3\gamma}$

简单分析表明: p_0 随 $\gamma\nearrow$ 而 $\nearrow$. 在 $\gamma=1/3$ 时. $p_0\to+\infty$. 从而均匀密度星的 M/R 有上限. $\left(\frac{M}{R}\right)\le\frac{4}{9}$. 从而易求出 $M_{max}=\frac{4}{9}\frac{1}{\sqrt{3\pi\rho}}$.
对于一般天体, 其比值远小于此值. 对于太阳. $\frac{GM_\odot/c^2}{R_\odot}\sim2\times10^{-6}$. $\langle GM_\odot/c^2\sim1.5\text{km}\rangle$.
对于非均匀密度星只要 $\rho(r)>0$. 且 $d\rho/dr\le0$. 从而都有 $M/R\le\frac{8}{9}$ 的结论. 下面, 我们研究恒星的演化.
恒星前身是稀薄气体. 在引力作用下 这些"种子"不断长大而形成气团. 没有足够的力抵抗引力, 从而气团向内收缩. 这个过程中引力能转换为内能. 从而T↗.
虽然 $p\nearrow$. $\frac{dp}{dr}\nearrow$. 但由于热辐射 T又↓. 故其实际无法抵抗引力. 因此它还收缩. 随着$\rho\nearrow$ T↗. 中心温度与压强终于点燃了 H→He 的核聚变. 从而 T↑ $p\nearrow$. dp/dr 终于可以和引力抗衡. 恒星诞生了. 我们的太阳正值壮年. 已烧了45亿年. 还可再烧50亿年.
燃烧很长时间后. 星体中心部是He. 只有一薄层H在燃烧. 此时. 星核的T, ρ不足以点燃 He聚变 从而核心He继续收缩. 最终 He→C/O.
这个过程中使外层H燃烧加剧, 从而外层膨胀、表面温度↓、成为"红巨星". 对于不足以继续点燃C聚变的星体. 经典物理中已没有力量与引力抗衡.
但是, 根据量子力学/统计物理. 电子会将占满某一临界能级下的所有能级, 这将产生所谓"电子简并压". 由于恒星内部密度极高, 从而 $kT\ll E_F$. 从而简并压 ≫ 热运动.
白矮星的临界质量 $M_{ch}\sim1.3M_\odot$ 这个电子简并压的形式需要了解. 从而将一直保持 此时星体称作白矮星(white dwarf). 随着辐射T↓. 从而变黑矮星.
e.g. 天狼星有一颗伴星, 是白矮星. 这是人类首次观测到白矮星.
若 $M>1.3M_\odot$, 那么电子简并压都无法抵抗 从而星核继续收缩、核反应继续发生、直至烧成 Fe与Ni. 由于Fe为比结合能最高的核. 从而此后聚变反应无法再发生.
在这一阶段星核中的高能γ射线打碎原子核并放出中子. 同时电子又与p转变成为中子. 中子也是费米子. 也会提供中子简并压. 在$M<(2\sim3)M_\odot$时. 中子简并压可与引力抗衡.
从而将不会继续收缩. 形成中子星. 中子星有诸多特点: 高密度. 高磁场. 高自转角速. 高声速.
中子星的有关理论最早由奥本海默及其学生提出. 在大约1967年被观测到. (最初被称作 pulsar). 在1968年正式被确认

Day 117 ~ 128

在形成中子星前，星核先剧烈收缩。一旦达到中子简并压和与引力抗衡的临界密度，收缩立即停止，此时巨大的能量推动外层物质飞出，形成超新星爆发 (supernova)。

<"超新星"并非新生的星儿，而是回光返照的老人>。<金牛座中的蟹状星云，恰为北宋期间 SN 1054 的遗迹>。

超新星爆发可产生重元素，并且其残骸可能重新形成恒星！最近的肉眼可见的超新星爆发在1987年，超爆主要的能量释放形式为中微子。

若恒星燃烧殆尽时的质量大于 $2\sim3M_\odot$，终于没有任何与引力抗衡，那么，恒星将成为黑洞。考虑施瓦西度规：

$$(ds)^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)(dt)^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}(dr)^2+r^2\left((d\theta)^2+\sin^2\theta(d\varphi)^2\right).$$

$r=0$ / $r=2M$ 使这个度规无意义，称为 singularity.

然而，以上线元写法与坐标有关，所以奇点可能有两种：坐标奇点与时空奇点。先给结论：$r=2M$为坐标奇点，$r=0$为时空奇点。

从而我们将 $(0,+\infty)$ 拆成 $(0,2M)(2M,+\infty)$ 两块，这会使得时空流形非连通。

在静电学中，$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{q}{r^2}$，从而 $r=0$ 为 E 的奇点，这是物理场的奇性，而此处 g_{ab} 兼有背景时空与物理场的作用。

所以我们无法直接对度规的奇性下定义。我们称 (M, g_{ab}) 为时空，我们本身要求 g_{ab} 有一定可微性，因此若 p 点处 g_{ab} 不定义，我们应直接将 p 点除出时空，即 $M'=M-\{p\}$。

<注意：只有 g_{ab} 两阶以上可微，我们才可谈及 Riemann Tensor> 从而我们可以说"若一个时空是奇异的，则其中有点被挖掉"。

有一个方法：设 $\gamma(\lambda)$ 为 $(\mathbb{R}^4,\eta_{ab})$ 中不可延伸的任一测地线，其"不可延伸"是指它已延伸到无穷远，从而 $\lambda\in(-\infty,+\infty)$。若在 $\gamma(\lambda)$ 上挖掉一点，则 $\gamma(\lambda)$ 分裂成两条测地线。

称 (M,g_{ab}) 中一条不可延伸测地线为不完备测地线，若其仿射参数取值不可遍及 $(-\infty,+\infty)$。这样的定义方式会将故意挖掉点的时空定义为奇异的。

从而我们要求讨论的时空不可延拓。

Def 1. 若不可延拓时空中存在至少一条不完备类时/类光测地线，则称它为奇异时空。

许多奇异时空在不完备测地线走向奇点时有"曲率发散性"。由 Riemann Tensor 做出的各种标量，例如 R，$R_{abcd}R^{abcd}$ 等等发散，则称时空有 s.p. 曲率奇性 (标量多项式)。

若 R_{abcd} 及其协变导数在沿线平移标架上任一分量发散，则称时空有 p.p. 奇性。可证明 s.p. $\longrightarrow$ p.p.