DAY 11.

Def. 我们称一个多线性映射 (A multilinear map). $T: \underbrace{V^* \times V^* \cdots \times V^*}_{k个} \underbrace{\times V \times V \cdots \times V}_{l个} \to \mathbb{R}$

为 V 上的一个 (k,l) 型张量 (Tensor).

一个张量可以被比喻为有 k 个上槽和 l 个下槽的机器，向其输入 k 个对偶矢量和 l 个矢量，就得到一个实数。例如，一个对偶矢量可以看作一个 $(0,1)$ 型张量，而一个矢量可以被看作一个 $(1,0)$ 型张量（$v \in V$ 和 $v^{**} \in V^{**}$ 可以建立一一映射）。我们使用 $\mathcal{T}_V(k,l)$ 表示 V 上所有 (k,l) 型张量的集合。从而 $V = \mathcal{T}_V(1,0)$，$V^* = \mathcal{T}_V(0,1)$.

看一下特殊的张量 $\mathcal{T}_V(1,1)$. 它可以被写成 $T(\underset{\omega}{\bullet}\,;\underset{v}{\bullet})$ $\to$ $T(\omega;\bullet)$. 接受一个矢量，从而 $T(\omega;\bullet) \in V^*$. 换个角度看，$T(\bullet;\bullet)$ 接受一个对偶矢，给出一个对偶矢，从而它是 $V^* \to V^*$ 线性映射。

$\to$ $T(\bullet;v)$. T 也可以看作 $V \to V$ 线性映射。

"张量面面观".

现在我们希望找到 $\mathcal{T}_V(k,l)$ 的基底。但是，我们需首先定义张量积。

Def 2. $\forall T \in \mathcal{T}_V(k,l)$, $T' \in \mathcal{T}_V(k',l')$. 定义 $T \otimes T' \in \mathcal{T}_V(k+k', l+l')$. 我们定义它在矢量、对偶矢量上的作用。

$$T \otimes T'(\omega^1, \omega^2, \cdots \omega^k, \omega^{k+1}, \cdots \omega^{k+k'}; v_1, v_2, \cdots v_l, v_{l+1}, \cdots v_{l+l'}) = T(\omega^1, \cdots \omega^k; v_1, \cdots v_l) \cdot T(\omega^1, \cdots \omega^{k'}; v_1, \cdots v_{l'})$$

我们要问 张量积是否满足交换律？ 例如 $\omega \otimes v(\overset{\omega'}{\bullet};\overset{v_1}{\bullet})$ 与 $v \otimes \omega(\overset{\omega'}{\bullet};\overset{v_1}{\bullet})$ 是否一致？

$$\begin{cases} \omega \otimes v(\omega', v_1) = \omega(v_1) \cdot v(\omega') \\ v \otimes \omega(\omega', v_1) = v(\omega') \cdot \omega(v_1) \end{cases}$$

在这个例子中 $\omega \otimes v = v \otimes \omega$.

再考虑另一个例子：

$$\begin{cases} v \otimes u(\omega', \omega^2) = v(\omega') \cdot u(\omega^2) \\ u \otimes v(\omega', \omega^2) = u(\omega') \cdot v(\omega^2) \end{cases}$$

在这个例子中，可以发现交换律不成立。总的来说，张量积一般不符合交换律。

Theorem 1. $\mathcal{T}_V(k,l)$ 是一个矢量空间. 且 $\dim \mathcal{T}_V(k,l) = n^{k+l}$

我们举一个例子：$n=2$, $k=2$, $l=1$. （接受2个对偶矢和1个矢量）. 我们声称它的8个基底为：

$e_1 \otimes e_1 \otimes e^{1*}$ $\quad$ $e_1 \otimes e_1 \otimes e^{2*}$ $\quad \cdots$

首先证明它们是线性独立的。即证明 $A^{\mu\nu}{}_{\sigma} \cdot e_\mu \otimes e_\nu \otimes e^{\sigma*} = 0$ 当且仅当 $A^{\mu\nu}{}_{\sigma} = 0$. 将它作用在两个对偶基和一个矢量上，从而：

$$A^{\mu\nu}{}_{\sigma}\, e^{\alpha*}(e_\mu) \cdot e^{\beta*}(e_\nu) \cdot e^{\sigma*}(e_\gamma) = A^{\mu\nu}{}_{\sigma}\, \delta^\alpha{}_\mu\, \delta^\beta{}_\nu\, \delta^\sigma{}_\gamma = A^{\alpha\beta}{}_{\gamma} = 0.$$ 从而所有系数为0。

下面再证 对于2维向量空间 V. 取 $T \in \mathcal{T}_V(2,1)$. $T = T^{\mu\nu}{}_{\sigma}\, e_\mu \otimes e_\nu \otimes e^{\sigma*}$. 其中 $T^{\mu\nu}{}_{\sigma} = T(\underline{e^{\mu*}, e^{\nu*}}; e_\sigma)$.

→ 作用在这上面时，只有 $e_\mu \otimes e_\nu \otimes e^{\sigma*}$ 这组基会起作用。其余基底均"失效"。因此这组基前面的系数也必为 $T^{\mu\nu}{}_{\sigma} = T(e^{\mu*}, e^{\nu*}, e_\sigma)$

我们应将 T 作用在任意2个对偶矢和1个矢量上. 具体而言，只需在基底上作用.

左 $= T(e^{\alpha*}, e^{\beta*}; e_\gamma)$ $\quad$ 右 $= T^{\mu\nu}{}_{\sigma}\, \delta^\alpha{}_\mu\, \delta^\beta{}_\nu\, \delta_\gamma{}^\sigma = T^{\alpha\beta}{}_{\gamma} = T(e^{\alpha*}, e^{\beta*}; e_\gamma)$. 从而定理得证。

只有一个分量被提取出来。

DAY 12.

下面介绍一个可以将张量的阶数降低的操作：缩并。我们考虑例子 $T \in \mathcal{T}_V(1,1)$. 根据"张量重角观"，T是一个$V \to V$的映射，换言之，这是一个线性变换。

直观来看，(1,1)型张量写成：$T = T^\mu{}_\nu \, e_\mu \otimes e^{\nu *}$. 展开系数 $T^\mu{}_\nu = T(e^{\mu *}, e_\nu)$.

然而，你也可以在另一组基底上展开T：$T = T'^\mu{}_\nu \, e_\mu{}' \otimes e^{\nu *}{}'$ 展开系数 $T'^\mu{}_\nu = T(e^{\mu *}{}', e_\nu{}')$.

而 $T^\mu{}_\nu$, $T'^\mu{}_\nu$ 是T所代表的线性变换在不同基底下的表示。

"一后一前"，就像矩阵相乘。

考虑 $T'^\mu{}_\nu = T(e'^{\mu *}, e'_\nu) = T\big((\tilde{A}^{-1})_\rho{}^\mu e^{\rho *}\,;\, A^\sigma{}_\nu e_\sigma\big) = [(\tilde{A}^{-1})_\rho{}^\mu A^\sigma{}_\nu]\, \underbrace{T(e^{\rho *}, e_\sigma)}_{T^\rho{}_\sigma} = (A^{-1})^\mu{}_\rho \cdot T^\rho{}_\sigma \cdot A^\sigma{}_\nu = (A^{-1} \cdot T \cdot A)^\mu{}_\nu$ $\Rightarrow$ T'与T有相似的关系。

而相似矩阵有相同的本征值和迹。 → 注意只有"一前一后"的指标才能这样，才能像矩阵相乘。

$$T'^\mu{}_\mu = (A^{-1})^\mu{}_\rho T^\rho{}_\sigma A^\sigma{}_\mu = (A^{-1})^\mu{}_\rho A^\sigma{}_\mu T^\rho{}_\sigma = (AA^{-1})^\sigma{}_\rho T^\rho{}_\sigma = \delta^\sigma{}_\rho \cdot T^\rho{}_\sigma = \delta^\rho{}_\rho T^\rho{}_\rho = T^\rho{}_\rho$$

我们将(1,1)型张量的迹称作其缩并(Contraction)。记作 $CT = T^\mu{}_\mu = T(e^{\mu *}, e_\mu)$.

下面我们再谈谈(2,1)型张量的缩并。可以定义上slot 1 与下slot 1的缩并 $C^1_1 T = T(e^{\mu *}, \cdot\,; e_\mu) \in V$ 以及 $C^2_1 T = T(\cdot, e^{\mu *}, e_\mu) \in V$.

$(C^1_1 T)^\nu = T(e^{\mu *}, e^{\nu *}; e_\mu) = T^{\mu\nu}{}_\mu$. $(C^2_1 T)^\nu = T(e^{\nu *}, e^{\mu *}, e_\mu) = T^{\nu\mu}{}_\mu$.

(2,1)型张量的缩并与(1,1)型张量有类似性质，就是说换一组基，$(C^1_1 T)' = C^1_1 T$, $(C^2_1 T)' = C^2_1 T$.

Def 1. $T \in \mathcal{T}_V(k,l)$ 的缩并定义为：$C^i_j T = T(\cdot, \dots, \underset{i \text{ upper slot}}{e^{\mu *}}, \dots\,;\, \cdot, \dots, \underset{j \text{ lower slot}}{e_\mu}, \dots)$ 缩并有与基底无关的性质。

有一些书把张量积，再做缩并的运算，可以看作张量对矢量或对偶矢的作用，例如：

$C(v \otimes \omega) = \omega(v)$. 证明：$C(v \otimes \omega) = v \otimes \omega(e^{\mu *}, e_\mu) = v(e^{\mu *}) \cdot \omega(e_\mu) = v^\mu \omega(e_\mu) = \omega(v^\mu e_\mu) = \omega(v)$.

下面，我们要将张量放在流形上，在点p的切空间V_p上可以定义 $\mathcal{T}_{V_p}(k,l)$。我们自然会想将 $T \in \mathcal{T}_{V_p}(k,l)$ 在流形的坐标基矢 $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$ 和对偶基矢 $\{dx^\mu\}$

例如，我们可以在流形上的基底展开一个(2,1)型张量：$T = T^{\mu\nu}{}_\sigma \cdot e_\mu \otimes e_\nu \otimes e^{\sigma *} = T^{\mu\nu}{}_\sigma \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) \otimes (dx^\sigma)$. 坐标分量可以表为：$T(dx^\mu, dx^\nu, \frac{\partial}{\partial x^\sigma})$.

张量的分量在不同基底下会发生变换。例如考虑刚才的特例：$T'^{\mu\nu}{}_\sigma = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\sigma}\Big|_p T^{\alpha\beta}{}_\gamma$

Theorem. 1. (k,l)—Tensor 在两个坐标系中的分量变换关系为：$T'^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1, \nu_2 \cdots \nu_l} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \cdots \frac{\partial x^{\sigma_l}}{\partial x'^{\nu_l}} T^{\rho_1 \cdots \rho_k}{}_{\sigma_1 \cdots \sigma_l}$

证明：我们仍然只证明(2,1)型情况(为了简便，无关紧要)。根据坐标基底间的关系，将坐标基底作用于不依赖于坐标的 df_1, df_2, v 上

$$\Rightarrow \frac{\partial f_1(x)}{\partial x'^\mu} \cdot \frac{\partial f_2(x)}{\partial x'^\nu} \cdot v(x'^\sigma) = \frac{\partial f_1(x)}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \cdot \frac{\partial f_2(x)}{\partial x^\beta} \cdot \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \cdot \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\omega} v^\omega$$

$$= \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \cdot \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \cdot \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\omega}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x^\beta} \cdot v(x^\omega)\right)$$

(你可以认为所有求和都有求和号，所以可以随意移动求和与求和符号)。

坐标一变，就要换系数。

拆了"脚手架"，了解得到坐标基底间的变换：

$$[e'_\nu \otimes e'_\gamma \otimes e'^{\sigma *}] = \left\{ \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} \cdot \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\gamma} \cdot \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\omega} \right\} [e_\alpha \otimes e_\beta \otimes e^{\omega *}]$$

而 $T'^{\nu\gamma}{}_{\sigma} \, [e'_\nu \otimes e'_\gamma \otimes e'^{\sigma *}] = T^{\nu\gamma}{}_{\sigma} \, [e_\nu \otimes e_\gamma \otimes e^{\sigma *}]$

$$\Rightarrow T'^{\nu\gamma}{}_{\sigma} \cdot \{ \qquad \} [\qquad] = T^{\alpha\beta}{}_{\omega} [\qquad].$$

$$\Rightarrow T'^{\nu\gamma}{}_{\sigma} = T^{\alpha\beta}{}_{\omega} \cdot \left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\beta} \cdot \frac{\partial x^\omega}{\partial x'^\sigma} \right).$$

接下来拓展一下，我们介绍一下电动力学中的"并矢"，亦云，实际上就是一个(2,0)型张量，$v \otimes u$，它有9个分量(v^1u^1，v^1u^2，…)，在坐标变换下按特定规律变化。